

자중에 의한 정적 처짐을 고려한 변단면 보의 자유진동

Free Vibrations of Tapered Beams with Static Deflection due to Self-Weight

이 병 구* · 이 태 은** · 안 대 순*** · 김 영 일**

Byoung Koo Lee, Tae Eun Lee, Dae Soon Ahn and Young Il Kim,

Key Words : free vibration(자유진동), tapered beam(변단면 보), mode shape(진동형), static deflection(정적 처짐), natural frequency(고유진동수)

ABSTRACT

A numerical method is presented to obtain natural frequencies and mode shapes of tapered beams with static deflections due to self-weight. The differential equation governing the free vibrations of beam taken into account the static deflection due to self-weight is derived and solved numerically. The hinged-hinged, clamped-clamped and clamped-hinged and clamped-free end constraints are applied in the numerical examples. As the numerical results, the lowest three natural frequencies versus distributed slenderness ratio and section ratio are reported in figures. And for the comparison purpose, the typical mode shapes with the effects of static deflection are presented in figures.

1. 서 론

보는 토목, 건축, 기계, 선박, 항공 등 구조공학 관련분야에서 가장 기본이 되는 구조단위이며, 이러한 단위구조의 정적, 동적 해석에 관한 많은 연구들이 수행되고 있다.^(1~6)

최근 재료과학의 발달로 고강도의 재료가 출현하고 따라서 세장비가 매우 큰 구조물의 시공이 가능하게 되어 정적 처짐이 다소 큰 구조물에서도 정적 안전성을 확보할 수 있게 되었다. 세장비가 비교적 큰 구조물에 구조물의 자중, 적재하중 등의 사하중이 작용하는 경우 비교적 큰 정적처짐이 발생하게 되며, 이러한 정적처짐으로 인해 실제 구조물의 동적특성 자체가 변화할 수 있다. 따라서 정적처짐이 큰 구조물에 동하중이 작용하는 경우 대상 구조물의 동적응답해석을 위해서는 정적초기처짐을 고려한 구조물의 정확한 동적특성 파악이 필수적으로 이루어져야 한다.

한편 구조물의 부재단면을 변단면으로 하는 경우 재료의 효율적 이용이 가능하며, 전체 구조물의 자중감소, 미적요인 등의 이유로 변단면의 이용이 날로 증가하는 추세이다.

따라서 본 연구에서는 자중에 의한 정적 처짐을 갖는 변단면 보의 자유진동 특성을 규명하는데 연구목적이 있다. 이를 위하여 대상 보의 자유진동을 지배하는 상미분방정식을 유도하고, 이를 수치해석할 수 있는 수치해석 프로그램을 개발하였다. 대상 보는 단면이 직선으로 변화하는 선형변단면을 고려하였으며, 회전-회전, 고정-회전, 고정-고정 및 고정-자유의 단부조건을 채택하였다.

2. 수학적 모형

그림 1(a)는 지간 길이가 l 이고, 축방향 좌표 x 에서 단면적 $A(x)$ 및 단면이차모멘트 $I(x)$ 를 갖는 임의 변단면보를 나타내고 있다. 보의 좌, 우단에서 단면적 및 단면이차모멘트는 각각 A_0 및 I_0 , 보의 중앙에서는 A_m 및 I_m 이고, 단부는 회전, 고정, 자유지점으로 지지되어 있다. 임의 변단면 보의 단면적 $A(x)$ 및 단면이차모멘트 $I(x)$ 는 각각 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$A(x) = A_0 g(x) \quad (2.1)$$

$$I(x) = I_0 h(x) \quad (2.2)$$

위의 식들에서 $g(x)$ 및 $h(x)$ 는 변단면의 단면적 $A(x)$ 및 단면이차모멘트 $I(x)$ 를 정의해 주는 단면형상함

* 원광대학교 토목환경 및 도시공학부
E-mail : bkleeest@wonkwang.ac.kr
Tel : (063) 850-6718, Fax : (063) 857-7204

** 원광대학교 대학원

*** 신한개발기술단

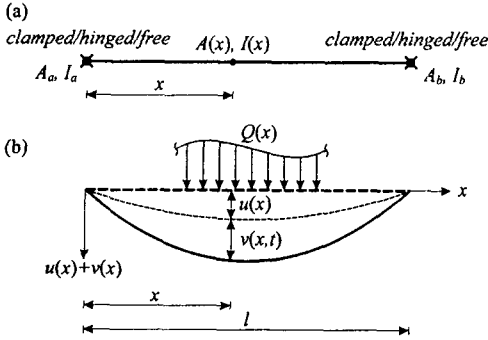


그림 1(a) 변단면 보의 단면제원
(b) 정적처짐을 갖는 보의 진동형

수로서 x 만의 함수이다. 그림 1(b)는 본 연구대상 보의 정적변위와 동적변위를 나타내고 있다. 이 그림에서 점선으로 표시된 $u(x)$ 는 임의의 자중 $Q(x)$ 에 의한 정적변위를 나타내고 실선으로 표시된 $v(x, t)$ 는 정적처짐 $u(x)$ 로부터 측정된 자유진동에 의한 동적변위를 나타낸다. 여기서 t 는 시간이다

임의의 자중 $Q(x)$ 로 인한 정적변위 $u(x)$ 를 갖는 보의 자유진동을 지배하는 편미분방정식은 다음 식과 같다.⁽⁷⁾

$$\rho A(x) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} \right] - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ EA(x) \left[\frac{\partial u(x)}{\partial x} \right]^2 \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} \right\} = 0 \quad (2.3)$$

위의 식에서 ρ 는 보 재료의 밀도, E 는 탄성계수이다.

보의 자유진동은 조화진동을 한다고 가정하면, 동적변위 $v(x, t)$ 는 다음과 같이 조화진동식으로 표시된다.⁽⁸⁾

$$v(x, t) = v(x) \sin(\omega t), \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (2.4)$$

위의 식에서 $v(x)$ 는 조화진동의 상대진폭, ω_i 는 고유진동수(rad/sec), i 는 모드번호이다.

식 (2.4)의 조화진동식을 이용하면 식 (2.3)은 다음과 같이 전개된다.

$$\begin{aligned} \frac{d^4 v}{dx^4} = & -\frac{2}{h} \frac{dh}{dx} \frac{d^3 v}{dx^3} + \left[\frac{G}{2r^2 h} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 - \frac{1}{h} \frac{d^2 h}{dx^2} \right] \frac{d^2 v}{dx^2} \\ & + \left[\frac{g}{r^2 h} \frac{d^2 u}{dx^2} \frac{du}{dx} + \frac{1}{2r^2 h} \frac{dg}{dx} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 \right] \frac{dv}{dx} \\ & + \frac{\rho A \pi^2 f_i^2}{Er^2} \frac{g}{h} v_i \end{aligned} \quad (2.5)$$

식 (2.5)에서 r 은 보의 좌단 ($x=0$)에서 단면회전반경

으로 식 (2.6)과 같고, f_i 는 각 모드별 고유진동수로서 식 (2.7)과 같다.

$$r = \sqrt{I_a/A_a}, \quad f = \omega_i/2\pi \quad (2.6-7)$$

상미분방정식 식 (2.5)에서 $g, h, dg/dx$ 및 d^2h/dx^2 은 보의 자유진동에 미치는 변단면의 영향요소이며, du/dx 및 d^2u/dx^2 은 임의의 자중에 의한 정적변위의 영향요소이다.

본 연구에서 보의 단부는 회전, 고정 및 자유단을 고려하였으며, 각 단부에 대한 경계조건은 다음 식들과 같다.

● 회전단

$$v = 0, \quad d^2v/dx^2 = 0, \quad x = 0 \text{ 또는 } l \text{에서} \quad (2.8)$$

● 고정단

$$v = 0, \quad dv/dx = 0, \quad x = 0 \text{ 또는 } l \text{에서} \quad (2.9)$$

● 자유단

$$d^2v/dx^2 = d^3v/dx^3 = 0, \quad x = 0 \text{ 또는 } l \text{에서} \quad (2.10)$$

보의 자유진동을 지배하는 미분방정식을 무차원으로 유도하기 위하여 다음과 같은 무차원 변수들을 도입한다.

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \eta = \frac{v}{l}, \quad \mu = \frac{u}{l}, \quad s = \frac{l}{r} \quad (2.11-14)$$

위의 식들에서 ξ, η, μ 는 각각 x, v, u 를 시간길이 l 로 정규화한 것이며, s 는 세장비이다.

식 (2.11)~(2.14)를 이용하여 식 (2.5)를 무차원화하면 자중에 의한 정적 처짐을 갖는 보의 자유진동을 지배하는 무차원 상미분방정식이 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned} \frac{d^4 \eta}{d\xi^4} = & -\frac{2}{h} \frac{dh}{d\xi} \frac{d^3 \eta}{d\xi^3} + \left[\frac{s^2}{2} \frac{g}{h} \left(\frac{d\mu}{d\xi} \right)^2 - \frac{1}{h} \frac{d^2 h}{d\xi^2} \right] \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} \\ & + \left[s^2 \frac{g}{h} \frac{d^2 \mu}{d\xi^2} \frac{d\mu}{d\xi} + \frac{1}{h} \frac{s^2}{2} \frac{dg}{d\xi} \left(\frac{d\mu}{d\xi} \right)^2 \right] \frac{d\eta}{d\xi} + \frac{g}{h} C_i^2 \eta \end{aligned} \quad (2.15)$$

위의 식에서 C_i 는 무차원 고유진동수로 다음과 같이 표시되고 i 는 모드번호이다.

$$C_i = \omega_i^2 \sqrt{\frac{\rho A}{EI}}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (2.16)$$

식 (2.8)-(2.10)의 경계조건을 무차원 변수를 이용하면 다음과 같이 무차원 경계조건이 유도된다.

● 회전단
 $\eta=0, d^2\eta/d\xi^2=0, \xi=0$ 또는 1에서 (2.17)

● 고정단
 $\eta=0, d\eta/d\xi=0, \xi=0$ 또는 1에서 (2.18)

● 자유단
 $d^2\eta/d\xi^2=d^3\eta/d\xi^3=0, \xi=0$ 또는 1에서 (2.19)

3. 변단면의 정의

지배미분방정식 식 (2.5)에는 변단면 보의 영향요소인 $g, h, dg/dx$ 및 d^2h/dx^2 의 항이 포함되어 있으므로 이들의 영향요소 값들을 계산하기 위하여 보의 변단면이 정의되어야 한다. 본 논문에서는 Gupta⁽⁹⁾가 제안한 선형변단면을 채택하였다.

그림 2는 본 연구에서 채택한 선형 변단면을 나타낸 것으로, 단면의 폭이 변화하는 폭 변단면(width taper), 단면의 깊이가 변화하는 깊이 변단면(depth taper) 및 폭과 깊이가 동시에 변화하는 정방형 변단면(square taper)의 3가지 경우를 고려하였다. 이들 변단면은 보의 중양을 중심으로 좌우 대칭이다.

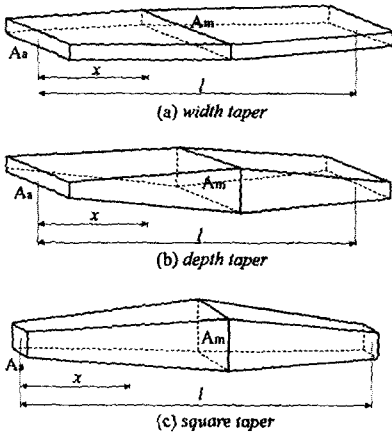


그림 2. 선형 변단면 보

그림 2에서 A_s, A_m 은 각각 보의 좌단과 중양의 단면적이며, 보의 기하학적 형상을 정의하기 위하여 단면비로 정의되는 무차원량 α 를 다음 식과 같이 도입한다.

$$\alpha = A_m/A_s \quad (3.1)$$

식 (2.1), (2.2)에 포함된 단면형상함수 $g(x)$ 및 $h(x)$ 는 식 (2.11)의 무차원 변수를 이용하면 다음의 식들과 같

이 나타낼 수 있으며, 표기의 간편화를 위하여 g, h 로 표시한다.

$$g = [2c\xi + 1]^m, \quad 0 \leq \xi \leq 0.5$$

$$g = [-2c\xi + 2c + 1]^m, \quad 0.5 \leq \xi \leq 1 \quad (3.2)$$

$$h = [2c\xi + 1]^n, \quad 0 \leq \xi \leq 0.5$$

$$h = [-2c\xi + 2c + 1]^n, \quad 0.5 \leq \xi \leq 1 \quad (3.3)$$

위의 식들에서 $c = r^{1/m} - 1$ 이며, m, n 은 보의 단면형상에 따라서 결정되는 단면형상계수로서 폭, 깊이 및 정방형 변단면에 대해 각각 다음 식들과 같다.

● 폭 변단면(width taper) : $m=1, n=1$ (3.4)

● 깊이 변단면(depth taper) : $m=1, n=3$ (3.5)

● 정방형 변단면(square taper) : $m=2, n=4$ (3.6)

식 (3.2), (3.3)에서 단면형상함수가 정의되었으므로 식 (2.15)의 지배미분방정식에 포함되어있는 $dg/dx, dh/dx, d^2h/dx^2$ 를 정의할 수 있으며, 무차원 변수를 이용하여 무차원화 시키면 다음의 식들과 같다.

● $0 \leq \xi \leq 0.5$ 에서
 $dg/d\xi = 2mc[2c\xi + 1]^{m-1}$ (3.7)

$$dh/d\xi = 2mc[2c\xi + 1]^{n-1}$$
 (3.8)

$$d^2h/d\xi^2 = 4n(n-1)c^2[2c\xi + 1]^{n-2}$$
 (3.9)

● $0.5 \leq \xi \leq 1$ 에서
 $dg/d\xi = -2mc[-2c\xi + 2c + 1]^{m-1}$ (3.10)

$$dh/d\xi = -2nc[-2c\xi + 2c + 1]^{n-1}$$
 (3.11)

$$d^2h/d\xi^2 = -4nc^2[-2c\xi + 2c + 1]^{n-2}$$
 (3.12)

4. 정적 처짐의 영향요소

그림 3은 지간길이가 l 이고, 자중에 의한 임의점의 하중강도 $Q(x)$ 를 받는 변단면 보를 나타낸 것으로 보의 좌단과 우단은 회전, 고정 및 자유 지점을 갖는다. 이 그림에서 R_m 과 R_v 는 각각 좌측 지점에서의 반력모멘트와 수직반력을 나타내며 M, I 및 u 는 각각 보 축상 임의점 x 에서의 휨모멘트, 단면이차모멘트 및 처짐을 나타낸다.

자중에 의한 정적처짐을 지배하는 미분방정식⁽¹⁰⁾은 식 (4.1)과 같이 나타낼 수 있고, 보의 축상 임의점 x 에서의 휨 모멘트 M 은 정역학적 평형조건을 이용하면 식 (4.2)와 같이 나타낼 수 있다.

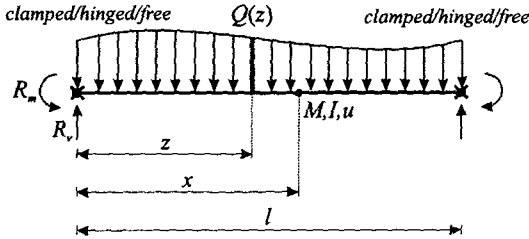


그림 3 임의의 자중을 적용한 보 요소

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = -\frac{M}{EI} \quad (4.1)$$

$$M_x = -R_m + R_v x - \int_0^x Q(z)(x-z) dz \quad (4.2)$$

임의점에서의 자중에 의한 하중강도 $Q(z)$ 는 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$Q(z) = \Gamma A(z) = \Gamma A_a g(z) \quad (4.3)$$

여기서 Γ 는 보 재료의 단위중량이며, $g(z)$ 는 3장에서 g 로서 정의하였다.

보의 정적처짐을 지배하는 미분방정식을 무차원으로 유도하기 위하여 다음과 같은 무차원 변수를 도입하였다.

$$\xi = \frac{z}{l}, \quad \gamma = \frac{\pi^6 \Gamma l}{E} \quad (4.4-4.5)$$

$$r_m = \frac{R_m l}{EI_a}, \quad r_v = \frac{R_v l^2}{EI_a}, \quad q = \frac{Q l^3}{EI_a} \quad (4.6-4.8)$$

위의 식들에서 ξ 는 하중강도의 위치 z 를 지간길이 l 로 정규화한 것이며, γ 는 무차원 단위중량, r_m , r_v 및 q 는 무차원 반력모멘트, 무차원 수직반력 및 무차원 하중강도이다.

식 (4.4)~(4.8)의 무차원 변수와 식 (4.2)의 휨 모멘트를 식 (4.1)에 대입하면 자중에 의한 정적처짐을 지배하는 무차원 미분방정식을 다음 식과 같이 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mu}{d\xi^2} &= \frac{r_m}{h} - \frac{r_v \xi}{h} + \int_0^\xi q(\xi - \zeta) d\zeta \\ &= \frac{r_m}{h} - \frac{r_v \xi}{h} + \int_0^\xi \gamma s^2 g(\zeta)(\xi - \zeta) d\zeta \end{aligned} \quad (4.9)$$

위의 식에서 s 는 2장에서 정의한 세장비이며, g 및 h 는 3장에서 정의한 단면형상함수이다.

자중에 의한 정적처짐을 지배하는 미분방정식 식 (4.9)로부터 $\mu/d\xi$, $d^2 \mu/d\xi^2$ 를 산출한 후 3장에서 유도한 g , h , dg/dx , dh/dx , $d^2 h/dx^2$ 식과 함께 본 연구대상 보

의 자유진동을 지배하는 미분방정식 식 (2.15)에 대입하면 수치해석 방법에 의하여 미분방정식의 고유치인 C_i 와 진동형 η 를 산출할 수 있다.

5. 수치해석 결과 및 고찰

미분방정식에 포함되어 있는 고유치 C_i 및 진동형 η 를 구하기 위한 수치해석 방법을 간단히 설명하면 다음과 같다.

먼저 단부조건, 단면조건 및 하중조건이 주어지면 식 (2.15)에 포함되어 있는 단면형상함수 및 정적처짐의 영향요소를 계산한다.

C_i 값을 시행착오적으로 가정하여 식 (2.15)의 미분방정식에 대입한 후 단부조건에 따라 식 (2.17)~(2.19)의 경계조건을 초기치로 하여 Runge-Kutta method⁽¹¹⁾로 $\xi=0$ 에서 $\xi=1$ 까지 수치적분을 실시한다.

이때 가정한 C_i 값이 자유진동의 초기치인지는 $\xi=1$ 에서의 경계조건이 실제의 경계조건인 식 (2.17)~(2.19)을 만족하는지의 여부로 판단한다. 본 연구에서 고유치인 C_i 값의 산정은 Regula-Falsi method⁽¹¹⁾를 이용하였다.

그림 4는 회전-회전의 단부조건을 갖고, $\alpha=1.2$, $s=100$ 인 폭 변화단면의 무차원 단위중량 γ 와 무차원 고유진동수비 C_i/C_{oi} 와의 관계를 나타낸 것이다. 여기서 C_{oi} 는 자중에 의한 정적 처짐의 영향을 고려하지 않은 즉, $\gamma=0$ 인 경우의 C_i 값이다. 따라서 C_i/C_{oi} 는 γ 값이 C_i 에 미치는 영향력이며 이 값이 클수록 자중이 고유진동수에 미치는 영향은 더 크다. 그림을 보면 γ 값이 무차원 고유진동수비에 미치는 영향은 고차모드보다 저차모드에서 더 크게 나타나며, $\gamma=0$ 인 경우에는 모두 정확하게 "1"을 나타내고 있어 본 연구에서의 수치해석 방법이 타당함을 알 수 있다.

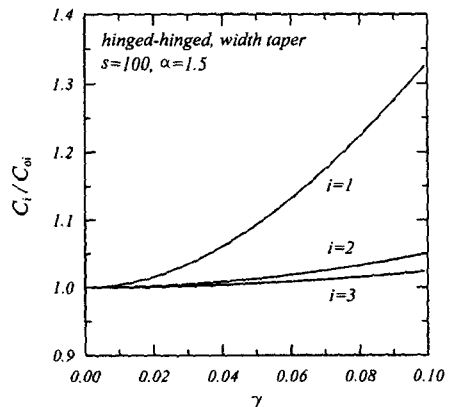


그림 4. C_i/C_{oi} - γ 의 관계곡선 (회전-회전)

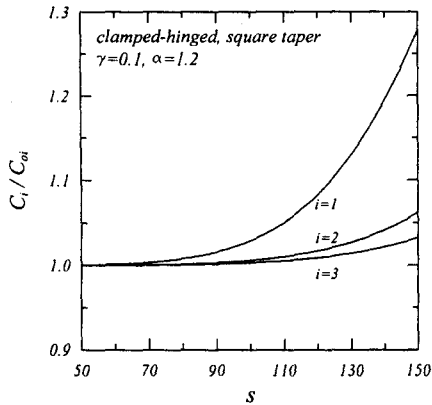


그림 5 C_i/C_{ci} - s 의 관계곡선 (고정-회전)

그림 5는 고정-고정의 단부조건을 갖는 정방형 변단면의 세장비 s 와 무차원 고유진동수비를 비교한 그림이다. 세장비가 증가할수록 C_i/C_{ci} 값은 증가하며, 고차모드보다 저차 모드에서 더 크게 영향을 미치는 것을 알 수 있다. 세장비가 약 80이상에서는 무차원 고유진동수비에 미치는 영향이 매우 커지므로 이러한 구조물의 동적해석시에는 정적처짐의 영향을 반드시 고려해야 함을 알 수 있다.

그림 6은 $s=100$, $\alpha=1.2$ 이며, 고정-고정의 단부조건을 갖는 보의 γ 와 C_i/C_{ci} 의 관계를 변단면 선형별로 나타낸 것이다. γ 값이 증가할수록 무차원 고유진동수비는 증가하며 그 변화폭은 폭 변화단면, 깊이 변화단면, 정방형 변화 단면의 순으로 크게 나타났다.

표 1은 $s=100$, $\alpha=1.2$ 인 보에 γ 를 고려한 경우와 무시한 경우의 고유진동수를 단부조건별로 비교한 것이다. 표에서 보는 바와 같이 γ 의 영향을 고려하면 γ 를 무시하는 경우에 비하여 무차원 고유진동수가 커지는 것을 알 수 있으며, γ 가 C_i 에 미치는 영향은 고정-자유, 회전-회전, 고

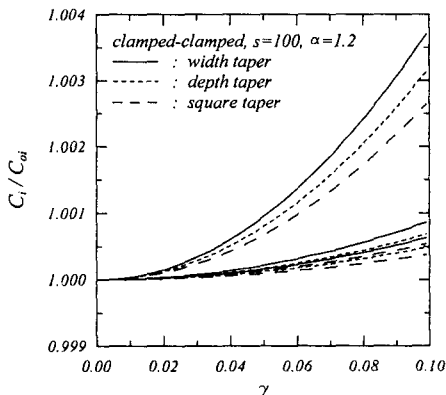


그림 6 C_i/C_{ci} - γ 의 관계곡선 (변단면)

표 1. 단부조건별 무차원 고유진동수 비교 ($s=100$, $\alpha=1.2$)

단부조건	모드번호	무차원 고유진동수, C_i	
		$\gamma=0$	$\gamma=0.1$
회전-회전	1	8.79	11.13
	2	41.32	42.96
	3	91.76	93.43
고정-회전	1	14.46	14.87
	2	51.47	51.76
	3	107.65	107.96
고정-고정	1	20.94	21.00
	2	63.40	63.43
	3	124.31	124.37
고정-자유	1	4.03	5.14
	2	21.64	38.18
	3	64.65	90.54

정-회전, 고정-고정의 단부조건 순으로 크게 작용함을 알 수 있다.

표 2는 고정-회전, 고정-고정 보에 대하여 단면비 변화에 따른 무차원 고유진동수와 정적처짐의 최대값을 비교한 것이다. 단면비가 증가하면 정적처짐은 감소하여 부재는 정역학적으로 안정하게 된다. 또한 단면비가 증가하면 무차원 고유진동수는 점점 감소하여 임계 단면비에 도달하면 무차원 고유진동수값이 '0'이 되며, 그 이후의 단면비는 동적 불안정영역에 해당하게 된다. 즉 단면비가 증가하면 정적 처짐은 작아지나 동역학적으로 불리해지므로 부재를 변단면으로 설계하는 경우 단면비 변화에 따른 정적처짐 및 고유진동수의 변화를 고찰하여 처짐 및 진동에 안정적인 적절한 단면비를 채택해야 할 것으로 사료된다.

표 2 단면비 변화에 따른 제 1고유진동수 C_1 과 u_{max} *

단부조건	α	u_{max}	C_1
고정-회전	0.5	0.0072	16.73
	1.0	0.0064	15.91
	1.5	0.0056	12.10
	1.8	0.0045	7.89
	1.9	0.0043	5.66
	2.0	0.0041	0.00
	2.5	0.0038	-
	3.0	0.0036	-
고정-고정	0.5	0.0029	25.16
	1.0	0.0027	22.44
	1.5	0.0025	18.09
	2.0	0.0023	11.09
	2.1	0.0023	8.948
	2.3	0.0022	0.00
	2.5	0.0022	-
	3.0	0.0021	-

* square taper, $s=100$, $\gamma=0.1$

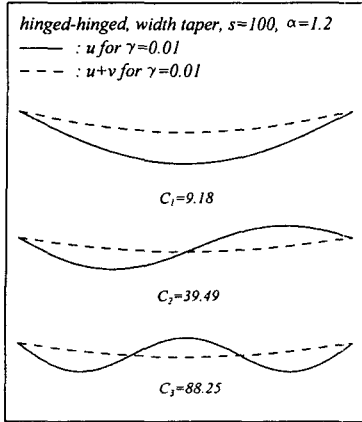


그림 7. 정적 처짐을 고려한 진동형의 예(회전-회전)

그림 7은 $s=100$, $\alpha=1.2$, $\gamma=0.01$ 에 대한 회전-회전 보의 진동형을 나타낸 것이다. 제1, 3모드는 대칭진동형, 제2모드는 역대칭진동형을 나타내고 있다.

6 결론

이 연구는 자중에 의한 정적 처짐을 고려한 변단면 보의 자유진동에 관한 연구이다. 이 논문에서는 정적 처짐을 갖는 보의 자유진동을 지배하는 미분방정식을 유도하고, 이를 수치해석하여 무차원 고유진동수와 진동형을 산출하였다. 일련의 수치해석 결과로 다음과 같은 결론을 얻었다.

- (1) 자중에 의한 정적처짐은 고유진동수를 증가시킨다.
- (2) 정적처짐의 영향은 고차모드보다 저차모드에서 더 크게 나타난다.
- (3) 정적처짐이 무차원 고유진동수에 미치는 영향은 고정-자유, 회전-회전, 고정-회전, 고정-고정의 단부조건 순으로 더 크게 나타난다.
- (4) 세장비가 80이상인 경우 구조물의 동적해석시 정적 처짐을 고려해야 한다.

참고문헌

- (1) Gupta, A. K., 1985, "Vibration of Tapered Beams", Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 11, No. 1, pp.1~15.
- (2) Eisenberger, M. and Reich, Y., 1989, "Static Vibration and Stability Analysis of Non-Uniform Beams," Computer and Structures, Vol. 31, No. 4, pp.567~573.
- (3) Takabatake, H., 1991, "Effect of Dead Loads on Natural Frequencies of Beams," Journal of Structural Engineering, ASCE, Vol. 117, No. 4, pp.1039~1052.
- (4) 이병구, 박광규, 오상진, 모정만, 1994, "사하중에 의한 정적 처짐을 고려한 보의 자유진동," 소음진동공학회, 제 4 권, 제 4호, pp.451-457.
- (5) De Rosa, M. A. and Auciello, N. M., 1996, "Free Vibrations of Tapered Beams with Flexible Ends," Computers & Structures, Vol. 60, Issue 2, pp.197-202.
- (6) Zhou, D. and Cheung, Y. K., 2000, "The Free Vibration of a Type of Tapered Beams," Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 188, Issues 1-3, pp.203-216.
- (7) Clough, R. W. and Penzien, J., 1993, Dynamics of Structures, 2nd Edition, McGraw-Hill.
- (8) Timoshenko, S. P., Young, D. H. and Weaver, Jr. W., 1974. Vibration Problem in Engineering, 4th Edition, John Wiley & Sons, Inc.
- (9) Gupta, A. K., 1975, Vibration Analysis of Linearly Tapered Beams using Frequency-Dependent Stiffness and Mass Matrix, Ph. D Thesis, Utah State University, Logan, Utah, U.S.A
- (10) Gere, J. M. and Timoshenko, S. P., 1997, Mechanics of Materials, 4th Edition, PWS Publishing Company.
- (11) Carnahan, B., Luther, H. A. and Wilkes, J. O., Applied Numerical Methods, John Wiley & Sons, Inc.