

궤환 제어를 이용한 모델 개선법 : 측정 센서 위치와 궤환 이득값 설정 Model updating using the feedback exciter : The decision of sensor location & feedback gain

정 훈상**박 영진**
Jung Hunsang, Park Youngjin

Key Words : model updating, feedback exciter, sensitivity matrix, sensor location, mode shape change

ABSTRACT

The updating of FE model to match it with the experimental results needs the modal information. There are two cases where this methodology is ill-equip to deal with; under-determined and ill-conditioning problem. The feedback exciter that uses the summation of the white noise and the signals from the measurement sensors multiplied with feedback gains can deal with these problems as the new modal data from the closed loop system generate more constraints the updating parameters should obey. The new modal data from the closed loop system should be different to enhance the condition of the modal sensitivity matrix. In this research, a guide for the selection of the sensor locations and the decision of the corresponding output feedback gains is proposed. This method is based on the sensitivity of the modal data with respect to the feedback gains. Through the proper selection of the exciter and sensor locations and the feedback gain, the eigenvalue sensitivity of the updating parameters which cause the ill-conditioning of the modal sensitivity matrix can be modified and consequently the error contamination in updating parameters are reduced.

기호설명

- $M, C, K \in R^{n \times n}$: 시스템 행렬
- $x \in R^{n \times 1}$: 변위 벡터
- $f \in R^{n \times 1}$: 힘 벡터
- $b \in R^{n \times 1}$: 가진 위치 벡터
- f_o : 힘 입력
- $k_f, m_f \in R^{1 \times n}$: 궤환 이득값
- $S \in R^{m \times l}$: 고유치 민감도 행렬
- $\Phi \in R^{n \times m}$: 측정 고유 벡터 행렬
- $\Lambda \in R^{m \times m}$: 측정 고유치 행렬
- $\Phi^L \in R^{n \times n}$: 좌 고유 벡터
- $\Phi^R \in R^{n \times n}$: 우 고유 벡터

1. 서론

대상으로 하는 진동 시스템의 진동 특성을 수학적으로 모델링하고 이런 초기 모델과 실험 결과의 차이를 줄여주도록 모델의 계수들을 보정해 주는 일련의 방법론을 모델 개선법(model updating)이라고 하며 이는 구조 시스템 규명의 중요한 분야이다. 최근에 많이 사용되고 있는 민감도를 이용한 모델 개선을 수행하기 위해서는 시스템의 공진 주파수와 모드 형상이 실험을 통해 측정되어야 하는

데 이런 측정값은 측정 기기의 주파수 한계와 잡음의 영향으로 그 개수와 신뢰도에 한계가 있고 이런 측정값을 이용하여 모델의 계수들을 보정하게 되면 과결정(under-determined) 문제와 악조건(ill-condition)문제가 발생하게 된다⁽¹⁾. 이 때 시스템의 측정 센서로부터 나온 신호에 제어 이득값을 더해 주어 입력에 넣어주게 되면 궤환 루프를 통해 시스템을 변화시킬 수 있고 새롭게 구성된 폐루프 시스템의 출력으로부터 시스템에 대한 변화된 고유치 정보를 얻을 수 있게 된다. 개선하고자 하는 모델은 원래 시스템의 고유치 정보뿐만 아니라 변화된 시스템의 고유치 정보도 만족해야 하고 결과적으로 모델의 설계 변수들은 더 많은 구속 조건을 만족하면서 개선되게 되어 설계 변수의 개선이 더욱 효과적으로 이루어지게 된다⁽²⁾. 이 때 가속도 센서나 변위 센서와 같은 측정 센서와 구동기의 위치 그리고 제어 이득값을 잘못 선정하게 되면 궤환 시스템을 원래 시스템으로부터 많이 변화시켜 주지 못하게 되고 이렇게 작게 변화된 시스템으로부터 나오는 모드 정보는 원래 시스템으로부터 나오는 모드 정보와 거의 유사하기 때문에 새로운 구속 조건을 만들어 내지 못하게 된다. 또한 새롭게 구성된 모드 정보를 이용한 고유치 민감도 행렬은 원래 시스템과 거의 유사하기 때문에 원래 시스템과 궤환 시스템을 합친 통합 고유치 민감도 행렬의 조건수(condition number)가 매우 커지게 되고 이를 이용한 모델 개선 결과는 측정에 포함된 오차에 크게 영향을 받게 된다. 때문에 시스템에 궤환 루프를 걸어주어 새로운 구속 조건을

* 한국과학기술원, 기계과
E-mail : elrond@kaist.ac.kr
Tel : (042) 869-3076, Fax : (042) 869-8220
** 한국과학기술원, 기계과

만들기 위해서는 궤환 시스템의 모달 데이터가 원래 시스템의 모달 데이터와 차이가 커지도록 해서 통합 민감도 행렬의 조건수가 최소화되도록 궤환 루프를 걸어주어야만 한다.

본 논문에서는 가속도 센서나 변위 센서를 사용하여 대상으로 하는 모드 형상과 공진 주파수를 바꾸는데 효과적인 센서 위치 및 가진기 위치를 민감도 방식으로 구하는 방법을 소개한다. 또한 여러 개의 센서를 사용할 경우 각각의 센서 위치에 해당하는 정적 출력 이득값의 부호 결정 방법을 소개한다. 이를 통해 궤환 모델 개선법을 위한 센서 위치 및 제어이득값의 기본적인 설계 방법을 마련할 수 있다.

2. 본론

2.1 시스템 모델

시 불변의 선형 구조물의 동역학 식은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{f} = \mathbf{b}f_a. \quad (1)$$

여기서,

$$\mathbf{b}(i) = \begin{cases} 1 & \text{if } i = a \\ 0 & \text{if } i \neq a \end{cases}. \quad (2)$$

a 는 가진 위치이다. 이 시스템의 고유치 및 고유 벡터는 다음과 같이 구해진다.

$$\mathbf{K}\Phi = \mathbf{M}\Phi\Lambda. \quad (3)$$

$$\Phi^T \mathbf{M}\Phi = \mathbf{I}_m, \Phi^T \mathbf{K}\Phi = \Lambda. \quad (4)$$

여기서 Φ 는 측정된 고유 벡터들이고 m 은 측정된 모드의 개수이다. Φ 는 식 (4)와 같이 질량 및 강성 행렬에 대해 직교성을 가진다. 주어진 모델 계수에 대한 고유치 민감도는 다음과 같이 구해진다⁽¹⁾.

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial \theta_j} = \Phi_i^T \left[\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \theta_j} - \lambda_i \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \theta_j} \right] \Phi_i. \quad (7)$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \theta_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial \lambda_m}{\partial \theta_j} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

$$\mathbf{p} = [\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_l]^T. \quad (9)$$

$\mathbf{S}, \lambda_i, \Phi_i, \mathbf{p}$ 는 각각 고유치 민감도 행렬, i 번째 고유치, i 번째 고유 벡터 그리고 모델 계수 벡터이다. θ_j 는 개선하고자 하는 모델 계수이고 $\partial \mathbf{M} / \partial \theta_j, \partial \mathbf{K} / \partial \theta_j$ 는 각각 모델 계수의 질량 및 강성 행렬에 대한 민감도로서 모델로부터 계산할 수 있는 값이다.

$$\mathbf{z}_e = [\lambda_1^e \ \lambda_2^e \ \dots \ \lambda_m^e]^T. \quad (10)$$

$$\mathbf{z} = [\lambda_1 \ \lambda_2 \ \dots \ \lambda_m]^T. \quad (11)$$

\mathbf{z}_e, \mathbf{z} 는 각각 실험에서 구한 m 번째까지의 고유치 벡터와 초기 유한 요소 모델에서 구해진 고유치 벡터이다.

$$\mathbf{S}_j \delta \mathbf{p} = \delta \mathbf{z}. \quad (12)$$

$$\delta \mathbf{p} = \mathbf{p}_{j+1} - \mathbf{p}_j. \quad (13)$$

$$\delta \mathbf{z} = \mathbf{z}_m - \mathbf{z}_j. \quad (14)$$

\mathbf{S}_j 는 j 번째 반복 계산에서의 고유치 민감도 행렬이고 \mathbf{z}_j 는 j 번째 반복 계산에서 유한 요소 모델의 고유치 벡터이다. 모델 개선법은 식 (12)에서 $\delta \mathbf{z}$ 가 최소가 되도록 모델 계수들을 구해주게 된다. 이를 위해서는 고유치의 모델 계수에 대한 기울기(gradient)정보가 필요하게 되고 이는 식 (7)과 같이 현재의 모델 계수를 사용하여 구해지는 모델의 고유치 및 고유 벡터로부터 구해진다. 반복 계산은 다음과 같이 기본적으로 일반 역행렬 (generalized inverse)을 이용하여 구할 수 있고 다른 방법론들을 사용할 수도 있다. 반복 계산은 모델 계수 벡터가 일정한 값으로 수렴할 때까지 수행하게 된다.

$$\mathbf{p}_{j+1} = \mathbf{p}_j + \mathbf{S}_j^+ \delta \mathbf{z}. \quad (15)$$

2.2 궤환 모델 개선법

궤환 모델 개선법은 센서 신호들에 이득값을 곱하여 가진기에 들어가는 백색 잡음 신호와 섞어 주어 궤환 시스템으로부터 새로운 모달 정보를 구하여 이를 모델 개선에 사용하는 방법론으로 과결정 문제와 약조건 문제를 해결할 수 있다⁽²⁾. 시스템 구성은 그림 (1)와 같다. 가진기의 동특성을 생략하고 표현하면 시스템에 들어가는 입력 힘은 다음과 같다.

$$f_a = \mu_f (w - \mathbf{k}_f \mathbf{x} - \mathbf{m}_f \ddot{\mathbf{x}}). \quad (16)$$

여기서 w 는 가진 신호이고 \mathbf{k}_f 와 \mathbf{m}_f 는 각각 변위와 가속도 센서에 해당하는 궤환 이득값들이다. 즉 시스템 입력 힘은 가진 신호와 궤환 신호들의 합으로 표현된다. 식 (1)에 식 (16)을 더해서 표현하게 되면 다음과 같다.

$$(\mathbf{M} + \mu_f \mathbf{b} \mathbf{m}_f) \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{x}} + (\mathbf{K} + \mu_f \mathbf{b} \mathbf{k}_f) \mathbf{x} = \mathbf{b} \mu_f w. \quad (17)$$

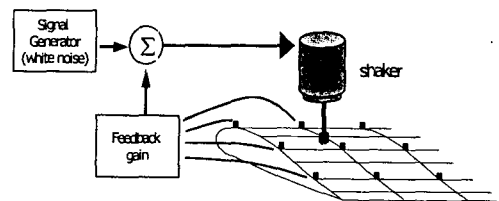


그림 1 궤환 가진기 개념도

즉 변형된 시스템은 가진기와 케환 이득값들이 질량 및 강성 행렬에 더해진 것으로 나오게 된다. 케환 이득값을 조절하여 넣어주면 시스템을 바꿔 줄 수 있다. 센서 케환 이득값을 적절히 조절하면 원래 시스템을 무한히 많이 변형시켜 줄 수 있음을 확인할 수 있다. 다만 케환 루프가 걸리면서 질량 및 강성 행렬의 대칭성이 깨지게 된다. 고유치의 민감도 식은 질량 및 강성 행렬의 대칭성을 이용하여 구해진 것이므로 수정이 필요하다.

2.2.1 고유치 민감도식 수정

$$\mathbf{M}_F = \mathbf{M}_0 + \mu_F \mathbf{b} \mathbf{m}_F \quad (18)$$

$$\mathbf{K}_F = \mathbf{K}_0 + \mu_F \mathbf{b} \mathbf{k}_F \quad (19)$$

초기 유한 요소 모델의 질량 및 강성 행렬에 설계한 케환 이득값들을 더해준 변형된 유한 요소 모델의 질량 및 강성 행렬을 $\mathbf{M}_F, \mathbf{K}_F$ 로 정의한다. 비 대칭 행렬에 대해 다음과 같이 좌/우 고유 벡터가 다르게 존재하고 좌/우 고유 벡터들은 같은 고유치를 공유하고 서로 직각이다.

$$\mathbf{K}_F \Phi^R = \mathbf{M}_F \Phi^R \Lambda \quad (20)$$

$$\mathbf{K}_F' \Phi^L = \mathbf{M}_F' \Phi^L \Lambda \quad (21)$$

$$\Phi^{L'} \mathbf{K}_F \Phi^R = \Lambda, \Phi^{L'} \mathbf{M}_F \Phi^R = \mathbf{I} \quad (22)$$

여기서 Φ^L 와 Φ^R 은 좌/우 고유 벡터이고 식 (22)과 같은 부직교성(biorthogonality)을 가진다. 부직교성을 이용하면 i 번째 고유치의 모델 계수에 대한 민감도는 다음과 같다⁽²⁾.

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial \theta_j} = \Phi_i^{L'} \left[\frac{\partial \mathbf{K}_F}{\partial \theta_j} - \lambda_i \frac{\partial \mathbf{M}_F}{\partial \theta_j} \right] \Phi_i^R \quad (23)$$

$$= \Phi_i^{L'} \left[\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \theta_j} - \lambda_i \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \theta_j} \right] \Phi_i^R$$

즉 케환 이득값에 의해 변형된 시스템 행렬의 대칭성이 깨질 경우 유한 요소 모델의 좌/우 고유 벡터만 따로 구해주면 고유치의 민감도를 수정할 수 있다. 이제 다음과 같이 원래 시스템의 실험 고유치와 모델 고유치의 차뿐 아니라 케환 시스템의 고유치 차도 최소화하도록 민감도 행렬을 구성할 수 있다.

$$\mathbf{T}_j = \begin{bmatrix} j, S^0 \\ j, S^1 \\ \vdots \\ j, S^k \end{bmatrix}, \delta \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} z_m^0 - z_j^0 \\ z_m^1 - z_j^1 \\ \vdots \\ z_m^k - z_j^k \end{bmatrix} \quad (24)$$

\mathbf{T}_j, j, S^i 와 z_m^i 는 각각 j 번째 반복 계산에서 통합 고유치 민감도 행렬, i 번째 케환 이득값에 의해 변형된 시스템의 고유치 민감도 행렬과 이 변형된 시스템의 측정된 고유치 벡터이다.

$$\mathbf{p}_{j+1} = \mathbf{p}_j + \mathbf{T}_j' \delta \mathbf{Z} \quad (25)$$

약조건 문제와 과 결정 모두 정보량을 늘어줌으

로써 해결이 가능하다. 이 방법론은 기본적으로 고유 벡터 정보를 쓰지 않기 때문에 측정이나 가진 잡음에 대해 둔감하다는 장점이 있다. 고유치 측정값이 측정 잡음에 둔감하고 전체 민감도 행렬의 조건을 향상시켜 주도록 가진 및 센서 위치를 선정하고 케환 이득값을 설정하는 연구가 필요하다.

2.3 센서 위치 결정법

위의 식 (25)에서 통합 고유치 민감도 행렬을 구성할 때 중요한 것은 통합 고유치 민감도 행렬의 조건수(condition number)가 좋아져야 한다는 것이다. 고유치 민감도 행렬의 조건수가 좋지 않을 경우 개선된 모델 계수들에 측정 오차가 크게 반영되어 잘못된 모델 개선이 이루어지게 된다⁽¹⁾. 조건수가 좋아지기 위해서는 통합 고유치 민감도 행렬의 각 행이나 열들이 서로 달라야만 한다. 이를 위해서는 케환 시스템의 고유치 민감도 행렬 s^i 가 원래 시스템의 민감도 행렬 s^0 와 크게 달라져야만 한다. 식 (23)에 의하면 s^i 가 s^0 와 달라지기 위해서는 케환 시스템의 고유치 및 고유 벡터가 원래 시스템으로부터 달라져야 함을 확인할 수 있다. 때문에 케환 제어기를 설계하는 기준은 대상으로 하는 특정 모드를 원래 시스템으로부터 많이 변화시키도록 하는 데 있다.

우선 고유치의 모델 계수에 대한 민감도는 식 (7)과 같다. 고유 벡터의 모델 계수에 대한 민감도는 다음 식과 같다⁽³⁾.

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial \theta_j} = \sum_{j=1, j \neq i}^N \frac{\Phi_j \Phi_j'}{\lambda_j - \lambda_i} \left[\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \theta_j} - \lambda_j \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \theta_j} \right] \Phi_i - \frac{1}{2} \Phi_i \Phi_i' \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \theta_j} \Phi_i \quad (26)$$

이제 위의 식을 이용하여 특정 센서 위치의 케환 이득값에 대한 민감도를 구해보도록 하자. 센서는 가속도 센서인 경우이다. 변위 센서인 경우도 같은 방식으로 구해진다.

$$\mathbf{m}_F = [g_1 \quad g_2 \quad \dots \quad g_n] \quad (27)$$

g_j 는 j 번째 DOF 에 놓여져 있는 센서에 해당하는 출력 케환 이득값이다. 이 케환 이득값을 사용할 경우 변화된 질량 및 강성 행렬은 다음과 같다.

$$\mathbf{M}_F = \mathbf{M} + \mathbf{b} \mathbf{m}_F = \mathbf{M} + \begin{bmatrix} \Theta & \dots & 0 & \dots & \Theta \\ \vdots & & 0 & & \vdots \\ g_1 & g_2 & \dots & & g_n \\ \vdots & & 0 & & \vdots \\ \Theta & \dots & 0 & \dots & \Theta \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$\mathbf{K}_F = \mathbf{K} \quad (29)$$

변화된 질량 행렬은 가진기가 놓여져 있는 DOF 에 해당하는 a 번째 행에만 변화가 생긴다. 강성 행렬에는 변화가 없다. 이런 변화된 질량 및

강성 행렬의 s 번째 DOF 에 놓여진 센서의 제한 이득값 g_s 에 대한 편미분은 다음과 같다.

$$\frac{\partial \mathbf{M}_t}{\partial g_s} = \begin{bmatrix} \ominus & \cdots & 0 & \cdots & \ominus \\ \vdots & & 0 & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & 0 & & \vdots \\ \ominus & \cdots & 0 & \cdots & \ominus \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$\frac{\partial \mathbf{K}_t}{\partial g_s} = 0 \quad (31)$$

강성 행렬의 편미분은 영행렬이 되고 질량 행렬의 편미분은 (a, s) 요소를 제외한 모든 요소들이 0 이다. 이런 특성을 이용하여 대상 모드의 고유치와 고유 벡터의 g_s 에 대한 편미분을 구해보자. 이 값이 가지는 의미는 특정 센서 위치에 단위값의 제한 이득값을 주었을 때 대상 고유치와 고유 벡터가 얼마나 변하는지를 나타낸다. 즉 어떤 위치의 센서가 대상 모드의 변환에 효율적인지를 나타내는 척도라고 할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda_t}{\partial g_s} &= \Phi_t' \left[\frac{\partial \mathbf{K}_t}{\partial g_s} - \lambda_t \frac{\partial \mathbf{M}_t}{\partial g_s} \right] \Phi_t \\ &= -\Phi_t' \lambda_t \frac{\partial \mathbf{M}_t}{\partial g_s} \Phi_t = -\lambda_t \Phi_{ta} \Phi_{ts} \end{aligned} \quad (32)$$

아래 첨자 t, s 와 a 는 각각 대상 모드, 센서 위치 그리고 가진기 위치를 나타낸다. 대상 고유치 λ_t 는 대상 모드의 고유치 λ , 대상 고유 벡터 Φ_t 의 가진기 위치에서의 값 Φ_{ta} 와 센서 위치에서의 값 Φ_{ts} 에 비례함을 확인할 수 있다. 우선 이 값이 λ_t 에 비례하기 때문에 가속도 센서를 사용하는 경우 고주파 모드로 갈수록 변화가 커짐을 확인할 수 있다. 또한 대상 고유치 λ_t 를 작은 제한 이득값을 사용하면서 많이 바꾸어 주기 위해서는 가진기와 가속도 센서의 위치가 대상 모드의 anti-node 에 위치해야 함을 확인할 수 있다. 변위 센서를 사용한 경우 식 (32)의 오른쪽 항에서 λ_t 만이 제외되게 되어 고주파 모드보다는 저주파 모드의 변환에 용이하게 된다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_t}{\partial g_s} &= \sum_{j=1, j \neq t}^n \frac{\Phi_j \Phi_j'}{\lambda_t - \lambda_j} \left[\frac{\partial \mathbf{K}_t}{\partial g_s} - \lambda_t \frac{\partial \mathbf{M}_t}{\partial g_s} \right] \Phi_t - \frac{1}{2} \Phi_t \Phi_t' \frac{\partial \mathbf{M}_t}{\partial g_s} \Phi_t \\ &= \sum_{j=1, j \neq t}^n \frac{\lambda_j \Phi_{ja} \Phi_{js}}{\lambda_j - \lambda_t} \Phi_j - \frac{1}{2} \Phi_{ta} \Phi_{ts} \Phi_t \\ &= \left(\sum_{j=1, j \neq t}^n \frac{\lambda_j \Phi_{ja}}{\lambda_j - \lambda_t} \Phi_j - \frac{1}{2} \Phi_{ta} \Phi_t \right) \Phi_s \end{aligned} \quad (33)$$

대상 고유 벡터의 민감도도 대상 고유 벡터 Φ_t 의 센서 위치에서의 값 Φ_{ts} 에 비례함을 확인할 수 있다. 이를 좀 더 자세히 살펴보기 위해 변화된 모드 형상과 원래 모드 형상 사이의 직교성이

어떻게 변하는지 살펴 보자. 우선 작은 제한 이득 값에 대해 다음과 같은 근사가 가능하다.

$$c \lambda_t \square \lambda_t - \lambda_t \Phi_{ta} \Phi_{ts} \quad (34)$$

$$c \Phi_t \square \Phi_t + \frac{\partial \Phi_t}{\partial g_s} g_s \quad (35)$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2} \Phi_{ta} \Phi_{ts} g_s \right) \Phi_t + \sum_{j=1, j \neq t}^n \frac{g_s \lambda_j \Phi_{ja} \Phi_{ts}}{\lambda_j - \lambda_t} \Phi_j$$

아래 앞 첨자 c 는 변화된 대상 모드를 표현한다.

$$\Phi_t' \mathbf{M}_c \Phi_t \square 1 - \frac{1}{2} \Phi_{ta} \Phi_{ts} g_s \quad (36)$$

$$\Phi_b' \mathbf{M}_c \Phi_t \square \frac{g_s \Phi_{ba} \Phi_{ts}}{\lambda_b / \lambda_t - 1}, \quad b \neq t \quad (37)$$

아래 첨자 b 는 대상 모드를 제외한 다른 모드들을 표현한다. 식 (36)은 변화된 대상 고유 벡터 $c \Phi_t$ 가 원래 고유 벡터 Φ_t 로부터 얼마나 변했는지를 나타내는 척도이다. 식 (36)에 의하면 고유치의 경우와 같이 대상 모드의 고유치 λ_t , 대상 고유 벡터 Φ_t 의 가진기 위치에서의 값 Φ_{ta} 와 센서 위치에서의 값 Φ_{ts} 에 비례함을 확인할 수 있다. 식 (37)은 변화된 고유 벡터가 대상 모드가 아닌 다른 고유 벡터로 얼마나 변했는지를 나타내는 척도로서 Φ_b 에 비례하고 분모항을 살펴보면 두 모드가 근접해 있을수록 더욱 더 잘 변하게 된다.

위의 민감도식들에 의하면 대상 모드를 효율적으로 변화시키기 위해서는 대상 모드의 anti-node 점에 센서와 가진기를 부착시키는 것이 효과적임을 알 수 있다. 제안된 방식으로 센서 위치를 결정하게 되면 관심 주파수 대역 내의 모드 중에 대상 모드를 제외한 다른 모드들은 변화가 크지 않을 것이다. 때문에 제한 시스템으로부터 얻게 되는 새로운 모드 정보는 크게 변화시킨 대상 모드만으로 한정해야만 한다.

2.4 다수 센서 사용시 제한 이득값의 부호 결정

제한 제어를 사용해 시스템을 변화시킬 경우 하나의 센서만을 사용하면 대상 모드의 변화에 한계가 있고 또한 과도한 제한 이득값을 사용하여 시스템을 변화시킬 경우 시스템의 안정성을 깰 수도 있다. 때문에 되도록 여러 개의 센서를 사용하여 적은 제한 이득값으로 시스템의 안정성을 유지시키면서 대상 모드의 변화는 크게 만드는 것이 효율적이다. 여러 개의 센서를 사용할 경우 각각의 센서에 해당하는 제한 이득값의 설정을 어떻게 해야만 대상 모드를 많이 변화시켜주면서 시스템의 안정성을 유지할 수 있는지가 제어기 설계의 목표가 된다. 기본적으로 다음과 같이 대상 고유 벡터의 변화를 최대화하는 직접 최적화 문제를 정의할 수 있다.

$$\min_{g_i} J = \Phi_i' M_c \Phi_i \quad (38)$$

Constraints : system stability, control effort

이 문제를 일반적인 최적화 방식으로 풀기 위해서는 궤환 시스템의 대상 고유 벡터 ${}_c \Phi_i$ 의 궤환 이득값에 대한 기울기(gradient) 정보가 필요하다. 대상 시스템에 궤환 제어가 걸리지 않은 경우에는 질량 및 강성 행렬의 직교성(orthogonality)을 이용하여 식 (26)과 같이 기울기 정보가 구해진다. 하지만 궤환 제어가 걸린 후에는 질량 행렬의 대칭성이 깨지면서 직교성이 만족되지 않고 부직교성(biorthogonality)만 만족된다. 이 경우에는 고유 벡터가 좌/우 고유 벡터로 나누어지고 좌/우 고유 벡터의 합의 기울기(gradient) 정보는 구해지지만 좌/우 각각의 고유 벡터의 기울기를 구하는 방법은 아직까지 알려지지 않았다. 때문에 기울기 정보를 사용하지 않는 최적화 방법을 사용하거나 간접적인 다른 성능 지수를 사용해야만 한다. 본 논문에서 제안된 고유치 및 고유 벡터의 궤환 이득값에 대한 민감도를 이용하면 궤환 이득값이 크지 않은 경우에 각각의 궤환 이득값들이 가져야 하는 부호는 결정할 수 있다.

다음과 같이 m 개의 위치에 센서들을 장치하고 거기에 해당하는 궤환 이득값을 결정하려고 한다. 이 센서 위치들은 전장에서 소개된 대로 대상 고유 벡터의 크기가 큰 위치들로 구성되게 된다.

$$\mathbf{m}_F = [g_{s_1} \ g_{s_2} \ \dots \ g_{s_m}] D_s \quad (39)$$

D_s 는 $m \times n$ 의 센서 위치 행렬이다. D_s 의 j 번째 열은 j 번째 센서 위치에서 1 이고 나머지 값은 0 인 행렬이다. 궤환 이득값들이 작은 경우 다음과 같은 근사가 가능하다.

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial \mathbf{m}_F} = \left[\frac{\partial \lambda_i}{\partial g_{s_1}} \quad \frac{\partial \lambda_i}{\partial g_{s_2}} \quad \dots \quad \frac{\partial \lambda_i}{\partial g_{s_m}} \right] \quad (40)$$

$$= -\lambda_i \Phi_{i\alpha} \left[\Phi_{i\alpha_1} \quad \Phi_{i\alpha_2} \quad \dots \quad \Phi_{i\alpha_m} \right]'$$

$${}_c \lambda_i \square \lambda_i + \frac{\partial \lambda_i}{\partial \mathbf{m}_F} \mathbf{m}_F = \lambda_i - \lambda_i \Phi_{i\alpha} \sum_k {}^m \Phi_{i\alpha_k} g_{s_k} \quad (41)$$

$${}_c \Phi_i \square \Phi_i + \frac{\partial \Phi_i}{\partial \mathbf{m}_F} \mathbf{m}_F = \left(1 - \frac{1}{2} \Phi_{i\alpha} \sum_{k=1}^m \Phi_{i\alpha_k} g_{s_k} \right) \Phi_i + \quad (42)$$

$$\sum_{k=1}^m \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{\lambda_j \Phi_{j\alpha} \Phi_{i\alpha_j}}{\lambda_j - \lambda_i} \Phi_j g_{s_k}$$

$$\Phi_i' M_c \Phi_i \square 1 - \frac{1}{2} \Phi_{i\alpha} \sum_{k=1}^m \Phi_{i\alpha_k} g_{s_k} \quad (43)$$

식 (41)과 식 (43)에서 고유치와 고유 벡터의 변화가 커지기 위해서는 모든 $\Phi_{i\alpha_j} g_{s_j}$ 값들이 같은 부호를 가지도록 센서 이득값들이 결정되어야 한다. 이 방법을 통해 다수의 센서를 사용하는 경우

각각의 센서에 해당하는 궤환 이득값의 부호를 결정할 수 있지만 이것은 제어기 설계에 가장 기본적인 방향만을 제시하는 것이다. 때문에 제어 입력의 한계와 모델의 안정성과 같은 제한 조건을 만족하면서 특정 모드의 변환에 효과적인 제어기 설계에 대한 연구가 수행되어야 할 것이다.

3. 시뮬레이션

3.1 센서 위치 결정

그림 2 와 같은 질량 강성 시스템에서 센서 위치에 대한 대상 모드의 변화 정도를 살펴보자. 각각의 질량 및 강성값과 시스템의 고유 벡터는 표 1 과 같다. 변형하고자 하는 대상 모드를 2 번째 모드로 결정하자. 식 (36)에 의하면 2 번째 고유 벡터를 가장 크게 변화시키기 위해서는 고유 벡터의 값이 상대적으로 가장 큰 4 번째 DOF 가 센서 위치로 결정되어야 함을 확인할 수 있다. 고유 벡터의 값이 가장 작은 첫번째 DOF 를 센서 위치로 사용할 경우와 비교하여 같은 궤환 이득값에 대한 모드 형상의 변화를 살펴보자. 가진기의 위치는 2 번째 DOF 로 결정하였다. 그림 3 은 각각의 센서 위치에 대한 고유 벡터의 변화를 나타내고 있다. 첫번째 DOF 에 센서를 설치한 경우에 비해 네번째 DOF 에 센서를 설치한 경우가 고유 벡터의 변화가 월등히 큼을 확인할 수 있다.

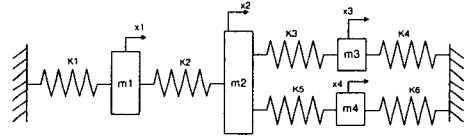


그림 2 대상 시스템

표 1 시스템 데이터

M	K	Φ_1	Φ_2	Φ_3	Φ_4
6.7	540	0.118	0.006	0.318	0.183
3	750	0.175	0.008	0.224	-0.5
8.1	300	0.281	0.159	-0.132	0.041
8.09	110	0.146	-0.31	-0.059	0.019
	140				
	250				

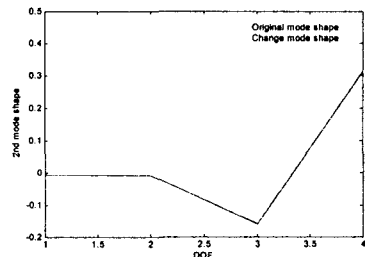


그림 3 (a) 센서 위치 : 첫번째 DOF

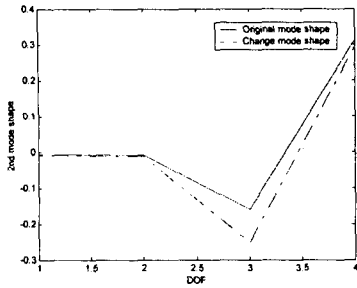


그림 3 (b) 센서 위치 : 네번째 DOF
그림 3 센서 위치에 대한 모드 변화량

3.2 궤환 이득값의 부호 선정

이제 두번째 모드를 변환시키기 위해 2 개의 센서를 사용하는 경우에 대해 살펴보자. 표 1에서 2 번째 고유 벡터는 3 번째와 4 번째 DOF 에서 고유 벡터의 크기가 상대적으로 크다. 3 번째와 4 번째 DOF 를 센서 위치로 사용하자. 식 (41)과 식 (43)에 의하면 $\Phi_{23}g_3$ 과 $\Phi_{24}g_4$ 의 부호가 같아야만 고유 벡터의 변화가 커짐을 확인할 수 있다. 때문에 g_3 과 g_4 의 부호는 반대가 되어야 한다. 비교를 위해 다음과 같이 2 개의 제어기를 구성하자.

$$\mathbf{m}_{F1} = [0 \ 0 \ 1 \ 1] \quad (44)$$

$$\mathbf{m}_{F1} = [0 \ 0 \ -1 \ 1] \quad (45)$$

식 (44)의 제어기 1 은 2 개의 이득값이 같은 부호를 가지는 경우이고 식 (45)의 제어기 2 는 2 개의 이득값이 다른 부호를 가지는 경우이다. 그림 4 에 의하면 2 개의 이득값이 다른 부호를 가지는 경우 대상 모드의 변화가 더욱 크게 되는 것을 확인할 수 있다.

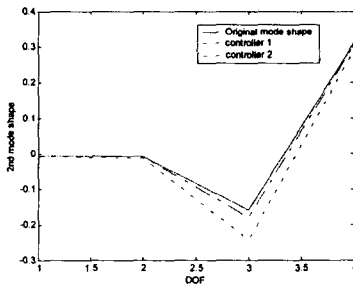


그림 4 제어기에 따른 모드 형상의 변화

4. 결론 및 향후 연구

본 논문에서는 궤환 모델 개선법의 통합 고유치 민감도 행렬의 조건(condition)을 좋게 해주는 센서 위치와 궤환 이득값의 선정 방법에 대해 다루었다.

가속도 센서나 변위 센서를 사용하여 대상으로 하는 모드 형상과 공진 주파수를 바꾸는데 효과적인 센서 위치 및 가진기 위치를 민감도 방식으로 구하는 방법을 소개하였다. 또한 제안된 방법을 사용하여 여러 개의 센서를 사용할 경우 각각의 센서 위치에 해당하는 정적 출력 이득값의 부호를 결정하는 방법을 소개하였다. 이를 통해 궤환 모델 개선법을 위한 센서 위치 및 제어 이득값의 기본적인 설계 방법을 마련할 수 있었다. 이 방법은 센서 위치와 거기에 해당하는 이득값의 부호를 결정할 수는 있지만 각각의 이득값의 구체적인 값과 한계를 결정하여 주지는 못한다. 때문에 제어 입력의 한계 내에서 모델의 안정성을 보장하며 대상 모드를 가장 많이 바꾸어주는 제어 이득값의 선정에 대한 연구가 필요할 것이다.

후 기

본 연구는 국가지정연구사업 “진동저감을 위한 동특성 변경기술(M1-0001-00-0139)” 과 두뇌 한국 사업(Brain Korea 21) 지원에 의한 것이다.

참고문헌

- (1) M. I. Friswell et al., 1996, Finite element model updating in structural dynamics, Kluwer academic publishers, London, chap. 5.
- (2) H. S., Jung et al., Model updating using the feedback exciter, Asia-Pacific Vibration Conference 2001, Oct.10.2001
- (3) N. M. M. Maia et al., Theoretical and Experimental Modal Analysis, chap 7.