

# 부분근입된 말뚝의 자유진동 특성

○신 성 철\* · 진 태 기\*\* · 오 상 진\*\*\* · 박 광 규\*\*\*\*

## Free Vibration Characteristics of Partially Embedded Piles

Seong Cheol Shin, Tae Ki Jin, Sang Jin Oh, and Kwang Kyou Park

### ABSTRACT

The free vibration of partially embedded piles is investigated. The pile model is based on the Bernoulli-Euler beam theory and the soil is idealized as a Winkler model for mathematical simplicity. The governing differential equation for the free vibrations of such members is solved numerically. The piles with one typical end constraint (clamped/hinged/free) and the other hinged end with rotational spring are applied in numerical examples. The lowest three natural frequencies are calculated over a range of non-dimensional system parameters: the rotational spring parameter, the relative stiffness and the embedded ratio.

### 1. 서 론

지반 위에 놓인 구조물의 정, 동적거동에 관한 연구는 구조 및 기초공학분야에서 중요한 연구과제로서 이에 대한 많은 연구<sup>(1-10)</sup>가 이루어져 왔다. 지반과 구조물의 상호거동 해석을 위해서는 지반특성을 표현할 수 있는 지반모형의 개발이 이루어져야 한다. 그러나 지반은 성질이 다양하고 복잡하여 정확한 수학적 모형을 얻기 어려우므로 지반과 구조물의 상호거동을 규명하는 것은 매우 어려운 문제이다. 이러한 문제를 해결하기 위하여 Winkler, Hentenyi, Pasternak, Vlazov, Kerr 등은 지반특성을 설명하기 위한 수학적 모형을 제시하였다<sup>(11)</sup>. 하지만 지반과 구조물의 상호거동 해석을 위한 많은 연구들에서 채택하고 있는 모형은 지반을 무한개의 스프링으로 구성되었다고 가정하는 Winkler모형이다.

말뚝은 축을 통해 상부하중을 수직으로 분배시키거나 선단을 통해 지지층에 하중을 직접 전달시키기 위하여 사용될 뿐만 아니라 때로는 사면활동을 방지하기 위한 목적 등에도 이용되고 있다. 이와 같은 목적에 이용되는 말뚝은 지반에 전근입(fully embedded) 또는 부분근입(partially embedded)상태에 있기 때문에 일반적인 기둥문제에서와는 달리 말뚝의 강성과 주변의 지반특성을 고려한 해석결과가 필요하다.

본 연구는 부분근입된 말뚝의 자유진동 특성을 규명하는데 연구목적이 있다. 본 논문에서 말뚝이 근입된 지반은 수학적 모형의 단순화를 위하여 Winkler모형으로 이상화하였으며, 말뚝 상단은 고정, 회전 및 자유이고 말뚝 하단은 회전스프링으로 이루어진 단부조건을 고려하였다. 수치해석 결과로서 무차원 고유진동수와 상대강성, 근입비 및 회전스프링계수 사이의 관계를 고찰하였으며, 말뚝 상단의 단부조건에 따른 영향을 분석하였다.

### 2. 수학적 모형

Fig. 1 (a)는 지반에 부분근입된 지간길이  $l$ 인 말뚝을 나타낸 것이며, Fig. 1 (b)는 지반을 Winkler가

\* 원광대학교 환경건설연구소

\*\* (주) 제일건설

\*\*\* 정희원, 담양대학 토목과

\*\*\*\* 정희원, 대전대학교 토목공학과

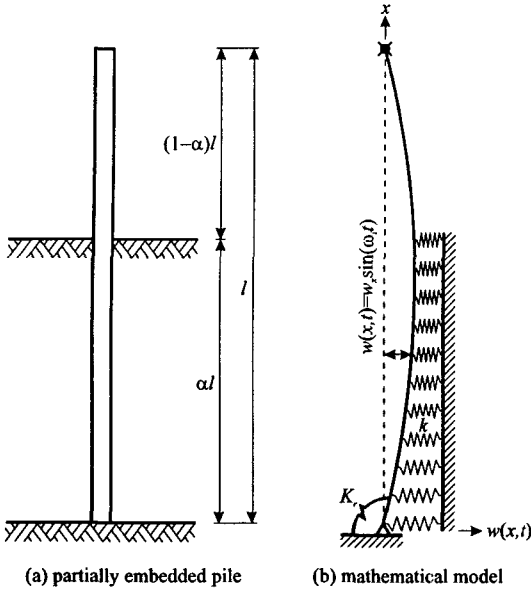


Fig. 1 Partially embedded piles and mathematical model.

제한한 탄성스프링으로 모형화한 것이다. 이 그림에서  $\alpha$ 는 말뚝의 근입정도를 나타내는 근입비(embedded ratio),  $k$ 는 지반탄성계수이며,  $K_r$ 은 회전스프링상수이다. 그리고  $w(x, t)$ 는 부재축상 임의점에서의 진동변위를 나타낸다.

Bernoulli-Euler 보이론에 의한 말뚝의 자유진동을 지배하는 편미분방정식은 다음 식과 같다<sup>(12)</sup>.

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + kw = 0, \quad 0 \leq x \leq \alpha l \quad (1)$$

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad \alpha l \leq x \leq l \quad (2)$$

식(1), (2)에서  $EI$ 는 말뚝의 휨강성이며,  $m$ 은 말뚝 재료의 단위길이당 질량이다.

말뚝이 조화진동을 한다고 가정하면 이에 대한 조화진동식은 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$w(x, t) = w_x \sin(\omega_i t) \quad (3)$$

식(3)에서  $w_x$ 는 조화진동의 진폭으로  $x$ 만의 함수이고,  $\omega_i$ 는 고유각진동수(rad/s),  $i$ 는 모드번호,  $t$ 는 시간이다.

지배방정식을 무차원형으로 나타내기 위하여 말뚝 축상 임의점의 좌표  $x$  및  $x$ 위치에서의 진폭  $w_x$ 를 시간길이  $l$ 로 정규화하면 식(4), (5)와 같다.

$$\xi = x/l, \quad \eta = w_x/l \quad (4,5)$$

식(3)으로부터  $\partial^4 w/\partial x^4$  및  $\partial^2 w/\partial t^2$ 를 구하여 식(1), (2)에 대입하고, 식(4), (5)의 무차원 변수들을 이용하여 나타내면 다음 식과 같이 표현된다.

$$\frac{d^4 \eta}{d\xi^4} = (C_i - \varepsilon) \eta, \quad 0 \leq \xi \leq \alpha \quad (6)$$

$$\frac{d^4 \eta}{d\xi^4} = C_i \eta, \quad \alpha \leq \xi \leq 1 \quad (7)$$

식(6)과 (7)에서  $C_i$ 는 무차원 고유진동수(frequency parameter)로서 그 내용은 식(8)과 같다. 또한  $\varepsilon$ 은 상대강성(relative stiffness)으로서 식(9)와 같다.

$$C_i = \omega_i^2 l^4 (m/EI), \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (8)$$

$$\varepsilon = kl^4/EI \quad (9)$$

이상에서 식(6)과 (7)은 부분근입된 말뚝의 자유진동을 지배하는 상미분방정식이며, 본 연구에서 택한 단부조건에 대한 경계조건식은 다음과 같다.

먼저 말뚝 하단( $x=0$ )에서 진동변위는 발생하지 않으며, 휨모멘트  $EI d^2 w_x/dx^2 = K_r dw_x/dx$ 이므로 다음과 같이 경계조건식을 나타낼 수 있다.

$$\eta = 0, \quad d^2 \eta/d\xi^2 - k_r d\eta/d\xi = 0, \quad \xi = 0 \text{에서} \quad (10)$$

식(10)에서  $k_r$ 은 식(11)로 표현되는 회전스프링계수(rotational spring parameter)이다.

$$k_r = K_r l/EI \quad (11)$$

그리고 말뚝 상단( $x=l$ )의 단부조건으로 고려하는 고정, 회전 및 자유단에서의 경계조건식은 각각 식(12), (13) 및 (14)와 같다.

$$\eta = 0, \quad d\eta/d\xi = 0, \quad \xi = 1 \text{에서} \quad (12)$$

$$\eta = 0, \quad d^2 \eta/d\xi^2 = 0, \quad \xi = 1 \text{에서} \quad (13)$$

$$d^2 \eta/d\xi^2 = 0, \quad d^3 \eta/d\xi^3 = 0, \quad \xi = 1 \text{에서} \quad (14)$$

### 3. 수치해석방법 및 해석예

본 연구에서는 식(6), (7)의 지배 미분방정식을 수치해석하여 대상구조의 고유진동수를 산출하였으며, 해석과정을 간단히 정리하면 다음과 같다. 식(6)과 (7)의 미분방정식에는 미지의 불확정량인 무차원 고유진동수  $C_i$ 항이 포함되어 있으므로 먼저  $C_i$ 값을 가정하여 미분방정식에 대입한 후에 말뚝하단( $\xi=0$ )

에서의 경계조건을 이용하여 미분방정식의 수치적분을 시행한다. 가정한  $C_i$  값이 대상구조의 자유진동에 대한 고유치인지는 말뚝상단 ( $\xi=1$ )에서의 경계조건 만족여부로 판단하며, 이 과정에서 행렬값 탐사법을 이용한다. 본 연구에서 미분방정식의 수치적분은 정도가 높아 공학문제에 많이 이용되는 Runge-Kutta method를 이용하였으며, 행렬값 탐사법의 적용과정에서 고유치  $C_i$  값을 찾기 위해서는 Regula-Falsi method를 이용하였다. 본 연구에서는 이상의 수치해석방법을 이용하여 상대강성  $\epsilon$ , 근입비  $\alpha$ , 말뚝 하단의 회전스프링계수  $k_r$  및 말뚝 상단의 단부조건에 따른 최저차 3개의 무차원 고유진동수를 산출하였다.

Table 1은 말뚝이 근입되지 않은 경우 즉  $\alpha=0$ 인 경우 말뚝 하단의 회전스프링계수  $k_r$ 의 변화에 따른 무차원 고유진동수  $C_{0i}$ 를 나타낸 것이다. 여기서  $k_r=10^8$ 인 경우 말뚝하단은 고정단으로 변환됨을 의미한다. 그러므로 이 표에서 상단의 단부조건이 고정, 회전, 자유인 말뚝은 고정-고정, 고정-회전, 고정-자유의 단부조건을 갖는 말뚝으로 변환된다. 이 표에서  $k_r=10^8$ 인 경우 무차원 고유진동수는 문헌들에서의 고정-고정, 고정-회전, 고정-자유에 대한 결과와 거의 일치함을 알 수 있다. 또한 Table 1에서 괄호안의 값은 문헌 [13]의 결과를 나타낸 것으로 본 연구결과와 거의 일치함을 알 수 있다.

Table 2~4는 각각 말뚝 상단의 단부조건이 고정, 회전 및 자유인 경우 회전스프링계수  $k_r$ , 상대강성  $\epsilon$ , 근입비  $\alpha$ 에 따른 무차원 고유진동수비  $C_i/C_{0i}$ 를 나타낸 것이다. 여기서  $C_i$ 는 표에 나타낸 각각의 조건들에 대응되는 제변수를 갖는 말뚝의 무차원 고유진동수를 의미하며,  $C_{0i}$ 는 말뚝이 근입되지 않은 경우에 대한 무차원 고유진동수로서 Table 1에 나타낸 값이다.

본 연구에서 회전스프링계수  $k_r$ 은 1, 10, 100, 1000 및  $10^8$ , 상대강성  $\epsilon$ 은 5, 500 및 2000을 고려하였다. 본 연구에서 택한 상대강성  $\epsilon=5$ 는 강성말뚝(rigid pile),  $\epsilon=500$ 은 반강성말뚝(semi-rigid pile),  $\epsilon=2000$ 은 연성말뚝(flexible pile)에 해당된다<sup>(6)</sup>. 또한 근입비  $\alpha$ 는 0, 0.25, 0.50, 0.75 및 1.0에 대하여 해석하였으며, 여기서  $\alpha=0.0$ 인 경우는 말뚝이 근입되지 않은 경우,  $\alpha=1.0$ 인 경우는 말뚝이 전근입(fully embedded) 상태인 경우를 의미한다.

Table 1 Frequency parameter for pile with  $\alpha=0$

End condition at the top	$k_r$	Frequency parameter, $C_{0i}$		
		$i=1$	$i=2$	$i=3$
Clamped	1	4.0418 (4.0418)*	7.1338 (7.1340)	10.257 (10.257)
	10	4.4303 (4.4303)	7.4499 (7.4499)	10.522 (10.522)
	100	4.6853 (4.6853)	7.7811 (7.7811)	10.900 (10.898)
	1000	4.7253 ( - )	7.8454 ( - )	10.985 ( - )
	$10^8$	4.7300 (4.7300)	7.8533 (7.8532)	10.994 (10.996)
	Hinged	1	3.2733	6.3560
10		3.6646	6.6874	9.7516
100		3.8892	7.0032	10.119
1000		3.9227	7.0616	10.200
$10^8$		3.9266	7.0686	10.211
Free	1	1.2479	4.0311	7.1341
	10	1.7227	4.3995	7.4511
	100	1.8568	4.6497	7.7827
	1000	1.8732	4.6894	7.8470
	$10^8$	1.8751	4.6941	7.8548

\* Values in parentheses are obtained by Li<sup>(13)</sup>.

Table 2~4에서 무차원 고유진동수비가 항상 "1"이 상임을 알 수 있어 회전스프링계수  $k_r$ , 상대강성  $\epsilon$  및 근입비  $\alpha$ 가 증가하는 경우 무차원 고유진동수는 항상 증가함을 알 수 있다.

Table 2~4에서 상대강성  $\epsilon$  및 근입비  $\alpha$ 가 클수록 무차원 고유진동수비가 크며, 회전스프링계수  $k_r$ 이 클수록 무차원 고유진동수비가 작음을 알 수 있다. 또한 저차모드일수록 무차원 고유진동수비가 크음을 알 수 있다.

Table 2, 3에서 근입비  $\alpha=0.75$ 인 경우 무차원 고유진동수비는 근입비가 1인 경우와 거의 유사함을 알 수 있다. 따라서 말뚝 상단의 단부조건이 고정 또는 회전인 경우 근입비가 0.75이상 즉, 전체 말뚝길이의 75%이상이 근입되면 전근입상태로 취급할 수 있을 것으로 사료된다. 이러한 경향은 회전스프링계수  $k_r$ 이 클수록 그리고 상대강성  $\epsilon$ 이 작을수록 더욱 뚜렷하게 나타나고 있다.

Table 2 Frequency ratio  $C_i/C_{0i}$  for pile with clamped end at the top

$k_r$	$\alpha$	Frequency ratio, $C_i/C_{0i}$								
		$\epsilon = 5$			$\epsilon = 500$			$\epsilon = 2000$		
		$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=1$	$i=2$	$i=3$
1	0.00	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	0.25	1.0006	1.0001	1.0000	1.0513	1.0128	1.0034	1.1466	1.0486	1.0140
	0.50	1.0030	1.0002	1.0001	1.2081	1.0227	1.0060	1.4715	1.0973	1.0234
	0.75	1.0045	1.0004	1.0001	1.2959	1.0391	1.0082	1.6945	1.1348	1.0318
	1.00	1.0047	1.0005	1.0001	1.3020	1.0451	1.0111	1.7072	1.1538	1.0424
10	0.00	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	0.25	1.0002	1.0001	1.0000	1.0240	1.0094	1.0032	1.0759	1.0355	1.0128
	0.50	1.0018	1.0002	1.0001	1.1412	1.0203	1.0053	1.3479	1.0850	1.0210
	0.75	1.0031	1.0003	1.0001	1.2245	1.0327	1.0074	1.5628	1.1152	1.0288
	1.00	1.0032	1.0004	1.0001	1.2312	1.0383	1.0100	1.5774	1.1332	1.0385
100	0.00	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	0.25	1.0001	1.0001	1.0000	1.0121	1.0061	1.0025	1.0414	1.0229	1.0101
	0.50	1.0013	1.0002	1.0000	1.1064	1.0174	1.0045	1.2788	1.0720	1.0175
	0.75	1.0025	1.0003	1.0001	1.1876	1.0272	1.0063	1.4901	1.0974	1.0248
	1.00	1.0026	1.0003	1.0001	1.1948	1.0325	1.0087	1.5065	1.1150	1.0337
1000	0.00	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	0.25	1.0001	1.0001	1.0000	1.0106	1.0055	1.0024	1.0369	1.0207	1.0094
	0.50	1.0012	1.0002	1.0000	1.1015	1.0168	1.0043	1.2687	1.0696	1.0168
	0.75	1.0024	1.0003	1.0001	1.1824	1.0262	1.0061	1.4795	1.0942	1.0240
	1.00	1.0025	1.0003	1.0001	1.1896	1.0315	1.0085	1.4962	1.1118	1.0327
10 <sup>5</sup>	0.00	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	0.25	1.0001	1.0000	1.0000	1.0105	1.0054	1.0027	1.0364	1.0204	1.0098
	0.50	1.0012	1.0002	1.0000	1.1009	1.0167	1.0045	1.2676	1.0693	1.0167
	0.75	1.0024	1.0003	1.0001	1.1818	1.0261	1.0062	1.4783	1.0938	1.0241
	1.00	1.0025	1.0003	1.0001	1.1890	1.0313	1.0085	1.4950	1.1114	1.0329

그러나 말뚝 상단의 단부조건이 자유인 Table 4에서는 근입비가 0.75인 경우에도 전근입상태의 무차원 고유진동수비와는 상당한 차이가 있음을 알 수 있다.

Table 2~4에서 다른 조건이 동일한 경우 말뚝 상단의 단부강성이 작을수록 즉 자유, 회전, 고정 순으로 무차원 고유진동수비가 큼을 알 수 있어, 말뚝 상단에서의 단부강성 평가가 말뚝의 자유진동 특성에 큰 영향을 미침을 알 수 있다.

#### 4. 결론

이 논문은 부분근입된 말뚝의 자유진동 특성에 관한 연구이다. 이 논문에서는 말뚝이 근입된 지반을 Winkler형 지반으로 모형화하여 탄성지반에 근입된 말뚝의 자유진동을 지배하는 상미분방정식을 무차원

형으로 표현하였으며, 이를 수치해석하여 대상구조의 고유진동수를 산출하였다. 수치해석 예에서는 말뚝 상단의 단부조건으로 고정, 회전 및 자유를 고려하였으며, 말뚝 하단은 회전스프링으로 구속된 회전지점으로 모형화하였다.

수치해석 결과로서 회전스프링계수, 상대강성, 근입비 및 말뚝 상단의 단부강성이 무차원 고유진동수에 미치는 영향을 고찰하였다. 회전스프링상수, 상대강성 및 근입비가 증가하는 경우 무차원 고유진동수는 항상 증가하였다.

상대강성 및 근입비가 클수록, 회전스프링계수가 작을수록 무차원 고유진동수비 ( $C_i/C_{0i}$ )가 크며, 저차 모드일수록 무차원 고유진동수비가 큼을 알 수 있다.

말뚝 상단의 단부조건이 고정 또는 회전인 경우 근입비가 0.75이상 즉, 전체 말뚝길이의 75%이상이면

Table 3 Frequency ratio  $C_i/C_{0i}$  for pile with hinged end at the top

$k_r$	$\alpha$	Frequency ratio, $C_i/C_{0i}$								
		$\epsilon=5$			$\epsilon=500$			$\epsilon=2000$		
		$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=1$	$i=2$	$i=3$
1	0.00	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	0.25	1.0009	1.0002	1.0000	1.0707	1.0179	1.0047	1.1852	1.0647	1.0194
	0.50	1.0051	1.0004	1.0001	1.2965	1.0406	1.0076	1.5681	1.1627	1.0298
	0.75	1.0097	1.0006	1.0001	1.4862	1.0530	1.0107	1.9921	1.1800	1.0419
	1.00	1.0107	1.0008	1.0001	1.5212	1.0691	1.0152	2.0717	1.2214	1.0570
10	0.00	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	0.25	1.0003	1.0001	1.0000	1.0287	1.0121	1.0042	1.0868	1.0440	1.0169
	0.50	1.0028	1.0003	1.0001	1.1878	1.0348	1.0067	1.4018	1.1362	1.0265
	0.75	1.0060	1.0005	1.0001	1.3582	1.0436	1.0097	1.7843	1.1520	1.0379
	1.00	1.0069	1.0006	1.0001	1.3937	1.0574	1.0135	1.8647	1.1892	1.0512
100	0.00	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	0.25	1.0002	1.0001	1.0000	1.0138	1.0073	1.0032	1.0459	1.0271	1.0127
	0.50	1.0019	1.0003	1.0000	1.1391	1.0290	1.0056	1.3218	1.1130	1.0221
	0.75	1.0047	1.0004	1.0001	1.2997	1.0359	1.0084	1.6846	1.1284	1.0329
	1.00	1.0054	1.0005	1.0001	1.3360	1.0483	1.0117	1.7667	1.1633	1.0446
1000	0.00	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	0.25	1.0001	1.0001	1.0000	1.0121	1.0065	1.0030	1.0409	1.0243	1.0117
	0.50	1.0018	1.0003	1.0000	1.1326	1.0280	1.0053	1.3107	1.1089	1.0212
	0.75	1.0045	1.0004	1.0001	1.2917	1.0346	1.0081	1.6708	1.1243	1.0319
	1.00	1.0052	1.0005	1.0001	1.3282	1.0469	1.0114	1.7532	1.1590	1.0433
10 <sup>6</sup>	0.00	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	0.25	1.0001	1.0001	1.0000	1.0119	1.0065	1.0029	1.0403	1.0240	1.0116
	0.50	1.0018	1.0003	1.0000	1.1318	1.0278	1.0053	1.3094	1.1085	1.0211
	0.75	1.0045	1.0004	1.0000	1.2908	1.0345	1.0080	1.6692	1.1239	1.0317
	1.00	1.0052	1.0005	1.0001	1.3273	1.0467	1.0114	1.7516	1.1585	1.0431

전근입상태로 취급할 수 있음을 알 수 있었다. 이러한 경향은 회전스프링계수가 클수록 그리고 상대강성이 작을수록 더욱 뚜렷하게 나타났다.

한편 다른 조건이 동일한 경우 말뚝 상단의 단부강성이 작을수록 무차원 고유진동수비가 큼을 알 수 있었다.

### 참 고 문 헌

1. Abbas, B.A. and Thomas, J., 1978, "Dynamic Stability of Timoshenko Beams resting on an Elastic Foundation," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 60, pp.33-44.
2. Nielsen, M.T., 1982, "Resistance of a Soil Layer to Horizontal Vibration of a Pile," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 10, pp.497-510.
3. Pavlovic, M.V. and Wylie, G.B., 1983, "Vibration of Beams on Non-Homogeneous Elastic Foundations," *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 11, pp.797-808.
4. Yankelevsky, D.Z. and Eisenberger, M., 1986, "Analysis of a Beam Column on Elastic Foundation," *Computers & Structures*, Vol. 23, pp.351-356.
5. Matsuda, H. and Sakiyama, T., 1987, "Analysis of Beams on Non-Homogeneous Elastic Foundation," *Computers and Structures*, Vol. 25, pp.941-946.
6. Valsangkar, A.J. and Pradhanang, R., 1987,

Table 4 Frequency ratio  $C_i/C_{0i}$  for pile with free end at the top

$k_r$	$\alpha$	Frequency ratio, $C_i/C_{0i}$								
		$\epsilon=5$			$\epsilon=500$			$\epsilon=2000$		
		$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=1$	$i=2$	$i=3$
1	0.00	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	0.25	1.0060	1.0005	1.0001	1.3035	1.0474	1.0129	1.5318	1.1392	1.0489
	0.50	1.0506	1.0025	1.0002	1.8575	1.1929	1.0230	2.1002	1.4561	1.0983
	0.75	1.1595	1.0032	1.0004	2.6077	1.2682	1.0357	3.1466	1.6760	1.1273
	1.00	1.3217	1.0047	1.0005	3.7888	1.3029	1.0448	5.3530	1.7088	1.1530
10	0.00	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	0.25	1.0006	1.0003	1.0001	1.0510	1.0231	1.0095	1.1299	1.0739	1.0356
	0.50	1.0095	1.0016	1.0002	1.3482	1.1334	1.0205	1.5236	1.3399	1.0858
	0.75	1.0441	1.0024	1.0003	1.8901	1.2044	1.0302	2.2811	1.5498	1.1092
	1.00	1.1184	1.0033	1.0004	2.7527	1.2350	1.0381	3.8800	1.5846	1.1325
100	0.00	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	0.25	1.0002	1.0001	1.0001	1.0205	1.0118	1.0061	1.0623	1.0406	1.0229
	0.50	1.0054	1.0012	1.0002	1.2525	1.1008	1.0176	1.4156	1.2724	1.0726
	0.75	1.0305	1.0019	1.0003	1.7543	1.1694	1.0252	2.1179	1.4769	1.0926
	1.00	1.0912	1.0026	1.0003	2.5575	1.1984	1.0323	3.6008	1.5138	1.1143
1000	0.00	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	0.25	1.0002	1.0001	1.0001	1.0178	1.0104	1.0055	1.0554	1.0362	1.0207
	0.50	1.0051	1.0011	1.0002	1.2418	1.0961	1.0170	1.4035	1.2624	1.0702
	0.75	1.0292	1.0019	1.0002	1.7390	1.1644	1.0244	2.0997	1.4661	1.0896
	1.00	1.0884	1.0026	1.0003	2.5356	1.1932	1.0312	3.5694	1.5034	1.1111
10 <sup>5</sup>	0.00	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
	0.25	1.0002	1.0001	1.0001	1.0175	1.0102	1.0054	1.0546	1.0356	1.0205
	0.50	1.0050	1.0011	1.0002	1.2406	1.0956	1.0169	1.4022	1.2613	1.0699
	0.75	1.0290	1.0019	1.0003	1.7373	1.1638	1.0242	2.0975	1.4648	1.0892
	1.00	1.0881	1.0025	1.0003	2.5331	1.1926	1.0311	3.5658	1.5022	1.1107

"Effect of Foundation Continuity on Free Vibration of Partially Supported Piles," Proceedings of the 5th Canadian Conference on Earthquake Engineering, Ottawa, pp.471-474.

7. Belles, P.M., Maurizi, M.J. and Di Luca, D.H., 1994, "Vibration of Stepped Beams on Non-Uniform Elastic Foundations," Journal of Sound and Vibration, Vol. 169, pp.127-128.

8. Eisenberger, M., 1994, "Vibration Frequencies for Beams on Variable One- and Two-Parameter Elastic Foundations," Journal of Sound and Vibration, Vol. 176, pp.577-584.

9. Farghaly, S.H. and Zeid, K.M., 1995, "An Exact Frequency Equation for an Axially Loaded Beam-Mass-Spring System resting on a Winkler Elastic Foundation," Journal of Sound and Vibration, Vol. 185, pp.357-363.

10. West, R.P. and Pavlovic, M.N., 1999, "A Parametric Study of the Clustering of Modes in the Vibration of Partially Embedded Beams," International Journal of Mechanical Science, Vol. 41, pp.547-559.

11. Selvadurai, A.P.S., 1979, Elastic Analysis of Soil-Foundation Interaction, Elsevier.

12. Timoshenko, S.P., Young, D.H. and Weaver, Jr., W., 1974, Vibration Problems in Engineering, 4th Edition, John Wiley & Sons.

13. Li, W.L., 2000, "Free Vibrations of Beams with General Boundary Conditions," Journal of Sound and Vibration, Vol. 237, pp.709-725.