

점탄성 벨트의 비선형 진동해석

우영주* · 최연선**

Nonlinear Vibration Analysis of Viscoelastic Belts

Woo, Y. J . Choi, Y. S

Key Words: Nonlinear Vibration(비선형 진동), Beat(맥놀이),
Viscoelastic Belt(점탄성 벨트), Jump Phenomenon(도약현상).

ABSTRACT

The nonlinear vibration of moving viscoelastic belts excited by the eccentricity of pulleys is investigated through experimental and analytical methods. Laboratory measurements demonstrate the nonlinearities in the responses of the belt, particularly in the resonance region and with the variation of tension. The measurements of the belt motion were made using a noncontact laser sensor. Jump and hysteresis phenomenon are observed experimentally and are studied with a model which considers the nonlinear relation of belt stretch. An ordinary differential equation is derived as a working form of the belt equation of motion. Numerical results show good agreements with the experimental observations, which demonstrates the nonlinearity of viscoelastic moving belts

1. 서론

벨트구동계는 다양한 기구에 동력전달용으로 널리 사용되는 기계기구이다. 최근에 여러 개의 모터를 사용하는 대신 하나의 모터를 이용한 벨트구동계를 사용함으로써 원가절감은 물론, 소형화가 가능하여지고 있다. 특히 컴퓨터, 반도체 등 고정밀 기계에서 벨트구동계가 쓰여짐에 따라 벨트구동계의 진동특성에 대한 이해가 필요해지고 있다. 벨트 진동은 대부분 풀리의 편심과 정렬불량이 원인이며, 장력과 속도에 따라 비선형 진동특성을 나타낸다. 벨트구동에 의해 발생하는 진동은 전체 시스템 진동의 주요 요인이 되기도 한다.

벨트진동의 문제를 움직이는 현으로 모델링하고, 편미분방정식으로 유도하여 다중시간법(multiple scales)으로 해를 구한 후 안정성 해석을 한 연구들은 많았다.^{[1][2][3]} 그러나 상미분방정식으로 벨트 운동방정식을 유도하여 수치해석을 수행한 연구는 흔치 않다. 이에 본 연구에서는 점탄성(viscoelastic)재료로 구성된 평벨트를 사용하여 실험용 벨트구동계를 제작하고, 속도와 장력 변화에 따른 실험을 수행하였다. 벨트구동계의 상미분방정식을 장력과 속도 변화에 따라 수치해석하여 해를 구하고, 실험결과와 비교하였다. 실험적으로 벨트의 고유진동수와 모우드 형상을 확인하였고, 공진점 부근에서의 맥놀이(beat) 현상을 관찰하였다. 또한 벨트의 속도변화에 따라 나타나는 도약현상(jump phenomenon)을 실험적으로 관찰하고 이론적으로 해석하였다.

* 성균관대학교 기계공학과 대학원

** 성균관대학교 기계공학과, 교수

2. 편심에 의한 벨트진동

Fig. 1과 같이 길이 방향으로 이동하는 벨트의 비선형 점탄성 특성과 폴리의 편심에 의한 가진력을 고려한 운동방정식은 식(1)과 같다.^[4]

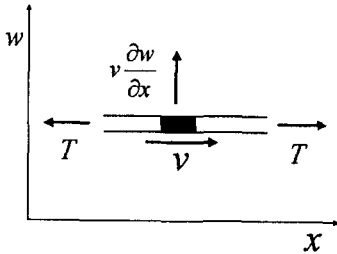


Fig. 1 Traveling taut string

$$\left(\frac{T}{A} + \sigma\right) w_{xx} + w_x \sigma_x + \frac{F(x, t)}{A} = \rho \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2v \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + v^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (1)$$

여기서 T , A , w , σ , ρ , v 각각은 벨트의 장력, 단면적, 상하 변위, 장력, 밀도, 속도이다. 가진력은 식(2)와 같다.

$$F(x, t) = (x - 2i r_1) e_1 \Omega^2 e^{i\omega t + c.c} \quad (2)$$

여기서 r_1 , e_1 은 각각 폴리 반경과 편심량이고, $c.c$ 는 켈레복소수(complex conjugate)를 의미한다. 벨트의 점탄성과 변위변화 관계의 비선형적 특성을 나타내는 식(3)을 식(1)에 대입하고 정리하면 식(4)와 같다.

$$\sigma = E^* \frac{1}{2} w_x^2 \quad (3)$$

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2\rho v \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \left(\rho v^2 - \frac{T}{A}\right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = E^* \frac{1}{2} w_x^2 w_{xx} + w_x \left(E^* \frac{1}{2} w_x^2\right)_x + \frac{F(x, t)}{A} \quad (4)$$

식(3)의 E^* 는 식(5)와 같다.

$$E^* = \left(E_e + E_v \frac{\partial}{\partial \tau}\right) \frac{T}{A} \quad (5)$$

여기서 E_e 는 벨트의 탄성스프링 값이고, E_v 는 점성 감쇠값이다. 무차원변수(nondimensional variable)를 식(6)와 같이 정의하고, 이를 이용하여 식(4)를 정리하면, 식

(7)과 같은 편미분방정식을 유도할 수 있다.

$$W = \frac{w}{L}, \quad \xi = \frac{x}{L}, \quad \tau = t \left(\frac{T}{\rho A L^2}\right)^{1/2}, \quad r = v \left(\frac{\rho A}{T}\right)^{1/2} \quad (6)$$

$$M W_{\tau\tau} + G W_{\tau} + K W = N(W) + f(x, t) \quad (7)$$

이 식에서 질량 M , 코리올리 가속도(Coriolis) G , 강성 K , 가진력 $f(x, t)$ 는 각각 식(8)과 같다.

$$M = I, \quad G = 2r \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad K = (r^2 - 1) \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}, \quad f(x, t) = \frac{F(x, t)L}{T} \quad (8)$$

벨트의 비선형 특성인 $N(W)$ 는 다음 식(9)와 같다.

$$N(W) = \frac{3}{2} E_e W_{\xi}^2 W_{\xi\xi} + E_v \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{1}{2} W_{\xi}^2\right)_{\xi\xi} + W_{\xi} E_v \frac{\partial}{\partial \tau} (W_{\xi} W_{\xi\xi}) \quad (9)$$

식(7)과 같은 벨트의 편미분방정식을 상미분방정식으로 바꾸기 위해 변수분리법을 이용하여 아래와 같이 해를 가정한다.

$$W(\tau, \xi) = x(\tau)k(\xi) \quad (10)$$

식(10)을 식(7)에 대입하고 정리하면 식(11)과 같다.

$$I x(\tau) \dot{k}(\xi) + 2r \dot{x}(\tau) k(\xi) + (r^2 - 1) \dot{x}(\tau) k(\xi) = \frac{3}{2} E_e \dot{x}^2(\tau) \dot{x}(\tau) k^3(\xi) + \frac{1}{2} E_v \dot{x}^2(\tau) \dot{x}(\tau) k^2(\xi) \dot{k}(\xi) \quad (11)$$

본 연구에 사용한 벨트는 두께가 얇고 길이가 길기 때문에 양단이 고정된 현으로 가정할 수 있고, 벨트 중심에서의 응답을 알기 위해 벨트 진동모드를 식(12)와 같이 가정할 수 있다.

$$x(\tau) = \sin \frac{n\pi\tau}{l} \quad (12)$$

식(12)를 식(11)에 대입하고, 양변에 $x(\tau)$ 를 곱한 후 벨트의 전 길이에 대해 적분하면 식(13)과 같은 상미분방정식을 유도할 수 있다.

$$\ddot{x}(\xi) + E_s A l^2(\xi) \dot{x}(\xi) + Bx(\xi) + E_s C l^3(\xi) = Df(x, t) \quad (13)$$

여기서 $A = \frac{7}{8I} \left(\frac{n\pi}{l}\right)^4$, $B = \frac{(1+\nu^2)}{I} \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$
 $C = \frac{3}{8I} \left(\frac{n\pi}{l}\right)^4$, $D = \frac{2}{l\pi}$

3. 벨트진동 실험

3.1 실험장치

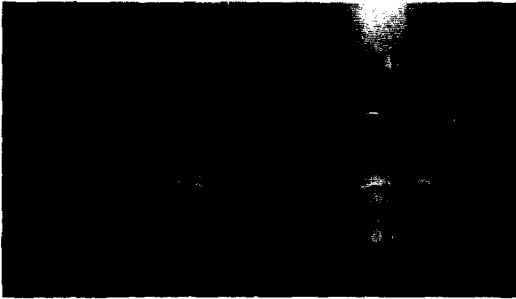


Fig. 2 Measuring equipments

본 연구에 사용된 벨트는 점탄성 평벨트를 사용하였다. 재료상수와 규격은 Table 1과 같다.

Table 1 Dimensions of the belt

l (length)	1.5 m
h (thickness)	1 mm
b (width)	3 cm
ρ (density)	2245.6 kg/ m ³

Fig. 2와 같이 좌측은 모터 축에 풀리를 연결하고, 우측에는 베어링을 넣은 아이들러 풀리를 설치하였다. 시계방향으로 회전하는 모터에 의해 벨트 구동 장치의 하단 벨트는 긴장되고, 상단은 이완되게 장치를 제작하였다. 풀리의 직경은 좌, 우가 같은 5cm이고, 벨트와 풀리의 규격을 설계에 고려하여 1000rpm, 4.2kgcm 토크 모터를 사용하였다. 모터에 연결된 엔코더를 통해 출력되는 전압신호로 모터 속도를 확인하고, 파워앰프(power amplifire)를 통하여 모터 속도를 증가 혹은 감소시키며 벨트 속도를 변화시켰다. 장력변화에 따른 벨트의 진동을 측정하기 위해 Fig. 2의 우측과 같이 무게를 변화시키면 연결된 줄에 의해 우측의 풀리가 좌우로 이동 할 수 있는 장치를 만들어 풀리의 이동에

따라 벨트의 장력이 변하게 설계하였다. 벨트의 응답은 변위센서(Graham& White Laser sensor M5L/20)를 사용하여 측정하였고, FFT Analyzer(ONO SOKKI CF-350/930)를 이용하여 실험결과를 확인하였다.

3.2 점탄성 벨트

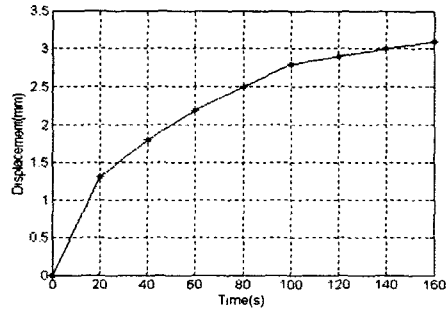


Fig. 3 Time vs. displacement

Fig. 2의 우측에 무게를 달고 그 밑에 변위센서를 설치하여 시간 변화에 의한 벨트의 길이를 측정하면, Fig. 3과 같이 시간에 따라 벨트의 길이가 변하는 모습을 확인할 수 있다. 즉 본 연구에 사용된 벨트는 점탄성 벨트임을 알 수 있다. 점탄성 재료를 모델링하는 방법으로는 맥스웰(Maxwell)모델과 켈빈(Kelvin)모델이 있는 바^[5], 본 연구에 사용된 벨트는 점탄성 고체이고 스프링의 탄성력과 대시팟(dashpot)의 점성감쇠력을 갖는 식(5)와 같은 켈빈 모델을 사용하였다.

3.3 실험방법

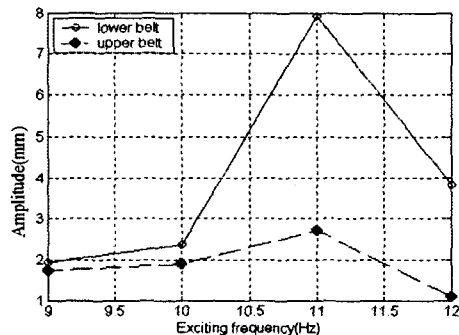


Fig. 4 Lower and upper belts responses

Fig. 4는 변위센서를 상단과 하단 벨트의 중심에 각각 설치하고, 장력이 2kg일 때 660rpm 부근에서 측정된 결과이다. 상단의 이완되는 벨트와 하단의

긴장되는 벨트에 진동특성을 각각 확인해보면, 공진점 부근에서 긴장되는 하단의 진폭이 크다. 이에 본 연구는 벨트 속도에 따라 진폭변화가 크고, 시스템 전체 진동의 주요 요인이 되는 하단 벨트에 관심을 갖고 실험을 수행하였다.

변위센서를 하단 벨트에 일정한 간격으로 설치하고 벨트의 진동모드를 확인할 수 있었고, 고유진동수 부근에서의 비선형 진동특성을 확인하기 위해 벨트의 중심에 변위센서를 설치하고 실험을 수행하였다.

벨트구동계의 진동원인 폴리의 편심량을 확인하기 위해 변위센서를 이용하여 폴리의 편심에 의한 초기 변위값을 측정하고, 그에 따른 벨트의 진동 응답을 측정하였다.

모터 속도를 증가시키면서 각각의 시간영역에서의 실험결과와 수치해석을 비교하고, 맥놀이현상(beat)을 확인하였다. 또한 모터 속도의 증가, 감소에 따른 벨트의 진폭변화를 연속적으로 나타내어 비선형 현상인 도약현상(jump phenomenon)을 증명하였다. 장력 변화에 따른 진동특성을 확인하기 위해 폴리 우측에 무게를 변화시켜가며 실험을 수행하였다.

3.4 실험결과

벨트의 비선형 운동방정식 식(13)을 Runge-Kutta 법에 의해 수치해석 하였다. 그 결과 Fig. 5와 6에서 보는 바와 같이 (a), (b), (c)의 실험결과와 (d), (e), (f)의 수치해석 결과가 잘 일치하고 있다.

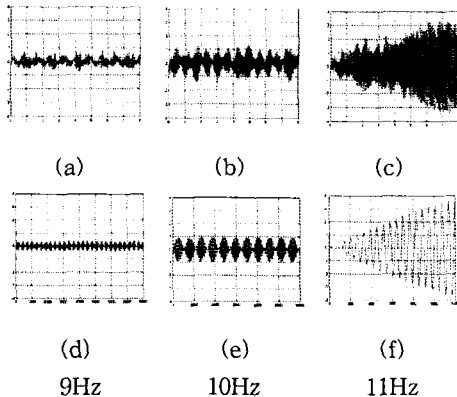


Fig. 5 Comparison between experimental & simulation results

(a), (b), (c) : experimental results
(d), (e), (f) : numerical results

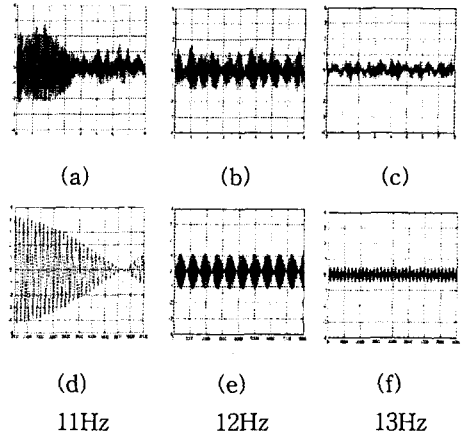


Fig. 6 Comparison between experimental & simulation results

(a), (b), (c) : experimental results
(d), (e), (f) : numerical results

Fig. 5는 9Hz부터 공진점인 11Hz까지 1Hz씩 증가시키면서 실험결과와 수치해석결과를 비교한 것으로서 진동현상이 비교적 잘 일치함을 알 수 있었다.

Fig. 6은 공진점인 11Hz에서 13Hz까지의 실험과 수치해석을 비교한 것이다. 즉 식(13)은 벨트실험 장치의 운동을 정확히 기술한 식임을 입증할 수 있었다. 특히 공진 전의 10Hz와 공진 후의 12Hz에서는 맥놀이 현상이 발생함을 알 수 있었다. 11Hz의 공진 시, Fig. 5의 (c)와 Fig. 6의 (a)같이 큰 주기를 갖고 진폭이 증가, 감소를 반복하는 것을 알 수 있었다.

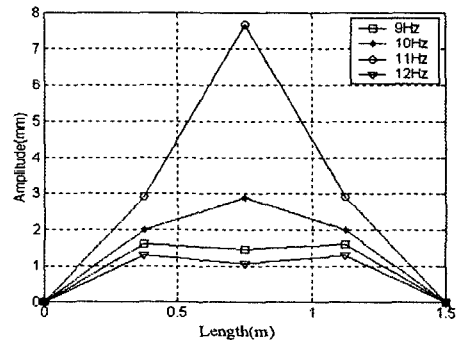


Fig. 7 Mode shapes

Fig. 7는 벨트의 모드형상을 확인하기 위해 긴장 측인 하단 벨트에 일정한 간격으로 변위센서 3개를 설치하고, 모터의 속도를 증가시키면서 장력이

2kg 작용한 상태에서 측정된 결과이다. 속도의 증가에 따라 진동모드 변화를 알 수 있는 바 공진 전에는 벨트 위치에 상관없이 진폭이 비슷한 것을 알 수 있다. 그러나 공진점 부근에서는 중심의 진폭이 가장 큰 양단지지의 1차 모드 현상을 확인할 수 있었고, 공진점을 지나면서 위치에 따른 진폭변화가 크지 않음을 알 수 있었다.

Fig. 8은 장력을 변화시켜가며 고유진동수와 진폭 변화를 측정된 것이다. 장력이 2, 3, 4kg에 대해 가진주파수를 증가시키며 진폭변화를 측정하였다. 장력이 커지면 고유진동수가 커지고, 반면에 진동레벨은 감소하는 것을 알 수 있었다. 즉 질량이 일정한 벨트에 식(5)와 같이 장력 T 가 커지면 스프링 값 E_e 가 증가하게 되고, 그에 따라 고유진동수가 증가함을 알 수 있었고, 점성 감쇠력에 해당하는 E_v 값도 증가하게 되어 벨트의 진폭이 작아짐을 확인할 수 있었다.

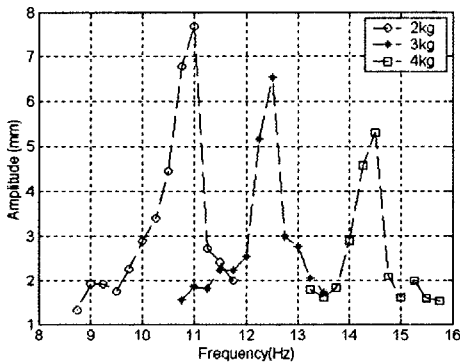


Fig. 8 Vibration levels due to tension variation

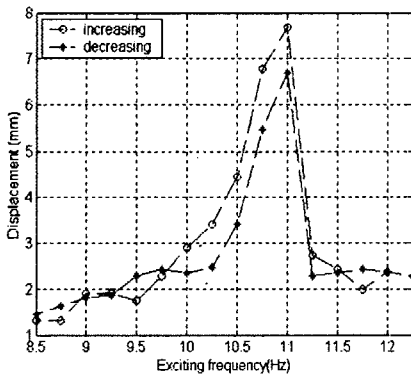


Fig. 9 Belt responses with increasing & decreasing the speed

Fig. 9는 모터 속도를 증가 혹은 감소시키면서 진동레벨을 측정된 결과이다. Fig. 9에서 보는 바와 같이 공진영역에서 가속한 경우와 감속한 경우의 진동레벨이 달라지는 것을 알 수 있다. 즉 도약현상이 발생한 것을 알 수 있다. 이 경우 도약현상은 강성스프링에 기인하는 경우로서 응답곡선이 고주파 방향으로 휘는 것을 볼 수 있다.

4. 수치해석

수치해석에서 필요한 벨트의 비선형 탄성 스프링 값과 점성 감쇠값을 알기 위해 이 두 값을 제외한 실험결과들을 식(13)에 대입하고, 실험치와 이론식 사이의 오차를 최소화하는 최소자승법으로 비선형 값 $E_e = 20 \times 10^6 \text{ m s}^2/\text{kg}$, $E_v = 10 \times 10^6 \text{ ms/kg}$ 을 확인하였다.

Fig. 10은 공진점을 기준으로 진폭이 증가하다가 공진점인 11Hz를 지남에 따라 진폭이 급격히 작아짐을 알 수 있었고, 수치해석과 실험이 잘 일치함을 확인할 수 있었다. 다만 저주파 영역에서 오차가 발생하는 이유는 아이들러 폴리의 좌, 우 진동에 의한 영향으로 가진 전 영역에서 폴리의 좌, 우 진폭은 0.2mm로 거의 일정하지만, Fig. 10과 같이 저주파 영역에서는 벨트 진폭이 작기 때문에 폴리 진동에 의한 영향을 많이 받게 되고, 공진점 부근에서는 벨트 진폭이 크기 때문에 폴리 진동에 의한 영향이 벨트 진동에 적게 영향을 미치게 된다.

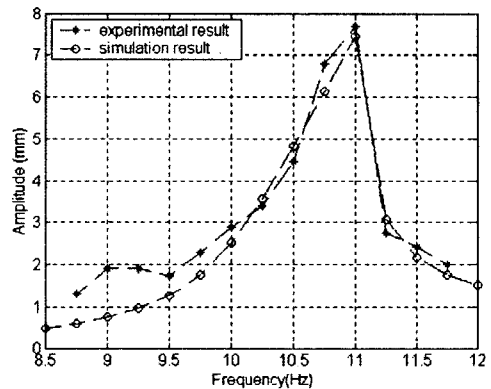


Fig. 10 Experimental & simulation results

Fig. 11, 12는 벨트의 비선형 점탄성 값을 변화시키면서 수치해석한 그림으로 켈빈모델에서 스프링 값이 E_e 이고, 대시뿐의 점성 감쇠력에 해당하는 값이 E_v 이다. 비선형 스프링 값 E_e 값이 작을 때

에는 도약현상이 나타나지 않는다. E_e 값이 증가함에 따라 도약현상이 발생하고, 고유진동수는 커지며 진폭은 작아짐을 확인할 수 있었다. 점성 감쇠력인 E_v 값을 증가시킬수록 벨트진폭은 작아짐을 확인할 수 있었다.

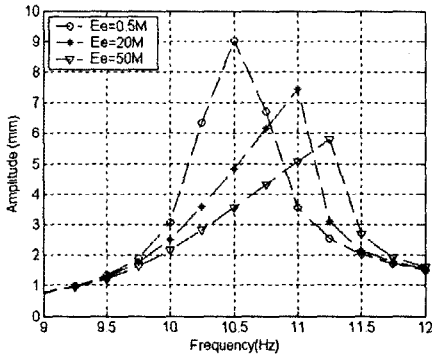


Fig. 11 Comparison of the responses with different stiffness E_e

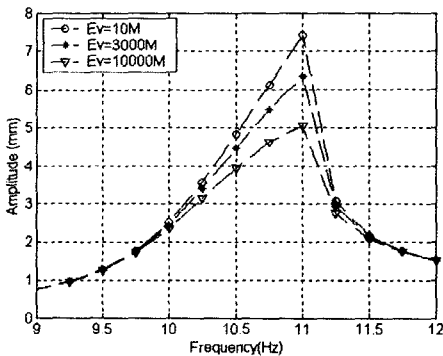


Fig. 12 Comparison of the responses with different dashpot E_v

5. 결론

본 연구에서는 점탄성 벨트의 비선형 동적응답을 살펴보았다. 이를 위해 벨트구동계 실험장치를 제작하고, 속도와 장력 변화에 의한 실험을 수행하였다. 또한 측정된 설계변수를 이용하여 시스템을 비선형 편미분방정식으로 시스템의 이론 모델을 세우고, 상미분방정식으로 유도하여 해석을 수행하였다. 수치해석과 실험결과를 비교, 분석하여 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

(1) 벨트장력이 클수록 고유진동수는 커지고, 진폭은 작아짐을 알 수 있었다.

(2) 벨트속도의 증가와 감소 시, 진폭 변화가 다른 이력현상과 도약현상을 확인할 수 있었고, 맥놀이 현상이 발생함을 실험과 수치해석으로 증명하였다.

(3) 비선형 스프링 값이 클수록 고유진동수는 커지며 진폭은 작아짐을 알 수 있었고, 점성 감쇠값 변화에 의한 진폭 변화를 확인하였다.

(4) 본 연구에 사용한 벨트는 점탄성 벨트임을 실험으로 증명하였고, 켈빈재료로 모델링한 수치해석과 실험결과가 잘 일치하였다.

(5) 이완되는 상단벨트보다 긴장되는 하단 벨트의 진폭변화가 크다는 것을 알 수 있었다.

(6) 공진점에서는 중심 진폭이 가장 크고, 공진점에서 멀어질수록 벨트 전체의 진폭은 비슷하다는 것을 알 수 있었다.

이후 벨트구동계에 아이들러 폴리를 벨트 중간에 설치하여 벨트의 장력을 측정하고, 장력을 제어함으로써 벨트 진동을 저감하는 연구를 수행할 예정이다.

후기

본 연구는 한국과학재단 목적기초(2000-2-30200-004-3) 지원으로 수행되었음.

참고문헌

- [1] A. Simpson, 1972. "On the Oscillatory Motions of Translating Elastic Cables", Journal of Sound and Vibration, Vol. 20, pp. 177-189.
- [2] S. K. Kim, J. M. Lee, 1999. "Analysis of the Nonlinear Vibration Characteristics of a Belt-Driven System", Journal of Sound and Vibration, Vol. 223, pp. 723-740.
- [3] H. M. Nelson, 1979, "Transverse Vibration of a Moving String", Journal of Sound and Vibration, Vol. 65, pp. 381-389.
- [4] L. Zhang, J. W. Zu, 1998, "Nonlinear Vibrations of Viscoelastic Moving Belts, Part II: Forced Vibration Analysis", Journal of Sound and Vibration, Vol. 216, pp. 93-105.
- [5] W. Flugge, "Viscoelasticity".
- [6] S. P. Nagarkatti, C. D. Rahn, 2000. "Tension and Speed Regulation for Axially Moving Materials", Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, Vol. 122, pp. 445-453.