한국소음진동공학회 2002년도 춘계학술대회논문집, pp. 651~659.

부분 구조 모드 합성법 및 유전 전략 최적화 기법을 이용한 비부합 절점을 가진 구조물의 구조변경

Structural Dynamics Modification of Structures Having Non-Conforming Nodes Using Component Mode Synthesis and Evolution Strategies Optimization Technique

이준호* · 정의일** · 박윤식***

Joon-Ho Lee, Eui-Il Jung and Youn-Sik Park

Key Words : Substructure(부분 구조물), Synthesis(합성), Non-Conforming(비부합), Component Mode Synthesis(부분구조 모드 합성법), Evolution Strategies(유전 전략), Structural Dynamics Modification(동특성 구조 변경법), Eigenvalue(고유치)

ABSTRACT

Component Mode Synthesis (CMS) is a dynamic substructuring technique to get an approximate eigensolutions of large degree-of-freedom structures divisible into several components. But, In practice, most of large structures are modeled by different teams of engineers, and their respective finite element models often require different mesh resolutions. As a result, the finite element substructure models can be non-conforming and/or incompatible. In this work, A hybrid version of component mode synthesis using a localized lagrange multiplier to treat the non-conforming mesh problem was derived. Evolution Strategies (ESs) is a stochastic numerical optimization technique and has shown a robust performance for solving deterministic problems. An ESs conducts its search by processing a population of solutions for an optimization problem based on principles from natural evolution. An optimization example for raising the first natural frequency of a plate structure using beam stiffeners was presented using hybrid component mode synthesis and robust evolution strategies (RES) optimization technique. In the example, the design variables are the positions and lengths of beam stiffeners.

1. 서 론

부분 구조 모드 합성법(Component Mode Synthesis)은 구조 동역학 분야에서 많이 사용되어 온 방법으로, 많은 자유도를 가진 구조물을 여러 부분 구조물로 나눠서 부분 구조물에 대한 동적 해석결과를 바탕으로 전체 구조물의 동적 특성을 계산 효율을 높이면서 근사적으로 구하는데 사용되어 왔다. 1965년 이후로, 다양한 부분 구조 모드 합성법이 제안되어 왔는데[1,2,3], 이들 방법은 부분 구조물의 진동 모드 형상을 이용한 좌표변환을 통해 전체 시스템의 차수를 줄이게 되며, 전체 구조물을 구성하기 위해 부분 구조물들을 연결할 때 부분 구조물들 간의 경계 조건에 따라 여러 가지 방법으로 분류된다.

일반적으로 큰 구조물의 유한요소모델은 여러 팀 소속의 엔지니어들에 의해 독자적으로 만들어지는데, 각 팀에서 만들어지는 부분 구조 모델들은 각각의 모델링 정확도를 맞추기 위해 필요한 요소의 개수가 달라지는 경우가 발생한다. 따라서 전체 구조물을 구성할 경우에 부분 구조물들 간의 접점이 서로 맞지 않는 경우가 발생할 여지가 있다.

최근에 이러한 비부합 문제를 해결하기 위한 논문들이 발표되고 있다.[4,5,6,7,8,9,10] Farhat[4]은 부분 구조물들 간의 경계면에서의 변위 구속 조건을 전역 라그랑지 승수를 사용하여 처리하고, 이를 부분 구조 모드 합성법에 적용하였다. Park[5,6,7]은 전역 라그랑지 승수 대신 국부 라그랑지 승수를 사용하여, Farhat 방법에서의 문제점인, 경계면에 위치한

* 한국과학기술원 기계공학과
E-mail : glxtmw@hitel.net
Tel : (042) 869-3060, Fax : (042) 869-8220

** 한국과학기술원 기계공학과

*** 정회원, 한국과학기술원 기계공학과

요소의 타입에 따라 변하게 되는 변위 내삽법(Displacement Interpolation)문제를 해결하였다. 정의일[9,10]은 국부 라그랑지 승수를 이용하여 비부합 문제를 처리하였고, 비부합 절점을 가진 구조물의 합성 및 행렬식 탐색을 통한 재해석 방법을 제안하였다. 그리고 이를 동특성 구조변경에 적용하였다.

동특성 구조 변경법(Structural Dynamics Modification)은 구조물의 동특성 변경을 통해 엔지니어가 원하는 형태로 구조물이 거동하게 만들기 위해 사용되는 방법으로 수치 최적화 방법을 이용해서 최적의 구조 변경해를 구하게 된다. 최적화 방법 중, 유전 전략 최적화 기법(Evolution Strategies)은 자연 진화론의 원리를 사용하여 설계변수와 변형 매개변수(Mutation parameter)들로 구성된 개체들간의 경쟁을 통해 최적화하는 방법으로, 다양한 최적화 문제에서 만족스러운 결과를 나타내어왔다. 유전 전략 최적화 기법은 크게, 개체들을 변형 매개변수를 통해 변형시킬 때 가우시안 분포를 이용하는 고전 유전 전략[11](Classical Evolution Strategies)과 코시 분포를 이용하는 신속 유전 전략[12](Fast Evolution Strategies), 최근에 Ohkura[13]에 의해 제안된 신속 유전 전략 기법에서 발생하는 변형량의 하한 문제(Lower bound problem)를 해결하면서 변형 매개변수의 자가 적응(Self-adaptive property)을 높인 강건 유전 전략(Robust Evolution Strategies) 기법으로 나눌 수 있다.

본 연구에서는 국부 라그랑지 승수를 이용해서 비부합 문제를 해결하며 부분 구조물들에 대해 Craig-Bampton 부분 구조 모드 합성법을 적용해서 재해석 시 계산효율을 높이는 하이브리드 부분 구조 모드 합성법(Hybrid CMS using a localized lagrange multiplier)을 제안하고 이를 평판 기저 구조물(Base structure)의 고유 진동수를 빔 보강재를 이용해서 높이는 동특성 구조 변경에 적용하여 제안된 방법을 검증하고자 한다.

2. 국부 라그랑지 승수를 이용한 하이브리드 부분 구조 모드 합성법

2.1 Craig-Bampton 부분 구조 모드 합성법

두 개의 구조물에 대한 Craig-Bampton 부분 구조 모드 합성법은 다음과 같이 유도된다.

s 번째 구조물의 자유 진동 운동 방정식은 식 (1)과 같다.

$$\begin{bmatrix} M_{bb}^{(s)} & M_{bi}^{(s)} \\ M_{ib}^{(s)} & M_{ii}^{(s)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_b^{(s)} \\ \ddot{u}_i^{(s)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{bb}^{(s)} & K_{bi}^{(s)} \\ K_{ib}^{(s)} & K_{ii}^{(s)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_b^{(s)} \\ u_i^{(s)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$
$$\{y^{(s)}\} = [C^{(s)}]\{q\} = [C^{(s)}] \begin{Bmatrix} u_b^{(s)} \\ u_i^{(s)} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

여기서 $u_b^{(s)}$는 이웃한 구조물과 연결되는 부분의 변위 자유도이고, $u_i^{(s)}$는 연결에 관여하지 않는 부분의 변위 자유도이다. C는 전체 자유도 중에서 일부 자유도 만을 뽑아내는 0과 1로 구성된 출력 행렬이다. 여기서 전체 변위 자유도를 다음과 같이 일반화된 변위 자유도 $p^{(s)}$ 와 경계 변위 자유도 $u_b^{(s)}$, 변환행렬 $T^{(s)}$를 이용해 표현할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} u_b^{(s)} \\ u_i^{(s)} \end{Bmatrix} = T^{(s)} \begin{Bmatrix} u_b^{(s)} \\ p^{(s)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I^{(s)} & 0 \\ \Phi_c^{(s)} & \Phi_n^{(s)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_b^{(s)} \\ p^{(s)} \end{Bmatrix} \quad (2)$$

여기서 $\Phi_c^{(s)} = -K_{ii}^{(s)^{-1}} K_{bi}^{(s)^T}$는 구속 모드(Constraint mode)이고 $\Phi_n^{(s)}$는 고정 경계 모드(Fixed interface mode)이다. 구속 모드는 정적 모드이고, 고정 경계 모드는 부분 구조물의 연결 부위 자유도를 고정시킨 상태에서 운동 방정식을 풀어서 구해지는 모드이다.

구해진 변환 행렬을 이용해서 축약된 구조물의 운동 방정식은 식 (3)과 같다.

$$\begin{bmatrix} T^{(s)^T} M_{bb}^{(s)} T^{(s)} & T^{(s)^T} M_{bi}^{(s)} T^{(s)} \\ T^{(s)^T} M_{ib}^{(s)} T^{(s)} & T^{(s)^T} M_{ii}^{(s)} T^{(s)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_b^{(s)} \\ \ddot{p}^{(s)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} T^{(s)^T} K_{bb}^{(s)} T^{(s)} & T^{(s)^T} K_{bi}^{(s)} T^{(s)} \\ T^{(s)^T} K_{ib}^{(s)} T^{(s)} & T^{(s)^T} K_{ii}^{(s)} T^{(s)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_b^{(s)} \\ p^{(s)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3)$$
$$\{y^{(s)}\} = [C^{(s)} T^{(s)}]\{q_R\} = [C^{(s)} T^{(s)}] \begin{Bmatrix} u_b^{(s)} \\ p^{(s)} \end{Bmatrix}$$

두 개의 인접하는 부분 구조물들을 합성하기 위해서는 식 (4)와 같이 부분 구조물의 경계에서의 변위가 일치해야 하는 구속 조건이 필요하게 된다.

$$\{y_i^1\} - \{y_i^2\} = [C_i^1 T^1]\{q_R^1\} - [C_i^2 T^2]\{q_R^2\} = 0 \quad (4)$$

여기서 C_i^1과 C_i^2는 각각 1번, 2번 구조물에서 경계에 위치한 자유도를 뽑아내는 출력 행렬이다.

전체 구조물의 거동은 부분 구조물들의 운동방정식과 경계 변위 일치 구속조건을 이용해서 구할 수 있다.

2.2 비부합 절점을 가진 경우, 경계 변위 일치 구속조건의 처리[9,10]

인접한 두 부분 구조물들 간에 서로 일치되지 않는 비부합 절점들을 가진 경우에는 식 (4)의 경계 변위 일치 구속조건을 바로 적용할 수 없게 된다. 이를 해결하기 위해 그림 1과 같이 부분 구조물들 간의 경계면에 가상의 경계 기준면(Virtual interface reference frame)을 위치하고 경계 기준면 상에 가상 절점을 위치시켜 이 절점을 각각의 부분 구조물의 경계에 위치한 절점과 연계시켜 변위 일치 구속조건을 처리한다.

합성된 전체 구조물의 운동 방정식은 서로 접하는 절점들의 변위 일치 구속조건을 국부 라그랑지 승수를 사용하여 처리하며 해밀턴 정리에 적용하면 다음과 같다.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V + W_{nc} + \Pi_\lambda) = 0 \quad (5)$$

여기서

$$\Pi_\lambda = \sum_{s=1}^{s=N_s} \bar{\lambda}^{(s)^T} (\bar{u}^{(s)} - \bar{u}^b) dS \quad (6)$$

이다. N_s는 부분 구조물의 개수이며, $\bar{u}^{(s)}$와 $\bar{u}^b$는 각각

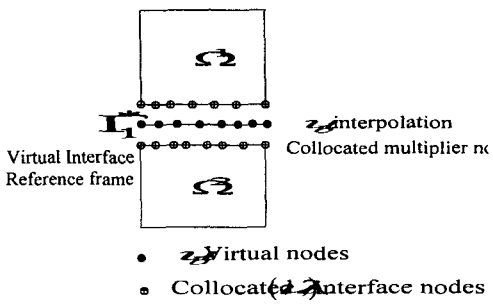

Figure 1. Connection by virtual interface reference frame nodes

부분 구조물의 경계에 위치한 절점의 변위와 가상의 경계 기준면에 위치한 절점의 변위를 나타낸다. $\bar{\lambda}^{(s)}$는 국부 라그랑즈 승수로서, 전체 구조물의 힘 평형을 유지하기 위해 필요한 부분 구조물들 간에 작용하는 내력을 의미한다.

변위를 적당한 형상 함수로 이산화하면 식 (7)~(9)가 된다.

$$\bar{u}^{(s)} = N_u^{(s)} u^{(s)} \tag{7}$$

$$\bar{\lambda}^{(s)} = N_\lambda^{(s)} \lambda^{(s)} \tag{8}$$

$$\bar{u}_b^{(s)} = N_b^{(s)} u_b^{(s)} \tag{9}$$

여기서 $N_u^{(s)}$, $N_\lambda^{(s)}$, $N_b^{(s)}$는 각각 부분 구조물의 변위 형상 함수, 국부 라그랑지 승수의 형상 함수, 경계 기준면의 변위 형상 함수이고, $u^{(s)}$, $\lambda^{(s)}$, $u_b^{(s)}$는 각각 부분 구조물의 경계 절점 변위, 국부 라그랑즈 승수, 경계 기준면의 가상 절점 변위를 나타낸다. 이상의 이산화 과정을 통해서 식 (5)는 다음과 쓸 수 있다.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \sum_{s=1}^{N_s} \left(\frac{1}{2} \dot{u}^{(s)T} M^{(s)} \dot{u}^{(s)} + \frac{1}{2} u^{(s)T} K^{(s)} u^{(s)T} - f^{(s)T} u^{(s)T} + \lambda^{(s)T} C^{(s)} u^{(s)} - \lambda^{(s)T} C_b^{(s)} u_b^{(s)} \right) = 0 \tag{10}$$

$$C^{(s)} = \int_{\Gamma} N_\lambda^T N_u^{(s)} dS \tag{11}$$

$$C_b^{(s)} = \int_{\partial\Omega_b^{(s)}} N_\lambda^T N_b^{(s)} dS \tag{12}$$

여기서 $M^{(s)}$, $K^{(s)}$, $f^{(s)}$, $C^{(s)}$, $C_b^{(s)}$는 각각 s 번째 부분 구조물의 질량 행렬, 강성 행렬, 외력, 연결 출력 행렬, 보간 행렬을 나타낸다. 그림 1에서와 같이 국부 라그랑지 승수의 절점이 부분 구조물의 경계 절점과 일치하는 경우, $C^{(s)}$는 0과 1로 구성되어지는 Boolean 행렬이 된다. 여기서 1은 부분 구조물의 절점이 다른 구조물과 접하는 경계에 있음을 의미하게 된다.

보간 행렬 $C_b^{(s)}$는 경계 기준면을 근사화 함으로써 구해지는 양으로, 경계 기준면의 가상 절점에서 경계 기준 형상 함수를 계산함으로써 얻어진다.

식 (10)의 적분항의 미소 변형량을 0으로 취함으로써 다음과 같이 이산화된 운동 방정식을 얻을 수 있다.

$$\delta u^{(s)} : M^{(s)} \ddot{u}^{(s)} + K^{(s)} u^{(s)} = f^{(s)} - C^{(s)T} \lambda^{(s)} \qquad s = 1, \ldots, N_s \tag{13}$$

$$\delta \lambda^{(s)} : C^{(s)} u^{(s)} - C_b^{(s)} B_b^{(s)} u_b = 0 \tag{14}$$

$$\delta u_b : \sum_{s=1}^{N_s} \left(C_b^{(s)} B_b^{(s)} \right)^T \lambda^{(s)} = 0 \tag{15}$$

$$u_b^{(s)} = B_b^{(s)} u_b \tag{16}$$

여기서 $B_b^{(s)}$는 전체 구조물을 구성하는 모든 부분 구조물들 간의 경계면 상의 가상 절점 변위 u_b에서 s 번째 부분 구조물의 경계면 상의 가상 절점 변위만을 뽑아내는 행렬로서 Boolean 행렬이다. 식 (13)~(16)을 연립해서 합성된 구조물의 운동 방정식을 완성하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{\lambda} \\ \ddot{u}_b \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K & C^T & 0 \\ C & 0 & -C_b B_b \\ 0 & -(C_b B_b)^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \lambda \\ u_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{17}$$

여기서 M, K, C는 전체 구조물의 질량 행렬, 강성 행렬, 연결 출력 행렬로써 각 부분 구조물의 행렬이 대각 형태로 위치한다. $C_b B_b$는 $C_b^{(s)} B_b^{(s)}$를 열 방향으로 쌓아서 얻어진다. 이상의 C와 $C_b B_b$는 전체 합성된 구조물에 대해 아무런 경계 조건이 부과되지 않은 경우이고, 전체 구조물에 경계 조건이 존재하는 경우에는 C와 $C_b B_b$를 변경해야 한다.

두 개의 부분 구조물이 존재할 경우에는 다음과 같이 변경된다.

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad C_b B_b = \begin{bmatrix} C_b^1 B_b^1 \\ C_b^2 B_b^2 \\ C_b^3 B_b^3 \end{bmatrix} \tag{18}$$

여기서 $C_b^3 B_b^3$는 합성된 구조물에서 경계 조건이 부가되는 절점과 연결되는 가상 절점의 보간 행렬이다.

만약 주파수 ω로 가진되는 조화 가진의 경우 식 (17)은 식 (19)와 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} D & C^T & 0 \\ C & 0 & -C_b B_b \\ 0 & -(C_b B_b)^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \lambda \\ u_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{19}$$

여기서 $D(\omega) = (K - \omega^2 M)^{-1} = H^{-1}(\omega)$는 동적 강성을 나타낸다.

식 (19)의 첫 번째 행은

$$D(\omega) u = (f - C^T \lambda) \tag{20}$$

가 되고, 동적 강성 행렬의 역을 취하면

$$u = H(\omega)(f - C^T \lambda) \tag{21}$$

가 된다. 식 (21)을 식 (19)의 두 번째 행에 대입하면

$$H_{bb} \lambda + C_b B_b u_b = CHf \tag{22}$$

여기서 하첨자 bb는 부분 구조물의 자유도 중에서 경계에 위치한 자유도를 의미하며, $H_{bb} = CD^{-1}C = CHC^T$는 모든 부분 구조물의 경계 자유도에 대한 주파수 응답함수를 대각 형태로 가지는 행렬이다. 식 (22)와 식 (19)의 세 번째 식

으로부터 축소된 운동 방정식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} H_{bb} & C_bB_b \\ -(C_bB_b)^T & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \lambda \\ u_b \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} CHf \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (23)$$

외력이 없는 경우, 합성된 구조물의 자유 진동에 대한 고유 진동수 ω_r은 위 식의 행렬식이 영이 됨을 이용해서 구한다.

$$det(H_{bb}(\omega_r))det((C_bB_b)^T H_{bb}^{-1}(\omega_r)C_bB_b)=0 \quad (24)$$

식 (23)의 두 번째 행으로부터 u_b는 다음 식을 만족해야 한다.

$$(C_bB_b)^T H_{bb}^{-1}(\omega_r)C_bB_bu_b=G(\omega_r)u_b=0 \quad (25)$$

여기서 구해진 u_b로부터 다음과 같이 국부 라그랑지 승수를 얻을 수 있다.

$$\lambda=-H_{bb}^{-1}(\omega_r)C_bB_bu_b \quad (26)$$

결과적으로 전체 구조물의 모드 형상은 다음과 같이 얻어진다.

$$u=-HC^T\lambda \quad (27)$$

2.3 하이브리드 부분 구조 모드 합성법

비부합 절점을 가진 구조물에 대한, 국소 라그랑지 승수를 이용한 하이브리드 부분 구조 모드 합성법은 다음과 같다.

먼저 식 (19)에서 변위 u를 Craig-Bampton 부분 모드 합성법을 통해 얻어진 변환 행렬 T를 이용해 표현한다.

$$u=T\bar{u} \quad (28)$$

여기서 변환 행렬 T는 각 부분 구조물에 대해 얻어진 변환 행렬 $T^{(s)}$들을 대각 형태로 취하는 행렬이다.

각각의 부분 구조물의 질량행렬, 강성행렬, 외력, 연결 출력 행렬에 대해 변환 행렬을 적용한 후 함께 모으면, 전체 구조물의 운동방정식을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \bar{M} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{\bar{u}} \\ \ddot{\lambda} \\ \ddot{u}_b \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} \bar{K} & \bar{C}^T & 0 \\ \bar{C} & 0 & -C_bB_b \\ 0 & -(C_bB_b)^T & 0 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \lambda \\ u_b \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \bar{f} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (29)$$

여기서 $\bar{M}$, $\bar{K}$는 각각의 부분 구조물에 대해서 변환 행렬을 사용해서 축약된 질량행렬, 강성행렬을 대각 형태로 취하는 전체 구조물의 질량, 강성 행렬이고, $\bar{C}$는 $C^{(s)}T^{(s)}$를 대각 형태로 취하는 전체 구조물의 연결 출력 행렬이다.

동적 강성 행렬은 다음과 같다.

$$\bar{D}(\bar{\omega}_r)=\bar{H}^{-1}(\bar{\omega}_r)=\bar{K}-\bar{\omega}_r^2\bar{M} \quad (30)$$

2.2절에서 설명된 절차를 동일하게 사용해서 외력이 없는 경우, 부분 구조 모드 합성법으로 축약된 전체 구조물의 고유 진동수 $\bar{w}_r$은 식 (24)의 행렬식 탐색을 이용해서 얻어지고, 식 (25)에서 u_b를, 식 (26)에서 λ를 얻을 수 있다. 그리고 전체 구조물의 모드형상은 다음과 같이 얻어진다.

$$u=T\bar{u}=-T\bar{H}\bar{C}^T\lambda \quad (31)$$

참고로 각각의 부분 구조물의 변환 행렬을 구할 때 Craig-Bampton 방법 이외에 다른 부분 구조 모드 합성법을 이용해서도 유사한 형태의 축약된 전체 구조물의 운동 방정식을 구성할 수 있다.

3. 유전 전략 최적화 기법

유전 전략 최적화 기법(ESs)은 확률론적 최적화 방법으로써 생태계의 자연 진화론에 근거해서 개체들 간의 경쟁을 통해 최적화 과정을 수행하게 된다. 여기서 개체는 설계변수와 변형 매개변수들로 구성이 된다.

현재까지 연구된 유전 전략 최적화 기법은 크게 (μ,λ)-ESs와 $(\mu+\lambda)$-ESs 의 두 가지 형태로 나눠진다. (μ,λ)-ESs는 μ개의 부모 개체(Parent population)가 재조합(Recombination) 및 변형(Mutation) 과정을 통해 λ개의 자손 개체(Offspring population)를 매 세대별 생성하여 λ개의 자손 개체 중 우수한 μ개의 자손 개체를 선택하여 다음 세대의 부모 개체로서 선택한다. 따라서 그 세대에서 가장 우수한 자손 개체(Elite offspring population)의 생존 기간은 하나의 세대에 한한다. 여기서 $\lambda>\mu\geq1$이고, 이 방법은 변수에 잡음(noise)이 존재할 경우에 우수한 성능을 나타내는 것으로 알려져 있다. 반면에 $(\mu+\lambda)$-ESs는 특정 세대에서 μ개의 부모 개체에 대한 재조합 및 변형을 통해 λ개의 자손 개체를 얻고, 부모 개체와 자손 개체가 함께 우열이 매겨져 그 중에서 우수한 μ개의 개체를 다음 세대의 부모 개체로 선정한다. 재조합 및 변형 연산자 중 유전 전략에서는 변형 연산자가 주가 된다.

변형 연산자를 계산하는 방법에 따라서 고전 유전 전략, 신속 유전 전략, 강건 유전 전략 기법으로 분류할 수 있다.

고전 유전 전략 최적화 기법의 절차는 다음과 같다.

1. μ개의 초기 부모 개체를 생성하고 세대수 g = 1로 설정한다. 각각의 개체는 설계변수 x_i와 변형 매개변수 η_i로 구성된 실수 벡터이다. 초기 변형 매개변수는 0보다 큰 값을 가진다.
2. 각각의 개체 (x_i,η_i)의 우열을 평가 함수(Evaluation function) $f(x_i)$ 를 통해 평가한다.
3. 자손 개체를 생성하는데 이용되는 부모 개체 (x_i,η_i) $i=1,\ldots,\mu$를 랜덤하게 선택하고 재조합 및 변형 과정을 통해 λ개의 자손 개체를 생성한다. 여기서 재조합 단계는 생략 가능하다. 각각의 자손 개체는 다음과 같이 계산된다.

(for $i=1\ldots\mu$, $j=1,\ldots,n$ and $k=1,\ldots,\lambda$)

$$\eta'_k(j)=\eta_i(j)\exp\{\tau'N(0,1)+\tau N_j(0,1)\} \quad (32)$$

$$x'_k(j)=x_i(j)+\eta'_k(j)N(0,1) \quad (33)$$

여기서 $x_i(j)$, $x'_k(j)$, $\eta_i(j)$, $\eta'_k(j)$는 각각 x_i, x'_k, η_i, η'_k의 j 번째 요소가 된다. 그리고 n은 전체 설계변수의 개

수를 의미한다.

$N(0,1)$는 평균 0, 표준편차 1인 가우시안 정규분포(Gaussian normal distribution)를 따르는 1차원 랜덤 넘버이고, $N_j(0,1)$는 j 번째 요소의 1차원 랜덤 넘버로서 역시 평균 0, 표준편차 1인 가우시안 정규분포를 따른다. 이 값은 j 값이 바뀜에 따라 매번 다시 계산된다. 인자 τ와 τ'은 통상적으로 각각 $(\sqrt{2\sqrt{n}})^{-1}$, $(\sqrt{2n})^{-1}$ 로 설정한다. 여기서 $\eta'_k(j)$가 하한치 ε_{lower}보다 작은 경우 $\eta'_k = \varepsilon_{lower}$로 설정하고, 상한치 ε_{upper}보다 큰 경우에는 $\eta'_k = \varepsilon_{upper}$로 설정한다.

4. 각각의 자손 개체를 평가 함수(Evaluation function)를 이용해 평가한다 ($f(x'_i)$).

5. (μ,λ)-ESs의 경우, λ개의 자손 개체의 평가치를 우열을 매긴 후에 우수한 μ개의 자손 개체를 다음 세대의 부모 개체로 선정한다. $(\mu+\lambda)$-ESs의 경우에는 μ개의 부모 개체의 평가치와 λ개의 자손 개체의 평가치를 모두 함께 우열을 매겨 우수한 μ개의 개체를 다음 세대의 부모 개체로 선정한다.

6. 설정된 진화 정지 조건을 만족하면, 연산을 중지하고 최적화된 설계변수와 최적 평가치를 출력한다. 그렇지 않으면 세대수를 증가(g = g+1)시켜서 3의 단계로 간다.

Yao와 Liu[12]는 가우시안 정규분포 대신에 코시 분포(Cauchy distribution)를 식 (32)에 대체해서 사용하는 방법을 제안하였다. 코시 변형 (Caucy mutation)은 다음과 같은 코시 분포 함수를 사용한다.

$$F_t(x) = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{\pi}\right)\arctan\left(\frac{x}{t}\right) \qquad (34)$$

여기서 t = 1이다. 고전 유전 전략 기법에 비해 신속 유전 전략 기법이 가지는 장점은 1) 진화 중 국소 최소해에서 벗어날 확률이 크고, 2) 수렴이 빠르다는 점이다.

Ohkura[13]는 기존 유전 전략 기법에서 존재하는, 하한치 ε_{lower} 값에 따라 수렴된 최적해가 영향을 받는 문제점을 해결하기 위해 하한치에 영향을 받지 않고, 변형 매개변수 η의 자가 적응력(Self adaptation)을 높이는 강건 유전 전략 기법을 제안하였다. 다른 두 유전 전략 기법에서는 설계 변수 한 개당 한 개의 변형 매개변수를 가지는 반면, 강건 유전 전략 기법에서는 설계 변수 한 개당 $m(\geq 1)$개의 변형 매개변수를 가진다. 따라서 각각의 개체는 다음과 같이 표현된다.

$$x_i = (x_i(j), \{\eta_i(j,p)\}) \qquad (35)$$

여기서 j=1,...,n , p=1,...,m이다.

자손 개체 $x'_k = (x'_k(j), \eta'_k(j,p))$는 다음과 같이 계산된다. 다른 두 방법과 마찬가지로 모든 변형 매개변수는 $\eta'_k(j,p)$로 먼저 변형된 후, $x'_k(j)$는 다음 식에 의해 구해진다.

$$x'_k(j) = x_i(j) + \eta'_k(j,1)\delta_j \qquad (36)$$

여기서 δ_j는 j 번째 설계변수의 변형을 위한 랜덤 넘버로써 코시 분포를 따른다. 여기서 $\eta_i(j,1)$는 활성(Active) 변형 매개변수이고, $\eta_i(j,p)$, p=2,...,m은 비활성(Inactive) 변형 매개변수가 된다. 변형된 변형 매개변수 $\eta'_k(j,p)$는 $\eta_i(j,p)$, p=1,...,m에 다음의 세 가지 연산자 중 확률적으로 하나를 선택하여 $\eta_i(j,p)$에 적용한 후 얻어지는 $\tilde{\eta}_i(j,p)$에 D(식 (32))를 적용하여 얻어진다.

1. O_1 : Duplication operator

$$\begin{aligned} &\tilde{\eta}_i(j,1) = \eta_i(j,1) \\ &\text{for } p = 2,\ldots,m \\ &\quad \tilde{\eta}_i(j,p) = \eta_i(j,p-1) \\ &\text{for } p = 1,\ldots,m \\ &\quad \eta'_k(j,p) = D(\tilde{\eta}_i(j,p)) \end{aligned} \qquad (37)$$

2. O_2 : Deletion operator

$$\begin{aligned} &\text{for } p = 1,\ldots,m-1 \\ &\quad \tilde{\eta}_i(j,p) = \eta_i(j,p+1) \\ &\tilde{\eta}_i(j,m) = \min\left(\eta_{\max}, \sum_{p=1}^{m-1} \tilde{\eta}_i(j,p)\right) \\ &\text{for } p = 1,\ldots,m \\ &\quad \eta'_k(j,p) = D(\tilde{\eta}_i(j,p)) \end{aligned} \qquad (38)$$

3. O_3 : Inversion operator

$$\begin{aligned} &p = random(2,\ldots,m) \\ &\tilde{\eta}_i(j,1) = \eta_i(j,p) \\ &\tilde{\eta}_i(j,p) = \eta_i(j,1) \\ &\eta'_k(j,1) = D(\tilde{\eta}_i(j,1)) \\ &\eta'_k(j,p) = D(\tilde{\eta}_i(j,p)) \end{aligned} \qquad (39)$$

일반적으로 각각의 연산자가 선택될 확률은 (0.6,0.3,0.1)로 설정하게 된다.

4. 모의 실험 1 : 하이브리드 부분 구조 모드 합성법의 검증 및 성능 평가

그림 2는 한쪽 면이 고정(Clamped) 지지된 평판 구조물에 빔 보강재를 붙였을 경우로 빔과 평판 사이에 노드 불일치 문제가 발생하고 있다.

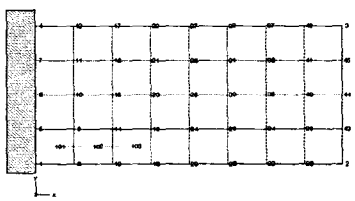

Figure 2. Clamped plate with attached beam stiffener

평판의 x방향 길이는 0.8m, y방향 길이는 0.4m, 두께는 3mm이고, 빔의 길이는 0.2m, 단면은 한 변의 길이가 1cm인 정사각형이다. 평판과 빔 모두 영계수 200GPa, 포아송비 0.3, 밀도 7800 Kg/m^3이다. 빔은 왼쪽 끝의 좌표가

x=0.05, y=0.05이고 회전각도는 0°이다. 평판과 빔의 유한요소모델은 MATLAB의 Structural Dynamics Toolbox Ver. 4.1[14]을 사용하여 구성하였다.

빔 보강재가 없이 구한 평판의 고유 진동수는 그림 3과 같다. 하이브리드 부분 구조 모드 해석법을 적용할 때 평판의 고정 경계 모드(Fixed interface mode)는 20 번째 모드까지 구하였고, 빔의 경우에는 평판에 비해 상대적으로 자유도가 적은 편이므로 축약하지 않은 상태로 두었다(T=I). 구해진 고정 경계 모드들 중에서 변환 행렬 구성 시 포함 될 모드의 개수를 결정하는 절단 주파수(Cut-off frequency) f_{max}를 100, 200, 400 Hz 세 경우로 나누어 원래 축약되지 않은 운동 방정식(식 17)에 의해 구해진 고유 진동수와 부분 구조 모드 합성법을 적용하여 축약된 운동 방정식(식 29)에 의해 구해진 고유 진동수(*)를 표 1에 비교하여 나타내었다.

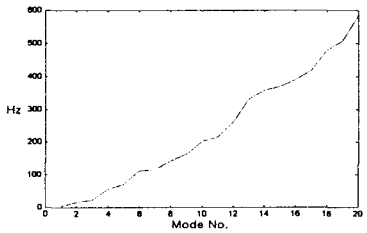

Figure 3. Eigen frequencies of plate without beam stiffener

표 1을 통해 알 수 있듯이 본 연구에서 제안된 하이브리드 부분 구조 모드 합성법에 의해 얻어진 고유 진동수가 부분 구조 모드 합성법을 적용하지 않은 원래 전체 구조물의 고유 진동수와 거의 비슷하게 나왔다. 그리고 일반적으로 알려진 부분 구조 모드 합성법의 특성인 절단 주파수가 높아짐에 따라 포함되어지는 고정 경계 모드의 수가 증가함으로써 점점 더 원래 구조물의 고유진동수에 근접에 가는 것을 확인 할 수 있었다. 부분 구조물의 합성 및 재해석에 소요되는 계산 시간 면에 있어서도 하이브리드 부분 구조 모드 합성법을 적용한 경우가 훨씬 적은 시간이 소요됨을 시뮬레이션을 통해서 확인할 수 있었고, 하이브리드 부분 구조 모드합성법을 사용했을 경우의 계산 효율은 구조물의 자유도가 증가함에 따라 함께 증가됨을 알 수 있었다.

5. 모의 실험 2 : 하이브리드 부분 구조 모드 합성법 및 강건 유전 전략 기법을 이용한 동특성 변경

모의 실험 1에서 검증된 하이브리드 부분 구조 모드 합성법과 강건 유전 전략 최적화 기법을 사용하여 그림 4와 같이 세 모서리가 고정 지지된 평판 기저 구조물에 대해 빔

Table 1. Eigen frequencies of plate with beam stiffener (* : by Hybrid CMS)

Mode	f_{max} = 100 Hz	f_{max} = 200 Hz	f_{max} = 400 Hz
1	4.1625	4.1625	4.1625
	4.1632*	4.1625*	4.1625*
2	17.8236	17.8236	17.8236
	17.8408*	17.8320*	17.8251*
3	22.4369	22.4369	22.4369
	26.4019*	24.3588*	24.3310*

보강재를 이용해서 전체 구조물(평판+보강빔)의 첫 번째 고유 진동수를 극대화하는 모의 실험을 수행하였다. 평판 및 보강빔의 물성치는 모의 실험 1과 같고, 평판은 한 변의 길이가 0.8m인 정사각형 평판이며, 두께는 3mm이다. 본 예제에서 선정한 설계변수는 빔 보강재의 한쪽 끝단의 위치 (x, y)와 길이 l, 한쪽 끝단 (x, y)을 중심으로 절대 좌표계의 +x축에서부터의 빔의 회전 각도 θ이다. 따라서 보강빔 1개 당 4개의 설계변수를 가지고, 보강빔이 2개일 경우는 총 8개의 설계변수를 가지게 된다. 하이브리드 부분 구조 모드 합성법 적용 시에, 평판의 고정 경계 모드는 20번째 모드(240Hz)까지 구하였고, 절단 주파수 f_{max}는 200Hz로 설정하였다. 최적화는 강건 유전 전략 기법을 사용하였고, $(\mu+\lambda)$-ESs을 사용하여 가장 우수한 개체가 계속 살아남을 수 있도록 하였다. 초기 개체(Initial population)는 보강빔이 평판의 영역 내에 위치하도록 랜덤하게 구하였고, 보강빔이 1개일 경우에는 $\mu=4, \lambda=8$로, 보강빔이 2개일 경우에는 $\mu=8, \lambda=8$로 두었다. 한 개의 설계변수 당 6개의 변형 매개변수를 선정하였고, 모든 변형 매개변수의 초기값은 0.1, 하한치는 10^{-4}, 상한치는 2로 설정하였다.

빔의 길이 변화에 따른 빔 모델 시 빔의 절점들 간의 거리는 0.1m에 근접하게 설정하여 절점 수가 길이에 비례하게끔 하였다. 모든 예제에 있어서, 사용 가능한 보강빔의 최대 길이는 평판의 대각선 길이가 되도록 하였고, 보강빔은 평판 구조물의 영역 내에서 움직이도록 구속조건을 가하였다. 최대 길이 구속 조건을 부가한 이유는 보강빔이 1개일 경우, 빔이 취할 수 있는 최대 길이가 존재하기 때문이다.

평판 기저 구조물에 대한 모드 해석 결과, 평판의 첫 번째 고유 진동수는 6.213Hz로 나왔다. 보강빔을 1개 사용했을 경우의 최적화 결과는 그림 5와 같이 빔의 한쪽 끝단이 모서리(Node 3)에 닿으면서 다른 쪽 끝단은 경계 조건이 부가되지 않은 모서리(Node 2) 쪽으로 향해 놓여졌다. 이

때의 전체 구조물의 첫 번째 고유 진동수는 10.205Hz로 64.25%의 고유 진동수 상승 효과가 있었다. 세대수(Generation)가 지남에 따른 첫 번째 고유 진동수 및 빔의 길이 변화(Elite population)는 그림 6, 7과 같다.

보강빔을 두 개로 하였을 경우의 최적화 결과는 그림 8과 같이 두 개의 빔이 서로 떨어진 상태로 각각 모서리(Node 1, 3)에 빔의 한쪽 끝단이 닿으면서 다른 쪽 끝단이 경계조건이 부가되지 않은 모서리(Node 2) 쪽을 향해 놓여졌다. 전체 구조물의 첫 번째 고유 진동수는 13.8582Hz로서 123.05%의 고유 진동수 상승 효과가 나타났다. 세대수(Generation)가 지남에 따른 첫 번째 고유 진동수 및 두 빔의 길이 변화(Elite population)는 그림 9, 10과 같다. 본 예제에서 고려된 구조물의 경우에, 최적화 중 사용 가능한 빔 최대길이 구속조건 ($\leq 0.8*\sqrt{2}$)을 동일하게 부가할 경우, 보강빔을 두 개 사용하는 것이 첫 번째 고유 진동수 향상에 더 효과적임을 알 수 있었다.

첫 번째 모드에서, 보강빔을 사용한 구조 변경 전후의 평판 기저 구조물에 걸리는 스트레인 에너지(Strain energy)분포는 그림 11,12,13과 같다. 구조 변경 전의 경우(그림 11), 경계 조건이 가해진 두 모서리(Node 1, 3)에서 경계 조건이 부가되지 않은 모서리(Node 2)로 가는 방향에 놓인 평판 요소들에 큰 스트레인이 걸리는 것을 알 수 있다. 그리고 큰 스트레인이 걸리는 평판 요소들이 위치하는 영역이 두 부분으로 나눠져 있는 점을 고려 할 때 보강빔을 이용해서 구조 변경할 경우, 보강빔 2개를 사용하는 것이 1개를 사용하는 것보다 더 효과적일 것임을 구조 변경 전의 기저 구조물의 스트레인 에너지 분포를 통해서 미리 알 수 있다. 보강빔을 1개 사용하였을 경우(그림12), 보강빔이 위치한 모서리(Node 3) 부근에 걸리는 스트레인이 상당히 줄어든 반면, 다른 모서리(Node 1) 부근에는 여전히 스트레인이 크게 걸림을 알 수 있다. 보강빔을 2개를 사용하였을 경우, 두 빔이 각각 큰 스트레인이 걸리는 영역에 위치함으로써 전반적으로 스트레인이 크게 걸리는 영역이 없어졌음을 알 수 있다. 따라서 스트레인이 크게 걸리는 영역을 구조 변경 전에 찾은 후, 최적화 시에 빔이 놓일 수 있는 영역을 스트레인이 크게 걸리는 영역으로 좁힌다면, 보다 효율적으로 구조 변경 최적화를 수행할 수 있을 것이다.

6. 결론

본 연구에서는 국부 라그랑지 승수를 이용해서 비부합 문제를 해결하며 부분 구조물들에 대해 Craig-Bampton 부분 구조 모드 합성법을 적용하여 재해석 시 계산효율을 높이는 하이브리드 부분 구조 모드 합성법(Hybrid CMS using a localized lagrange multiplier)을 제안하였고, 모의 실험을 통해 타당성 및 유용성을 검증하였다.

적용 예제로서 평판 기저 구조물의 첫 번째 고유 진동수를 높이기 위해 빔 보강재를 이용해서 동특성 구조 변경을 수행하였다. 최적화 기법으로 강건 유전 전략을 사용하여 설계변수인 빔 보강재의 위치 및 길이의 최적화된 결과를 얻을 수 있었으며, 평판 기저 구조물에 걸리는 스트레인 에너지 분포를 고려해서, 최적화로 얻어진 해의 타당성을 검증하였다.

후 기

본 연구는 국가지정연구사업 "진동 저감을 위한 동특성 변경기술(M1-0001-00-0139)"의 지원에 의한 것입니다.

참 고 문 헌

(1) Hurty, W. C., 1965, "Dynamic Analysis of Structural Systems Using Component Modes", AIAA Journal, Vol.3, No.4, pp. 678~685

(2) Craig, R. R., Bampton, M. C. C., 1968, "Coupling of Substructures for Dynamic Analyses", AIAA Journal, Vol. 6, No. 7, pp. 1313~1319

(3) Seshu, P., 1997, "Substructuring and Component Mode Synthesis", Shock and Vibration : Review", Vol. 4, No. 3, pp. 119~210

(4) Farhat, C., Geradin., M., 1992, "On A Component Mode Synthesis Method and Its Application to Incompatible Substructures", Computers & Structures, Vol. 51, No. 5, pp. 459~473

(5) Park, K. C., Felippa, C. A., 1998, "A Variational Framework for Solution Method Developments in Structural Mechanics", Journal of Applied Mechanics , Transactions of the ASME, Vol. 65, pp. 242~249

(6) Park, K. C., Felippa, C. A., 2000, "A Variational Principle for The Formulation of Partitioned Structural Systems", International Journal For Numerical Methods in Engineering, Vol. 47, pp. 395~418

(7) Park, K. C., Felippa, C. A., Gusmaste, U. A., 2000, "A Localized Version of The Method of Lagrange Multipliers and Its Applications", Computational Mechanics, Vol. 24, pp. 476~490

(8) Quiroz, L., Beckers, P., 1995, "Non-Conforming Mesh Gluing in The Finite Elements Methods", International Journal For Numerical Methods in Engineering, Vol. 38, pp. 2165~2184

(9) 정의일, 박윤식, 2001, "비부합 절점으로 이루어진 구조물의 합성과 재해석", 한국소음진동공학회 추계학술대회 논문집, pp. 155~160

(10) 정의일, 박윤식, 2002, "비부합 결합을 이용한 구조물

변경법", 한국소음진동공학회 춘계학술대회 논문집
(11) Back, T., 1996, Evolution Algorithms in Theory and Practice, Oxford University Press
(12) Yao, X., Liu, Y., 1997, "Fast evolution strategies", Control and Cybernetics", Vol. 26, No. 3, pp. 467~496
(13) Ohkura, K., Matsumura, Y., Ueda, K., 2001, "Robust Evolution Strategies", Applied Intelligence, Vol. 15, pp. 153~169
(14) Balmes, 2001, Structural Dynamics Toolbox : User's Guide Version 4.1

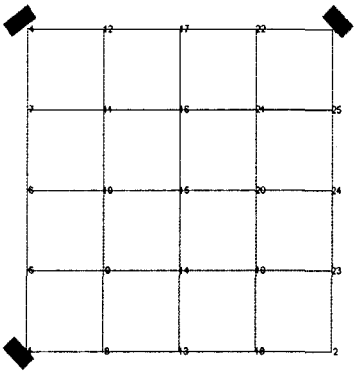

Figure 4. A plate structure fixed at three corners (Node 1, 3, 4)

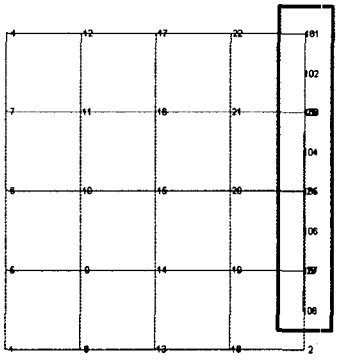

Figure 5. Optimized result using one beam stiffener

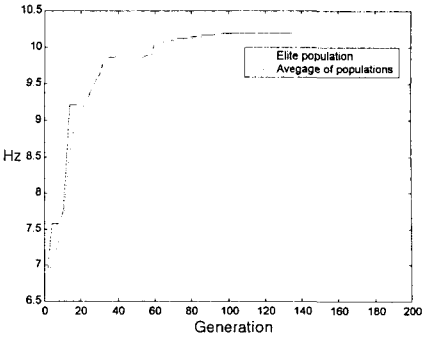

Figure 6. Variation of natural frequency during generation progress

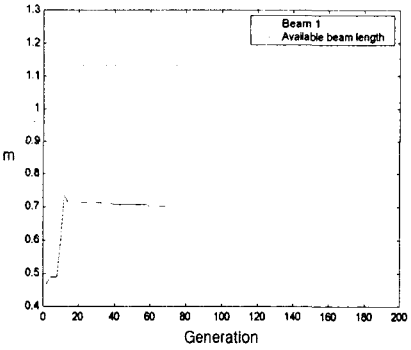

Figure 7. Variation of beam stiffener length during generation progress (Elite population)

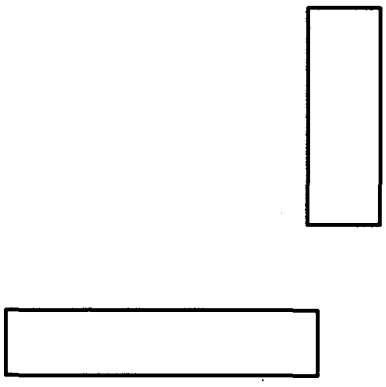

Figure 8. Optimized result using two beam stiffeners

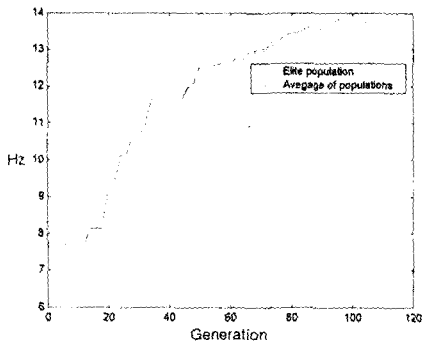

Figure 9. Variation of natural frequency during generation progress

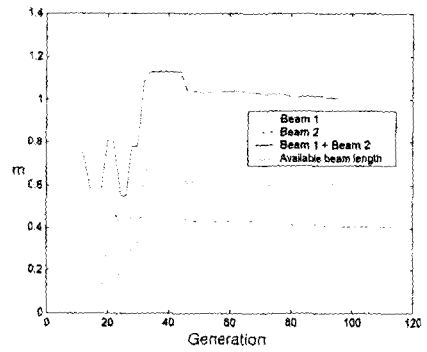

Figure 10. Variation of beam stiffener lengths during generation progress (Elite population)

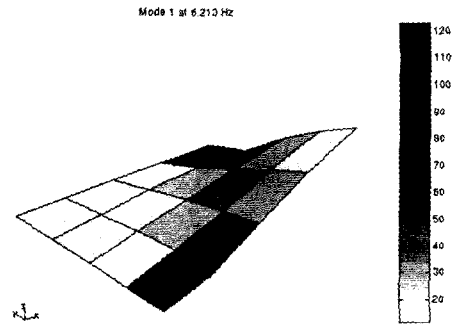

Figure 11. Strain energy of fixed plate (1st mode)

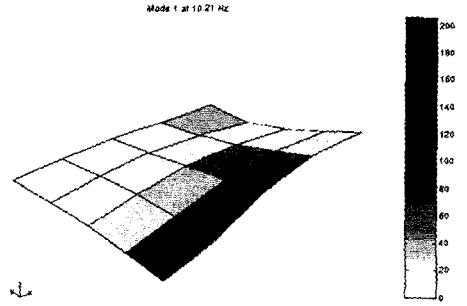

Figure 12. Strain energy of fixed plate with one beam stiffener (1st mode)

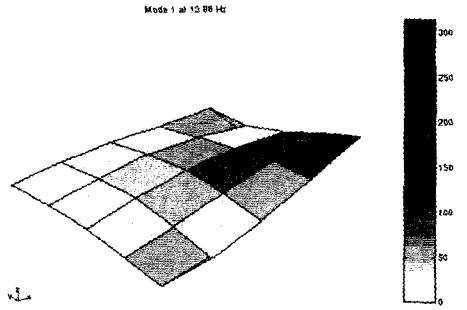

Figure 13. Strain energy of fixed plate with two beam stiffeners (1st mode)