

# 가속을 받는 사다리꼴 외팔 평판의 동특성 해석

## Dynamic Characteristic Analysis of Trapezoidal Cantilever Plates Undergoing Translational Acceleration

임 흥 석\* · 유 흥 희\*\*

Hong Seok Lim, Hong Hee Yoo

**Key Words :** Trapezoidal Cantilever Plate (사다리꼴 외팔평판), Translational Acceleration (병진 가속도), Inclination Angle (경사각), Natural Frequency (고유 진동수), Mode Shape (모드 형상), Natural Frequency Loci Veering (고유진동수 궤적 휨현상), Dimensionless Parameter (무차원 매개변수)

### ABSTRACT

A modeling method for the dynamic characteristic analysis of a translationally accelerated trapezoidal cantilever plate is presented in this paper. The equations of motion for the plate are derived and transformed into a dimensionless form. The effects of the inclination angles and the acceleration on the vibration characteristics of the plate are investigated. Incidentally, natural frequency loci veering and associated mode shape variations are observed and discussed

#### 기호설명

$\theta_1$  : 위쪽 경사각

$\theta_2$  : 아래쪽 경사각

$a$  : 가로 길이

$b$  : 세로 길이

$h$  : 두께

$\rho$  : 단위 면적당 질량

$\nu$  : 포아송비

$E$  : 인장 강성 계수

$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  : 굽힘 강성계수

$a_x$  : X 방향 가속도

$a_y$  : Y 방향 가속도

### 1. 서 론

외팔 평판 구조물은 여러 가지 공학적 예제에서 발견되는 중요한 구조 형태이며 대표적인 것으로

항공기나 로켓의 날개, 인공위성의 태양열 전지판, 그리고 헬리콥터의 블레이드 같은 예제들이 있다. 이들 중 특별히 비행기나 로켓의 날개는 다양한 형태를 가지고 있으며, 이륙 또는 발사 시에 병진 방향 가속도를 받게 된다. 그런데 이러한 평판의 병진 방향 가속도는 평판 시스템의 강성의 변화를 가져와 그 진동 특성을 변화시키게 된다. 이러한 구조물에 대한 진동특성의 정확한 예측은 이들의 설계를 위해 필수적이므로 진동특성 해석을 위한 연구가 필요하다.

강체 운동을 하는 구조물의 진동 특성에 대한 연구는 참고문헌[1-6]에서 볼 수 있듯이 블레이드형 구조물로부터 참고문헌[7-8]에 제시되어진 다양한 형태의 평판 구조물까지 이루어지고 있다. 그러나 이러한 연구들에서는 평판을 보의 형태로 이상화 하여 다루고 있거나 운동이 없는 고정된 상태에서 평판 진동 특성을 다루고 있다. 평판이 강체운동을 하는 경우에 대한 진동 해석을 다룬 문헌도 회전운동에 국한되어 있으며 (참고문헌 [9-10] 참조) 병진방향으로 가속되는 평판 구조물에 대한 연구는 참고문헌[11]에 나타난 것이 저자들이 파악한 한도내에서는 유일하다. 로켓이나 항공기는 다양한 모양의 날개들을 가지며 또한 병진 가속운동을 하므로 날개의 형태 변화와 병진

\* 한양대학교 대학원 기계설계학과

E-mail : limit75@dreamwiz.com

Tel : (02) 2299-8169

\*\* 정회원 한양대학교 기계공학부

가속도에 의한 진동 특성의 변화를 파악하기 위한 연구가 필요하다고 판단된다. 본 연구의 목적은 사다리꼴 평판형태를 결정짓는 경사각들의 크기와 병진방향 가속도 변화에 따른 고유 진동수와 모드 형상의 변화를 파악하기 위한 모델링 방법을 제시하고, 그 모델링에 근거하여 해석결과를 도출하여 그 주요 특성을 분석하고 규명하는데 두고있다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 서론에 이어서 2 장에는 참고문헌[11]에 제시된 진동방정식의 유도방법에 근거하여 무차원 매개변수를 이용해 무차원 진동방정식을 유도했으며 다음 3 장에서는 이에 가상 모드법을 적용하고 수치해석을 통하여 결과를 도출하여 주요 동적 특성을 논의하였다. 마지막 4 장에서는 본 논문의 결론을 수록하였다

## 2. 진동 방정식

### 2.1 외팔 평판의 굽힘 방향 진동 방정식

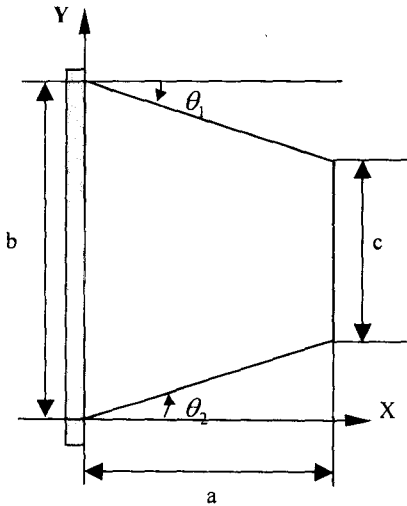


Fig.1 Configuration of a translationally accelerated trapezoidal plate

위의 Fig.1 이 보여주는 것은 일정한 두께  $h$  에  $\theta_1$  과  $\theta_2$  의 경사각들을 가지는 사다리꼴 형상의 외팔 평판이다. 이 평판은 가속을 받는 고정단에 부착되어 있는데 그 굽힘 방향 진동 방정식을 참고문헌[11]에 제시된 과정을 이용하여 유도하면 (Y 방향 구간을  $x$  값에 대해 변형시키면서) 다음 식(1)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{\mu} \left[ \left( \int_0^b \int_{x \tan \theta_2}^{b-x \tan \theta_1} \rho \phi_j \phi_j dy dx \right) \ddot{q}_j \right] \\ & + \sum_{j=1}^{\mu} \left[ \left\{ \int_0^b \int_{x \tan \theta_2}^{b-x \tan \theta_1} D(\phi_{j,xx} \phi_{j,xx} + \phi_{j,yy} \phi_{j,yy} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \nu \phi_{j,xx} \phi_{j,yy} + 2(1-\nu) \phi_{j,xy} \phi_{j,xy}) dy dx \right\} q_j \right] \\ & - \sum_{j=1}^{\mu} \left[ a_y \left( \int_0^b \int_{x \tan \theta_2}^{b-x \tan \theta_1} \rho (b-x \tan \theta_1 - y) \phi_{j,y} \phi_{j,y} dy dx \right) q_j \right] \\ & - \sum_{j=1}^{\mu} \left[ a_x \left( \int_0^b \int_{x \tan \theta_2}^{b-x \tan \theta_1} \rho (a-x) \phi_{j,x} \phi_{j,x} dy dx \right) q_j \right] = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 Y 방향 구간은 최소점이  $\theta_2$  와  $x$  에 의해서  $x \cdot \tan \theta_2$  의 식으로 결정 되어지며 최대점은  $\theta_1$  과  $x, b$  에 의해서  $b-x \cdot \tan \theta_1$  의 식으로 결정지어진다. 위 식에서 아래첨자 표시 중 콤마 뒤에 나타나는 것은 이들에 대한 편미분으로 예를 들어  $\phi_{i,xx}$ 는  $\phi_i$  를  $x$  로 두 번 편미분한 것을 의미한다.  $\phi_i$  와  $q_i$  는 평판의 굽힘 방향 변위  $w$  를 표시하기 위해 사용하는 모드함수와 일반 좌표이며 서로 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^{\mu} \phi_i(x, y) q_i(t) \quad (2)$$

여기서  $\mu$  는 근사화에 사용된 모드의 개수이다.

식(1)은  $x, \theta_1, \theta_2$ , 그리고 가속도 관련 항들이 시스템의 진동 방정식에 영향을 주는 것을 분명히 보여준다.

### 2.2 진동 방정식의 무차원화

식(1)을 무차원화 하기 위해 무차원 변수들과 매개 변수들 그리고 함수를 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned} \tau & \equiv \frac{t}{T} & \xi & \equiv \frac{x}{a} \\ \eta & \equiv \frac{y}{a} & \delta & \equiv \frac{a}{b} \\ \mathcal{G}_j & \equiv \frac{q_j}{a} & \phi_i(x, y) & \equiv \varphi_i(\xi, \eta) \\ \alpha_x & \equiv \frac{a_x}{a} & \alpha_y & \equiv \frac{a_y}{a} \end{aligned} \quad (3)$$

여기서  $a_x, a_y, T$  는 다음과 같이 정의된다

### 3. 수치해석 결과

$$T \equiv \sqrt{\frac{\rho a^4}{D}} \quad (4)$$

$$a_r \equiv \frac{a}{T^2} \quad a_s \equiv \frac{b}{T^2}$$

식(3)을 이용하면 식(1)은 다음과 같이 무차원 형태로 나타낼 수 있다.

$$\sum_{j=1}^{\mu} \left[ \left( \int_0^1 \int_{\delta \xi \tan \theta_2}^{1-\delta \xi \tan \theta_1} \varphi_i \varphi_j d\eta d\xi \right) \ddot{\vartheta}_j \right]$$

$$+ \sum_{j=1}^{\mu} \left\{ \left( \int_0^1 \int_{\delta \xi \tan \theta_2}^{1-\delta \xi \tan \theta_1} (\varphi_{i,\xi \xi} \varphi_{j,\xi \xi} + \delta^4 \varphi_{i,\eta \eta} \varphi_{j,\eta \eta}) \right. \right.$$

$$\left. \left. + \nu \delta^2 \varphi_{i,\xi \xi} \varphi_{j,\eta \eta} + 2(1-\nu) \delta^2 \varphi_{i,\xi \eta} \varphi_{j,\xi \eta} \right) d\eta d\xi \right\} \vartheta_j$$

$$- \sum_{j=1}^{\mu} \left[ \alpha_y \left( \int_0^1 \int_{\delta \xi \tan \theta_2}^{1-\delta \xi \tan \theta_1} (1-\delta \xi \tan \theta_1 - \eta) \varphi_{i,\eta} \varphi_{j,\eta} d\eta d\xi \right) \vartheta_j \right]$$

$$- \sum_{j=1}^{\mu} \left[ \alpha_x \left( \int_0^1 \int_{\delta \xi \tan \theta_2}^{1-\delta \xi \tan \theta_1} (1-\xi) \varphi_{i,\xi} \varphi_{j,\xi} d\eta d\xi \right) \vartheta_j \right] = 0$$

$$(i = 1, 2, \dots, \mu) \quad (5)$$

식(5)를 이용하여 진동해석을 수행하기 위해서 무차원화된 일반 좌표 행렬을 다음과 같은 조화 함수로 나타낸다.

$$\underline{\vartheta} = e^{j\omega t} \underline{\Theta} \quad (6)$$

여기서  $\underline{\vartheta}$  는  $\vartheta_j$  를 요소로 갖는 기동 행렬이며,  $\omega$  는 고유 진동수와  $T$  의 곱으로 나타내고,  $\underline{\Theta}$  는 각 고유 진동수에서 모드 형태를 나타내는 기동 행렬이다. 식(6)에서  $j$  는 허수(imaginary number)를 나타내는 기호로 쓰인다.

$$\omega^2 M \underline{\Theta} = K \underline{\Theta} \quad (7)$$

여기서  $M$  과  $K$  는  $\mu \times \mu$  의 크기를 갖는 정방 행렬로 그 요소들은 다음과 같다.

$$M_{ij} = \int_0^1 \int_{\delta \xi \tan \theta_2}^{1-\delta \xi \tan \theta_1} \varphi_i \varphi_j d\eta d\xi \quad (8)$$

$$K_{ij} = \int_0^1 \int_{\delta \xi \tan \theta_2}^{1-\delta \xi \tan \theta_1} (\varphi_{i,\xi \xi} \varphi_{j,\xi \xi} + \delta^4 \varphi_{i,\eta \eta} \varphi_{j,\eta \eta})$$

$$+ \nu \delta^2 \varphi_{i,\xi \xi} \varphi_{j,\eta \eta} + 2(1-\nu) \delta^2 \varphi_{i,\xi \eta} \varphi_{j,\xi \eta} d\eta d\xi$$

$$- \alpha_y \left( \int_0^1 \int_{\delta \xi \tan \theta_2}^{1-\delta \xi \tan \theta_1} (1-\delta \xi \tan \theta_1 - \eta) \varphi_{i,\eta} \varphi_{j,\eta} d\eta d\xi \right)$$

$$- \alpha_x \left( \int_0^1 \int_{\delta \xi \tan \theta_2}^{1-\delta \xi \tan \theta_1} (1-\xi) \varphi_{i,\xi} \varphi_{j,\xi} d\eta d\xi \right)$$

$$(9)$$

#### 3.1 해석 결과 비교를 통한 신뢰성 검증

이 장에는 앞서 유도된 진동방정식을 사용하여 수치해석을 수행하였다. 사용된 모드 함수들은 가로와 세로방향의 보 함수들을 조합하여 구하며 이 과정은 참고문헌[12]에 상세히 나타나 있다. 본 논문과 관련되어서 사용한 보 함수의 개수는 가로방향 7 개, 세로방향 9 개이며 결국 사용되는 총 자유도의 수는 63 이다. 이 수는 본 논문에서 제시하려 하는 가장 낮은 5 개의 고유진동수 혹은 모드 형상들의 수렴에 충분하도록 선정되었다.

사다리꼴 외팔 평판의 가속 시 고유 진동수에 대한 비교는 그러한 자료를 가진 문헌들이 없어 제시할 수 없으나 고정된 사다리꼴 외팔 평판의 고유진동수 결과는 참고문헌[7-8]에 나와 있으며 직사각형 형태의 외팔 평판이 가속을 받을 경우의 고유 진동수는 참고문헌[11]에서 찾을 수 있다. Table 1 은 가속을 주지 않은 상태에서의 사다리꼴 외팔 평판의 무차원 고유 진동수를 비교했으며 Table 2 는  $\theta_1$  과  $\theta_2$  의 경사각을 주지않은 직사각형 형태의 외팔 평판이 가속을 받을 때 고유 진동수를 비교하였다. 각 비교 결과는 최대 0.5% 이내의 오차를 보이고 있으며 이는 본 논문에서 제시한 모델링 및 해석 결과의 신뢰성을 보여주는 것이다.

Table 1 Comparison of non-dimensional natural frequencies by present and Ref. [8]

( $a/b = 1, \nu = 0.3, \alpha_y = 0, \alpha_x = 0$ )

c/b	$\theta_1$	mode	Present	Ref.[8]
0.25	10.0°	1	4.849	4.842
		2	19.972	19.944
		3	24.334	24.295
		4	50.990	50.903
		5	63.354	63.237
0.5	14.04°	1	4.185	4.181
		2	14.637	14.595
		3	22.678	22.656
		4	42.066	41.950
		5	56.731	56.551
0.75	0°	1	3.739	3.729
		2	10.847	10.826
		3	21.934	21.861
		4	34.429	34.305
		5	40.098	39.938

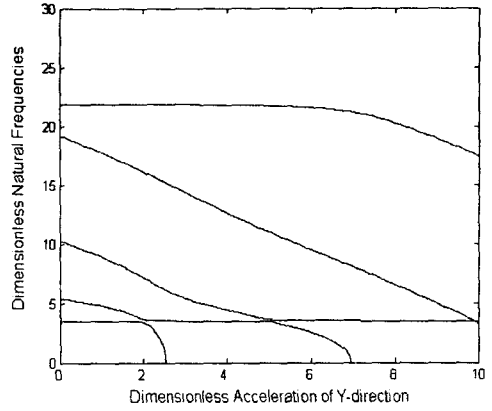
Table 2 Comparison of non-dimensional natural frequencies by present and Ref. [11]

(  $a/b = 1, \nu = 0.3, \alpha_1 = 4, \alpha_2 = 0, \theta_1 = \theta_2 = 0$  )

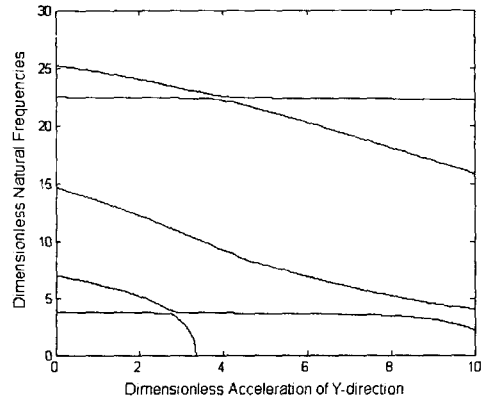
No. of X modes	No. of Y modes	Mode	Present	Ref. [11]
3	5	1	3.491	3.491
		2	6.951	6.951
		3	21.178	21.177
		4	25.803	25.803
		5	30.855	30.854
5	7	1	3.485	3.485
		2	6.918	6.918
		3	21.130	21.131
		4	25.685	25.686
		5	30.745	30.745

### 3.2 경사각 $\theta_1$ 만 변화시킨 경우

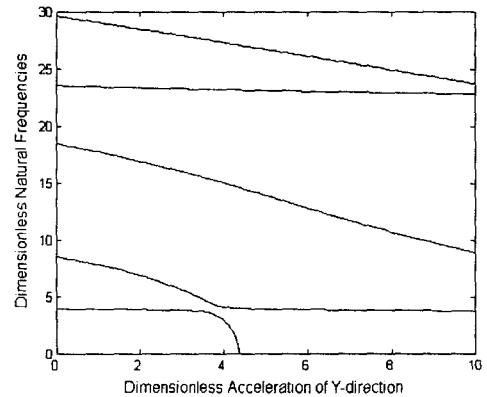
아래 나타난 Fig.2의 세 그림은  $\theta_2$ 는  $0^\circ$ 로 고정시키고  $\theta_1$ 을  $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ$ 로 변화시킨 경우 Y 방향 가속도 변화에 따른 가장 낮은 5개 무차원 고유진동수 변화를 보여준다. 이 결과는 모든 경우에 가속도가 증가할수록 고유진동수가 감소하는 것을 보여주는데 어느 가속도 이상에서는 고유진동수가 0에 도달하여 동적 좌굴 현상도 발생하는 것을 보여준다. 그런데  $\theta_1$ 이 커지면 무 가속시도 강성보다 질량이 감소하는 효과가 커서 고유진동수가 증가하게 되는데,  $\theta_1$ 의 증가로 인한 질량 상실은 가속 시 좌굴 효과도 완화시켜 동적 좌굴도  $\theta_1$ 이 커질수록 높은 값에서 일어나게 된다. 그림에서 관찰되는 또 다른 특이한 점은 세 가지 경우 모두 1번째와 2번째 고유진동수 궤적간에 휨 현상이 (Locs Veering) 발생한다는 점이다. 이 현상은  $\theta_1$ 이 커질수록 명확하게 관찰된다. 다음 그림 Fig.3은  $\theta_1$ 이  $30^\circ$ 인 경우에 대해 구한 결과로 궤적간 휨 현상이 일어나는 동안에 발생하는 두 모드의 절선 변화를 가속도 증가에 따라 보여준다. 이 그림을 보면 가속이 없을 때 첫번째와 두번째 모드가 1st Bending 과 1st Torsion 모드들인데 Y 방향 가속도 증가에 따라 모드형상 변화가 발생하기 시작하고 3.0 정도의 가속도가 주어지면 두 모드들은 서로 완전히 그 형태가 바뀌는 것을 관찰할 수가 있다. 결과적으로 동적 좌굴이 일어날 때의 모드는 굽힘모드가 아닌 비틀림 모드인 것을 알 수가 있다.



(a) In case of inclination angle  $\theta_1 = 0^\circ$

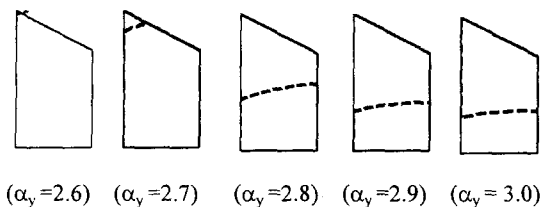


(b) In case of inclination angle  $\theta_1 = 30^\circ$

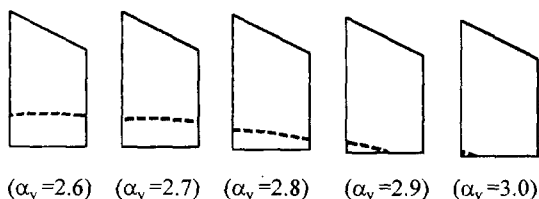


(c) In case of inclination angle  $\theta_1 = 45^\circ$

Fig.2 Variations of dimensionless natural frequencies versus dimensionless acceleration in Y-direction ( $\theta_2 = 0, a/b = 0.5, \nu = 0.3, \alpha_x = 0$ )



(a) Nodal line variations of 1st mode shapes



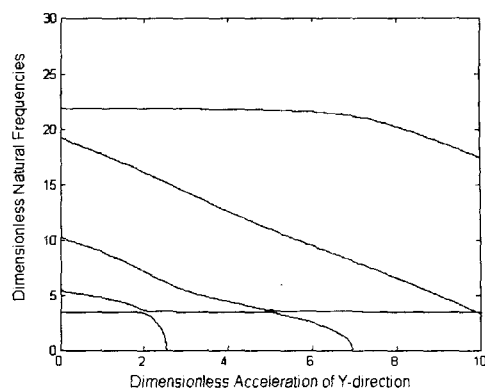
(b) Nodal line variations of 2nd mode shapes

Fig.3 Nodal line pattern of 1st and 2nd mode shapes with varied acceleration

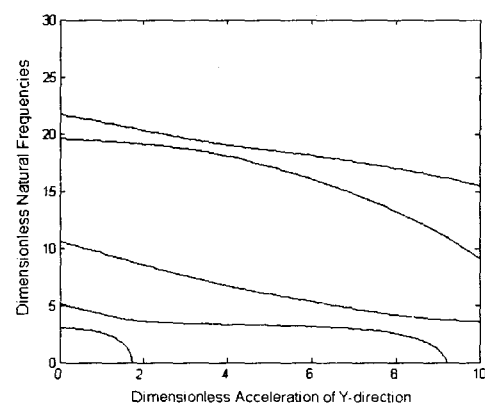
$$(\theta_1 = 30^\circ, \theta_2 = 0^\circ, a/b = 0.5, \nu = 0.3, \alpha_x = 0)$$

### 3.3 질량을 일정하게 유지시킨 경우

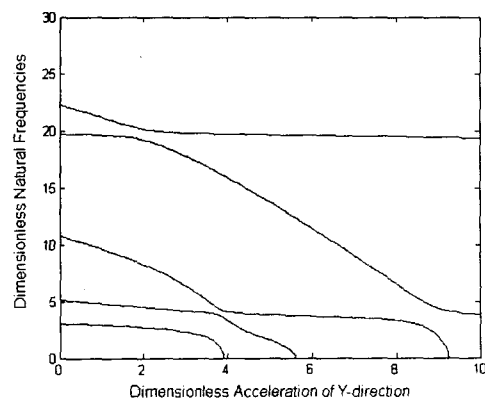
· 다음에 나타나는 Fig.4의 세 그림은  $\theta_1$  과  $\theta_2$  의 각도를  $(0^\circ, 0^\circ)$ ,  $(30^\circ, -30^\circ)$ ,  $(-30^\circ, 30^\circ)$ 로 변화시킬 때 Y 방향 무차원 가속도변화에 따른 5개의 고유진동수 변화를 보여준다. 이 세 가지 경우는 모두 동일한 질량을 갖는데 이 그림은 평판의 경사각의 방향이 가속을 받을 때 고유진동수 변화 양상에 현격한 영향을 주는 것을 보여준다. 그림을 살펴보면 진행 방향에 대해 반대 방향으로 기울어진 평행 사변형 형태의 평판인 (b)와 같은 경우는 첫 번째 모드에서 고유진동수 값이 가속도가 증가함에 따라 급격히 감소하여 좌굴이 발생한다. 그러나 첫 번째 모드를 제외하고는 (a)에 비해 고유진동수 값이 가속도가 증가하여도 잘 감소하지 않는다. 그리고 진행 방향으로 기울어진 평행 사변형 형태의 평판인 (c)의 경우는 다른 형태의 평판들에 비해 높은 가속도에서도 좌굴이 발생하지 않는 점을 확인 할 수 있다. 그러나 (a)에 비해 첫 번째 모드를 제외하고는 고유진동수 값이 가속도가 증가함에 따라 급속히 떨어지는 경향이 발견된다. (b),(c)의 경우 모두 첫 번째와 두 번째 모드간 휨 현상이 발생하므로 이 두 모드간 모드 교환이 존재하며 따라서 비틀림 모드에서 좌굴이 발생한다.



(a) In case of inclination angle  $\theta_1 = 0^\circ, \theta_2 = 0^\circ$



(b) In case of inclination angle  $\theta_1 = 30^\circ, \theta_2 = -30^\circ$



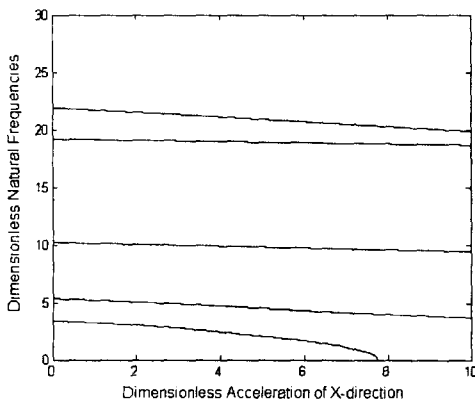
(c) In case of inclination angle  $\theta_1 = -30^\circ, \theta_2 = 30^\circ$

Fig.4 Variations of dimensionless natural frequencies versus dimensionless acceleration in Y-direction in conserved fixed mass case.

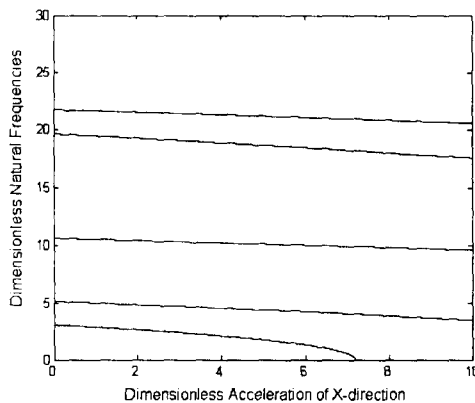
$$(a/b = 0.5, \nu = 0.3, \alpha_x = 0)$$

### 3.4 경사각의 X 방향 가속도에 의한 영향

다음에 나타나는 Fig.5의 두 그림은  $\theta_1$  과  $\theta_2$  의 각도를  $(0^\circ, 0^\circ)$ ,  $(30^\circ, -30^\circ)$ 로 할 때 X 방향 무차원 가속도변화에 따른 5 개의 고유진동수 변화를 보여준다. 두 경우의 평판이 모두 동일한 질량을 갖는데 이 그림은 평판의 경사각이 X 방향 가속도를 받을 때 고유진동수의 변화 양상에 영향을 미치는 것을 보여주는데 경사각이 존재하면 고유진동수 값은 감소하고 보다 낮은 가속도에서 좌굴에 도달하게 된다. 또한 휨 현상이 없고 따라서 1st Bending 모드에서 좌굴이 발생한다.



(a) In case of inclination angle  $\theta_1 = 0^\circ$ ,  $\theta_2 = 0^\circ$



(b) In case of inclination angle  $\theta_1 = 30^\circ$ ,  $\theta_2 = -30^\circ$

Fig.5 Variations of dimensionless natural frequencies versus dimensionless acceleration in X-direction  
(  $a/b = 0.5$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $\alpha_y = 0$  )

## 4. 결론

본 논문에서는 병진방향 가속도를 받는 사다리꼴 외팔 평판의 진동방정식과 이에 근거한 수치해석 결과를 제시하였다. 병진가속도와 경사각이 고유진동수와 모드 절선의 변화에 미치는 영향을 분석할 수 있었다. 특히 가장 낮은 두 고유진동수 캐직간 휨 현상이 관찰되었으며 가속도 증가에 따라 두 모드의 형태 교환이 발생하는 것을 관찰할 수 있었다. 또한 가속도 증가에 따라 고유진동수가 0으로 떨어지는 동적 좌굴 현상과 이에 대한 가속도 및 경사각들의 영향을 규명할 수 있었다.

## 후기

이 연구는 한국과학재단 지정 한양대학교 최적설계신기술연구센터의 연구비지원으로 수행되었습니다.

## 참고문헌

- (1) Southwell, R. and Gough, F., 1921, "The Free Transverse Vibration of Airscrew Blades", *British A.R.C. Reports and Memoranda*, No. 766.
- (2) Theodorsen, T., 1935, "Propeller Vibrations and the Effect of Centrifugal Force", *NASA TN*, No.516.
- (3) Schilhansl, M., 1958, "Bending Frequency of a Rotating Cantilever Beam", *Transaction of ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 25, pp. 28-30.
- (4) Putter, S. and Manor, H., 1978, "Natural Frequencies of Radial Rotating Beams", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 56, pp. 175-185.
- (5) Bhat, R., 1986, "Transverse Vibration of a Rotating Uniform Cantilever Beam with Tip Mass as Predicted by Using Beam Characteristic Orthogonal Polynomials in the Rayleigh-Ritz Method", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 105, No. 2, pp. 199-210.
- (6) Ryan, R.R. and Yoo, H.H., 1989, "Element Specific Linear and Nonlinear Modeling", *SDIO NASA Conference Proceedings*, San Diego, California, January.
- (7) Liew, K.M. and Lim, M.K., 1993, "Transverse Vibration of Trapezoidal Plates of Variable Thickness: Symmetric Trapezoidals", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 165, No. 1, pp. 45-67.
- (8) Liew, K.M., Lim, C.W. and Lim, M.K., 1993, "Transverse Vibration of Trapezoidal Plates of Variable Thickness: Unsymmetric Trapezoidals", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 177, No. 4, pp. 479-501.
- (9) Dokainish, M. and Rawtani, S., 1971, "Vibration Analysis of Rotating Cantilever Plates", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 3, pp. 233-248.
- (10) Ramamurti, V. and Kielb, R., 1984, "Natural Frequencies of Twisted Rotating Plates", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 97, No. 3, pp. 429-449.
- (11) 김성균, 유희희, 2001, "병진 가속도 운동을 하는 외팔 평판의 진동 해석", *대한기계학회 춘계학술대회 논문집(A)*, pp. 349-354.
- (12) Leissa, A. W., 1969, *Vibration of Plates*, NASA SP-160.