

대칭면을 갖는 단일 강체의 순수 병진 및 순 짝힘 모우드 해석

Analysis for Pure Translation and Couple Modes of an Elastically Suspended Rigid Body with Planes of Symmetry

김동욱*·최용제**

Dong-Wook Kim and Yong Je Choi

Key Words : Center of Elasticity(탄성중심), Plane of Symmetry(대칭평면), Screw Theory(나선이론), Vibration Axis(진동축), Vibration Mode(진동모우드)

ABSTRACT

For an elastically suspended rigid body with the planes of symmetry in a three dimensional space, a novel analysis for the vibration modes is presented. From the decompositions of the stiffness and inertia matrices, the conditions for the existence of pure translation and pure couple modes are analyzed for an elastically suspended rigid body with the planes of symmetry. From this analysis, it can be showed that how the structure of stiffness and inertia must be related in order to produce the pure translation and pure couple modes when an elastically suspended rigid body has one, two, or three planes of symmetry.

1. 서론

Lipkin 과 Patterson 는^(1,2) 공간상에서 탄성체로 지지된 단일 강체의 강성 행렬을 대각화 시키기 위해 고유 뒀치들과 고유 트위스트들로 구성된 합동 변환을 유도하고, 탄성 중심으로부터 고유 뒀치들까지의 세 개의 수직 벡터들의 합은 0 이며, 탄성중심으로부터 고유트위스트들까지의 세 개의 수직 벡터들의 합은 0 이라는 것을 증명하였다. Ciblak 과 Lipkin 은⁽³⁾ 고유 뒀치들과 고유 트위스트들의 위치들은 탄성과 순운동 중심들의 위치들과 관련이 있다는 것을 증명하였다. Lipkin 은⁽⁴⁾ 강성 행렬의 분해와 같이 두 특이 고유치 문제들로 구성된 질량 행렬의 분해를 제안하였다. Blanchet 와 Lipkin 은⁽⁵⁾ 평면 운동을 하는 단일 강체의 진동 모우드를 기하학적으로 설명하고 진동 중심을 구하는 해석식을 제시하였다. Dan 과 Choi 는⁽⁶⁾ 공간상에서 탄성체로 지지되어 있고, 대칭면을 가진 단일 강체의 진동 모우드에 대한 기하학적 의미를 규명하였으며, 강성의 대칭 외평면에 대한 3 차식을 제시하였다. 본 논문에서는 공간상에서 탄성체로 지지 되어 있고, 대칭면을 가진 단일 강체의 강성 및 관성 행렬들의 분해에 의하여 순수 병진 모우드와 순 짝힘 모우드가 존재할 조건들을 해석하였다.

2. 모우드들의 정의

3 차원 공간에서 탄성적으로 지지되어 있는 단일 강체에 대한 자유 진동은 질량 중심에서 다음과 같이 표현될 수 있다 (Fig. 1 참조).

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{T}} + \mathbf{K}\mathbf{T} = \mathbf{0} \quad (1)$$

여기서 \mathbf{M} 과 \mathbf{K} 는 6×6 관성과 강성 행렬이다. 미소 변위 트위스트는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\mathbf{T} = \hat{\mathbf{T}} e^{j\omega t} \quad (2)$$

여기서

$$\hat{\mathbf{T}} = [\delta_x \ \delta_y \ \delta_z \ \phi_x \ \phi_y \ \phi_z]^T \quad (3)$$

고유값 문제는 식 (2)를 식 (1)에 대입하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M})\hat{\mathbf{T}} = \mathbf{0} \quad (4)$$

순수 병진과 순 짝힘 모우드들은 수학적으로 다음과 같이 정의된다.

2.1 순수 병진 모우드

순수 병진 모우드에 대한 변위 트위스트를

$\hat{\mathbf{T}} = [\delta^T \ \mathbf{0}^T]^T$ 로 표현하면, 식 (4)는 다음과 같이

* 회원, 연세대학교 기계공학과 대학원

E-mail : dwkim0215@hanmir.com
Tel : (02) 2123-2826, Fax : (02) 312-2159

** 회원, 연세대학교 기계공학과 대학원

표현할 수 있다.

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \begin{bmatrix} \delta \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (5)$$

반작용 톨치를 $\hat{w}_r = \begin{bmatrix} f_r^T & \tau_r^T \end{bmatrix}^T$ 로 표현하면, 식 (5)는 다음과 같은 두 식으로 나눌 수 있다.

$$\mathbf{K} \begin{bmatrix} \delta \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_r \\ \tau_r \end{bmatrix} \quad \omega^2 \mathbf{M} \begin{bmatrix} \delta \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_r \\ \tau_r \end{bmatrix} \quad (6)$$

2.2 순 짝힘 모우드

순 짝힘 톨치는 $\hat{w} = \begin{bmatrix} 0^T & \tau^T \end{bmatrix}^T$ 로 표현할 수 있으며, 반작용 트위스트를 $\hat{\tau}_r = \begin{bmatrix} \delta_r^T & \phi_r^T \end{bmatrix}^T$ 로 표현한다면, 식 (4)는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\mathbf{K} \begin{bmatrix} \delta_r \\ \phi_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau \end{bmatrix} \quad \omega^2 \mathbf{M} \begin{bmatrix} \delta_r \\ \phi_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau \end{bmatrix} \quad (7)$$

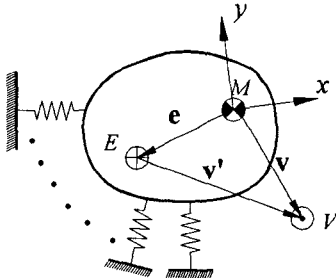


Fig. 1 Points and Vectors

3. 순수 병진과 순 짝힘 모우드들

3.1 대칭 평면이 한 개일 때의 진동축들 (XY 평면이 대칭 평면인 경우)

3.1.1 대칭 안평면 진동축들

한 개의 대칭 평면에 대해서는 XY 평면이 대칭 평면인(Fig. 1에서 $e_z = 0$, 단, M, E, V는 각각 질량 중심, 탄성 중심, 진동중심을 나타낸다) 경우만을 고려한다. 왜냐하면 다른 평면이 대칭인 경우도 해석 방법이 동일하기 때문이다.

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \phi_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_x & 0 & -e_y k_x \\ 0 & k_y & e_x k_y \\ -e_y k_x & e_x k_y & (k_y + e_y^2 k_x + e_x^2 k_y) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ \phi_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

1) 순수 병진 모우드

순수 병진 모우드들의 발생조건들을 조사하기 위해, 먼저 식 (6)을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\omega^2 \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{rx} \\ f_{ry} \\ \tau_z \end{bmatrix} \quad (9)$$

이제, 식 (9)로부터, 반작용 톨치는 다음과 같이 표현된다.

$$\tau_z = 0 \quad f_r = \begin{bmatrix} f_{rx} \\ f_{ry} \end{bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} m \delta_x \\ m \delta_y \end{bmatrix} \quad (10)$$

식 (6)과 (10)으로부터, 다음을 얻는다.

$$\begin{bmatrix} k_x \delta_x \\ k_y \delta_y \\ -e_y k_x \delta_x + e_x k_y \delta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{rx} \\ f_{ry} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

구속 방정식은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\frac{e_y}{e_x} = \frac{k_y \delta_y}{k_x \delta_x} \quad (12)$$

식 (11)과 (12)로부터,

$$\frac{f_{rx}}{f_{ry}} = \frac{e_x}{e_y} \quad (13)$$

위의 식 (13)으로부터, 순 짝힘은 0 이고 그것은 벡터 e 와 평행하므로 반작용 톨치는 탄성 중심과 질량 중심을 통과하는 순수 힘이 된다. 식 (12)로부터, 구속 방정식은 병진 방향을 다음과 같이 표현한다.

$$\delta = \begin{bmatrix} \delta_x \\ \delta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_y e_x \\ k_x e_y \end{bmatrix} \quad (14)$$

이제 $\begin{bmatrix} \omega^2 m \delta_x \\ \omega^2 m \delta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_x \delta_x \\ k_y \delta_y \end{bmatrix}$ 로부터, 다음의 관계를 얻을 수 있다.

$$\omega^2 = \frac{k_x}{m} = \frac{k_y}{m} \quad (15)$$

식 (14)와 (15)는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned} m(k_x - k_y)\delta_x \delta_y &= \\ mk_x k_y (k_x - k_y) e_x e_y &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

위 식은 질량 중심을 통과하여 지나가는 선분의 방향을 표현한다. 순수 병진 모우드는 \mathbf{K} 와 \mathbf{M} 이 하나의 공통된 고유 뒀치를 가질 때 존재하므로, 만일 식 (16)이 만족되면, 순수 병진 모우드는 존재하게 된다. m , k_x , 그리고 k_y 가 0이 아니므로, 식 (16)을 만족시키는 경우는 다음과 같은 3가지 경우이다.

경우-1: x 축이 공통 고유 뒀치인 경우, $e_y = 0$ 이 되어 식 (16)을 만족시킬 수 있다.

경우-2: y 축이 공통 고유 뒀치인 경우, $e_x = 0$ 이 되어 식 (16)을 만족시킬 수 있다.

경우-3: $k_x - k_y = 0$ 인 경우, 식 (16)은 질량 중심에 대한 탄성 중심의 위치에 상관없이 항상 만족시킬 수 있다. 그것은 탄성 중심과 질량 중심을 통과하는 어떤 선분이든지 순수 병진 모우드를 발생시키는 공통 고유 뒀치가 됨을 뜻한다. 위의 3가지 경우들 중에서 마지막 경우만을 고려하기로 하자. 왜냐하면 나머지 두 경우는 두개의 대칭 평면을 갖는 경우와 같기 때문이다. 그러므로, $k_x = k_y = k$ 일때,

$$\frac{e_y}{e_x} = \frac{\delta_y}{\delta_x} \quad (17)$$

이다. 또한, $v_y = \frac{v_x e_y k_x}{e_x k_y + v_x (k_x - k_y)}$ 로부터,⁽⁵⁾

$$\frac{v_y}{v_x} = \frac{e_y}{e_x} \quad (18)$$

그러므로, \mathbf{XY} 평면이 대칭이고 ($e_z = 0$), $k_x = k_y = k$ 인 경우 순수 병진 모우드는 고유 진동수가 $\omega^2 = \omega_x^2 = \omega_y^2$ 일 때 $\delta = e = v$ 방향으로 생

긴다 (Fig. 2 참조). 반작용 뒀치가 순수 힘이므로, 직교성 조건들로부터,⁽⁷⁾

$$\hat{\mathbf{T}}_i^T \hat{\mathbf{w}}_i = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{p}}_i^T & \phi_i^T \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_i \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \delta_i^T \mathbf{f}_i = 0 \quad (i \neq 1) \quad (19)$$

$$\text{Or, } \hat{\mathbf{T}}_i^T \hat{\mathbf{w}}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0}^T & \phi_i^T \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_i \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = 0 \quad (i \neq 1) \quad (20)$$

식 (19)와 (20)으로부터, 나머지 두 진동축들의 모우드들 중에서 병진 부분들은 반작용 뒀치에 수직되어야 하거나 또는 나머지 두 모우드들은 순수 회전들이어야 한다는 것을 알 수 있다.

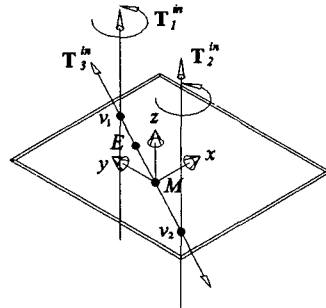


Fig. 2 In-plane Axes of Vibration when $k_x = k_y = k$

2) 순 짝힘 모우드

순 짝힘 모우드들의 발생 조건들을 조사하기 위해, 식 (7)을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\omega^2 \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{xr} \\ \delta_{yr} \\ \phi_{zr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau_z \end{bmatrix} \quad (21)$$

또한, 식 (21)로부터, \mathbf{M} 이 정칙(non-singular) 행렬이므로 다음을 얻는다.

$$\delta_{xr} = \delta_{yr} = 0, \quad \tau_z = \omega^2 I_z \phi_{zr} \quad (22)$$

따라서, z 축의 순 짝힘 모우드는 질량 중심에서 z 축에 관한 순수 회전을 알 수 있으며, 식 (7)과 (22)로부터 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} -e_y k_x \\ e_x k_y \\ (k_y + e_y^2 k_x + e_x^2 k_y) \end{bmatrix} \phi_{zr} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega^2 I_z \phi_{zr} \end{bmatrix} \quad (23)$$

만일 ϕ_{zr} 이 0이면, \mathbf{K} 가 정칙(non-singular) 행렬

이므로 운동이 발생하지 않아, e_x 와 e_y 가 0 이 되어야 한다. 즉, z 축의 순 짝힘 모우드는 탄성 중심과 질량 중심이 일치되고 ($e_x=e_y=0$), \mathbf{K} 와 \mathbf{M} 이 z 방향으로 공통된 고유 트위스트를 가질 때만이 존재한다. 그러나, 한 개의 대칭 평면을 가질 경우 e_x 와 e_y 가 0 이 될 수가 없으므로 ϕ_{zr} 이 0 이 되어야 한다. 그러므로, z 축의 순 짝힘 모우드는 존재할 수가 없다.

4.1.2 대칭 외평면 진동축들

XY 평면이 대칭 평면인 경우 ($e_z=0$),

$$\begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & I_x & 0 \\ 0 & 0 & I_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_z \\ \phi_x \\ \phi_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_z & e_y k_z & -e_x k_z \\ e_y k_z & (k_\alpha + e_y^2 k_z) & -e_x e_y k_z \\ -e_x k_z & -e_x e_y k_z & (k_\beta + e_x^2 k_z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_z \\ \phi_x \\ \phi_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (24)$$

1) 순수 병진 모우드

순수 병진 모우드들의 발생 조건들을 조사하기 위해, 식 (6)으로부터 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\omega^2 \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & I_x & 0 \\ 0 & 0 & I_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_z \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{rz} \\ r_{rx} \\ r_{ry} \end{bmatrix} \quad (25)$$

식 (25)로부터, 반작용 토크는 다음과 같이 된다.

$$f_{rz} = \omega^2 m \delta_z \quad \tau = \begin{bmatrix} r_{rx} \\ r_{ry} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

따라서, 식 (6)과 (26)으로부터 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} k_z \\ e_y k_z \\ -e_x k_z \end{bmatrix} \delta_z = \begin{bmatrix} \omega^2 m \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \delta_z \quad (27)$$

e_x , e_y 와 k_z 가 0 이 아니므로, δ_z 가 0 이 되어야 한다. 그러므로, 한 개의 대칭 평면을 가진 경우, z 축의 병진 모우드는 존재할 수가 없다. 왜냐하면, z 축의 병진 모우드는 탄성 중심과 질량 중심

이 일치되고 ($e_x=e_y=0$), \mathbf{K} 와 \mathbf{M} 이 z 축 방향으로의 공통 고유 토크를 가질 때만이 존재할 수가 있기 때문이다.

2) 순 짝힘 모우드

순 짝힘 모우드들의 발생 조건들을 조사하기 위해, 식 (7)로부터,

$$\omega^2 \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & I_x & 0 \\ 0 & 0 & I_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{zr} \\ \phi_{xr} \\ \phi_{yr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r_x \\ r_y \end{bmatrix} \quad (28)$$

식 (28)로부터, m 이 0 이 아니므로

$$\delta_{zr} = 0, \quad \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega^2 I_x \phi_{xr} \\ \omega^2 I_y \phi_{yr} \end{bmatrix} \quad (29)$$

식 (7)과 (29)로부터,

$$\begin{bmatrix} k_z & e_y k_z & -e_x k_z \\ e_y k_z & (k_\alpha + e_y^2 k_z) & -e_x e_y k_z \\ -e_x k_z & -e_x e_y k_z & (k_\beta + e_x^2 k_z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \phi_{xr} \\ \phi_{yr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ r_x \\ r_y \end{bmatrix} \quad (30)$$

$e_x k_z \phi_{yr} - e_y k_z \phi_{xr} = 0$ 이므로,

$$\frac{\phi_{yr}}{\phi_{xr}} = \frac{e_y}{e_x} \quad (31)$$

$\begin{bmatrix} (k_\alpha + e_y^2 k_z) & -e_x e_y k_z \\ -e_x e_y k_z & (k_\beta + e_x^2 k_z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{xr} \\ \phi_{yr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega^2 I_x \phi_{xr} \\ \omega^2 I_y \phi_{yr} \end{bmatrix}$ 인 관계로부터 다음을 얻는다.

$$\omega^2 = \frac{(k_\alpha + e_y^2 k_z) \phi_{xr} - e_x e_y k_z \phi_{yr}}{I_x \phi_{xr}} = \frac{-e_x e_y k_z \phi_{xr} + (k_\beta + e_x^2 k_z) \phi_{yr}}{I_y \phi_{yr}} \quad (32)$$

식 (32)는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} (k_\beta I_x - k_\alpha I_y) \phi_{xr} \phi_{yr} &= \\ (k_\beta I_x - k_\alpha I_y) e_x e_y &= 0 \end{aligned} \quad (33)$$

위의 방정식은 질량 중심을 통과하는 선분의 방향

을 표현한다. 순 짝힘 모우드는 \mathbf{K} 와 \mathbf{M} 이 공통 고유 트위스트를 가질 때 존재하므로, 만일 식 (33)이 만족된다면, 순 짝힘 모우드는 존재한다. 식 (33)의 방정식을 만족시키는 경우는 다음과 같은 3 가지 경우이다.

경우-1: x 축이 공통 고유 트위스트일 경우, $e_y = 0$ 이 되어 식 (33)이 만족된다.

경우-2: y 축이 공통 고유 트위스트일 경우, $e_x = 0$ 이 되어 식 (33)이 만족된다.

경우-3: $k_\beta I_x = k_\alpha I_y$ 일 경우, 식 (33)은 질량 중심에 대한 탄성 중심의 위치에 상관없이 항상 만족된다. 이 경우, 탄성 중심과 질량 중심을 통과하는 모든 선분들이 순 짝힘 모우드들을 발생시키는 공통 고유 트위스트가 된다. 위의 3 가지 경우들로부터, 마지막 경우만을 고려하자. 왜냐하면 나머지 두 경우는 대칭 평면이 두개인 경우와 같기 때문이다. 그러므로, \mathbf{XY} 평면이 대칭 평면 ($e_z = 0$) 이고 $k_\beta I_x = k_\alpha I_y$ 인 경우, 순 짝힘 모우드의 진동축은 고유 진동수가 $\omega^2 = \omega_\alpha^2 = \omega_\beta^2$ 이고, \mathbf{e} 와 평행하다 (Fig. 3 참조). $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{e}$ (Fig. 1 참조)이므로,

$$\frac{\phi_{yr}}{\phi_{xr}} = \frac{e_y}{e_x} = \frac{(\omega^2 m - k_z)v_y + e_y k_z}{(\omega^2 m - k_z)v_x + e_x k_z} \quad (34)$$

식 (34)로부터,⁽⁶⁾

$$\frac{e_y}{e_x} = \frac{v_y}{v_x} \quad (35)$$

그러므로,

$$\mathbf{e} = \phi = \mathbf{v} \quad (36)$$

식 (36)은 대칭 안평면 진동축들의 병진 모우드와 같이, 순 짝힘 모우드의 진동축은 \mathbf{e} 와 \mathbf{v} 에 평행하다는 것을 뜻한다. 나머지 두 대칭 외평면 진동축들의 위치들은 다음의 식에 의해 주어진다.

$$\begin{aligned} & e_x^2 k_\alpha k_\beta m^2 v_x^2 - e_x m (-I_x k_\beta k_z + \\ & m(k_\alpha k_\beta + e_x^2 k_\alpha k_z + e_y^2 k_\beta k_z)) v_x \\ & - I_y k_z m (e_x^2 k_\alpha + e_y^2 k_\beta) = 0 \end{aligned} \quad (37)$$

z 축의 순수 병진 모우드는 존재할 수가 없으므로, 직교성 조건으로부터, 남아있는 모우드들의 회전 부분은 한 개의 대칭 평면이 존재하는 경우 순 짝

힘 모우드에 수직 되어야만 한다.

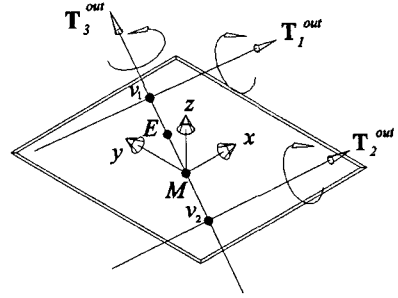


Fig. 3 Out-of-plane Axes of Vibration when $k_\beta I_x = k_\alpha I_y$

3.2 대칭 평면이 두 개일 때의 진동축들 (XY와 ZX 평면들이 대칭인 경우)

3.2.1 대칭 안평면 진동축들

두개의 대칭 평면을 가진 경우, \mathbf{XY} 와 \mathbf{ZX} 평면들이 대칭인 경우 ($e_y = e_z = 0$)만을 고려한다. 나머지 경우들 또한 동일한 해석 방법을 적용할 수 있다.

1) 순수 병진 모우드

식 (6)과 (10)으로부터,

$$\begin{bmatrix} k_x \delta_x \\ k_y \delta_y \\ e_x k_y \delta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{rx} \\ f_{ry} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (38)$$

와 같이 쓸 수 있으며, $e_x k_y \delta_y = 0$ 인 관계로부터, e_x 와 k_y 가 0 이 아니므로 $\delta_y = 0$ 이다. 따라서, 다음의 관계를 얻는다.

$$\omega^2 = \frac{k_x}{m} \quad (39)$$

두개의 대칭 평면 ($e_y = e_z = 0$)을 가진 경우, 대칭 안평면 진동축들의 순수 병진 모우드는 고유 진동수 $\omega^2 = \omega_x^2$ 으로 강성 주축의 x 방향이고, $\delta_x = e_x = v_x$ 이다.

2) 순 짝힘 모우드

식 (7)과 (22)로부터 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ e_x k_y \\ (k_y + e_x^2 k_y) \end{bmatrix} \phi_{zr} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega^2 I_z \phi_{zr} \end{bmatrix} \quad (40)$$

e_x 와 k_y 가 0이 아니므로 ϕ_{zr} 이 0이 되어야 한다. 그러므로, 두 개의 대칭 평면을 가질 경우, z축의 순 짝힘 모우드는 존재할 수가 없다. 왜냐하면 그것은 탄성 중심과 질량 중심이 일치하고, \mathbf{K} 와 \mathbf{M} 이 z축 방향으로의 공통 고유 트위스트를 가질 때만이 존재할 수 있기 때문이다.

3.2.2 대칭 외평면 진동축들

\mathbf{XY} 와 \mathbf{ZX} 평면들이 대칭 평면들인 경우 ($e_y = e_z = 0$),

1) 순수 병진 모우드

이 경우, 식 (6)과 (26)으로부터 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} k_z \\ 0 \\ -e_x k_z \end{bmatrix} \delta_z = \begin{bmatrix} \omega^2 m \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \delta_z \quad (41)$$

e_x 와 k_z 가 0이 아니므로, δ_z 이 0이 되어야 한다. 탄성 중심과 질량 중심이 일치되지 않으므로, 두 개가 대칭 평면인 경우, z축의 병진 모우드는 존재할 수가 없다.

2) 순 짝힘 모우드

식 (7)과 (29)로부터 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} -e_x k_z \phi_{yr} \\ k_\alpha \phi_{xr} \\ (k_\beta + e_x^2 k_z) \phi_{yr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_x \\ \tau_y \end{bmatrix} \quad (42)$$

e_x 와 k_z 이 0이 아니므로, ϕ_{yr} 이 0이 되어야 한다. 따라서 다음의 식을 얻는다.

$$\omega^2 = \frac{k_\alpha}{I_x} \quad (43)$$

두 개가 대칭 평면 ($e_y = e_z = 0$)인 경우, 대칭 외평면 진동축의 순 짝힘 모우드는 고유 진동수가 $\omega^2 = \omega_\alpha^2$ 이고, x강성 주축에 관한 순수 회전이며 순 짝힘 모우드의 진동축은 e_x 와 v_x 에 평행하다. 두 개가 대칭 평면인 경우, z축의 병진 모우드는

존재할 수가 없으므로, 직교성 조건으로부터, 나머지 모우드들의 회전 부분들은 순 짝힘 모우드에 수직 되어야만 한다.

3.3 대칭 평면이 세 개일 때의 진동축들

3.3.1 대칭 안평면 진동축들

$e_x = e_y = e_z = 0$ 인 경우,

1) 순수 병진 모우드

식 (6)과 (10)으로부터,

$$\begin{bmatrix} k_x \delta_x \\ k_y \delta_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{rx} \\ f_{ry} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (44)$$

이 되며, 따라서

$$\omega_x^2 = \frac{k_x}{m} \quad \omega_y^2 = \frac{k_y}{m} \quad (45)$$

을 얻는다. 세 개가 대칭 평면인 경우, 대칭 안평면 진동 모우드들 중에서 순수 병진 모우드는 두 개가 존재하며 고유 진동수는 ω_x^2 , ω_y^2 이고 x, y강성 주축들과 평행하다.

2) 순 짝힘 모우드

식 (7)과 (22)로부터 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k_y \end{bmatrix} \phi_{zr} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega^2 I_z \phi_{zr} \end{bmatrix} \quad (46)$$

따라서, 식 (46)으로부터 다음의 식을 얻는다.

$$\omega_y^2 = \frac{k_y}{I_z} \quad (47)$$

탄성 중심과 질량 중심이 일치하므로, z축의 순 짝힘 모우드는 존재하고 그것은 탄성 중심에서 z축에 관한 순수 회전이며 고유 진동수는 ω_y^2 이다.

3.3.2 대칭 외평면 진동축들

$e_x = e_y = e_z = 0$ 일 때,

1) 순수 병진 모우드

식 (6)과 (26)으로부터,

$$\begin{bmatrix} k_z \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \delta_z = \begin{bmatrix} \omega^2 m \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \delta_z \quad (48)$$

식 (48)로부터,

$$\omega_z^2 = \frac{k_z}{m} \quad (49)$$

탄성 중심과 질량 중심이 일치하므로 순수 병진 모우드는 z 강성 주축 방향이고 고유 진동수는 ω_z^2 이다.

2) 순 짝힘 모우드

식 (7)과 (29)로부터,

$$\begin{bmatrix} 0 \\ k_\alpha \phi_{xr} \\ k_\beta \phi_{yr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \omega^2 I_x \phi_{xr} \\ \omega^2 I_y \phi_{yr} \end{bmatrix} \quad (50)$$

식 (50)으로부터,

$$\omega_\alpha^2 = \frac{k_\alpha}{I_x} \quad \omega_\beta^2 = \frac{k_\beta}{I_y} \quad (51)$$

세 개가 대칭 평면인 경우, 두 개의 순 짝힘 모우드들이 존재하며 그들은 탄성 중심에서 x 와 y 강성 주축들에 관한 순수 회전들이고 고유 진동수는 ω_α^2 , ω_β^2 이다. 그러므로, 세 개가 대칭 평면인 경우 탄성 중심과 질량 중심이 일치하므로 모든 진동 모우드들은 비 연성화 된다.

4. 수치 예

다음의 수치 예는 XY 평면이 대칭 평면인 강체에 대한 것이다. Fig. 4와 같이 사각형의 네 모서리에 각각 세 개의 선형 spring들이 부착되어 있고, 물성치들은 Table 1과 같다.

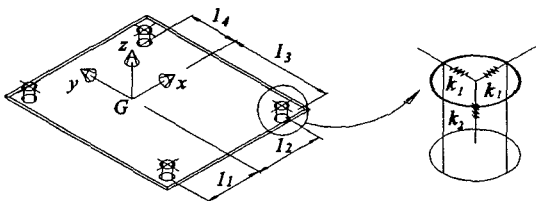


Fig. 4 The Model

Table 1 Material Properties of the Model

m	6Kg	I_x	0.5Kg m^2
k_1	2N/m	I_y	0.5Kg m^2
k_2	3N/m	I_z	1Kg m^2
ℓ_1	0.4m	ℓ_2	0.6m
ℓ_3	0.6m	ℓ_4	0.4m

질량 중심에서의 강성 행렬 $K_G = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & D \end{bmatrix}$ 의 각 성분은 다음과 같다.

$$A = \begin{bmatrix} 4k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 4k_1 & 0 \\ 0 & 0 & 4k_2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2k_1(\ell_3 - \ell_4) \\ 0 & 0 & 2k_1(\ell_2 - \ell_1) \\ 2k_2(\ell_4 - \ell_3) & 2k_2(\ell_1 - \ell_2) & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 2k_2(\ell_3^2 + \ell_4^2) & k_2 a_1 & 0 \\ k_2 a_1 & 2k_2(\ell_1^2 + \ell_2^2) & 0 \\ 0 & 0 & 2k_1 a_2 \end{bmatrix}$$

여기서 $a_1 = \ell_2 \ell_3 + \ell_1 \ell_4 - \ell_1 \ell_3 - \ell_2 \ell_4$ 이고,

$a_2 = \ell_1^2 + \ell_2^2 + \ell_3^2 + \ell_4^2$ 이다. 탄성 중심의 좌표와 탄성 중심에서의 강성 행렬은 다음과 같다.

$$E = (0.1, -0.1, 0)$$

$$K_E = \text{diag}(8 \quad 8 \quad 12 \quad 3 \quad 3 \quad 4)$$

대칭 안평면 진동축들인 경우, $k_x = k_y = k_1$ 이므로 순수 병진 모우드들은 고유 진동수가 $\omega^2 = \omega_x^2 = \omega_y^2$ 이고, $\delta = e = v$ 방향으로 생긴다. v_{xi} , 고유진동수들, 그리고 대칭 안평면 진동축들의 좌표는 다음과 같고, T_3^{in} 가 순수 병진 모우드임을 알 수 있으며, T_1^{in} , T_2^{in} 축들은 각각 좌표가 $(-0.009, 0.009)$, $(9.2757, -9.2757)$ 인 점들에서 XY 평면과 교차한다.

$$[v_{xi}] = [-0.009 \quad 9.2757]$$

$$[\omega_i^{\text{in}}] = [0.6396 \quad 0.1828 \quad 0.0919] \text{Hz}$$

$$[\mathbf{T}_i^{\text{in}}] = \begin{bmatrix} 0.009 & -9.2757 & -0.7071 \\ 0.009 & -9.2757 & 0.7071 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

대칭 외평면 진동축들인 경우는 $k_\beta I_x = k_\alpha I_y$ 이므로, 순 좌회전 모우드의 진동축은 고유 진동수가 $\omega^2 = \omega_\alpha^2 = \omega_\beta^2$ 이고, \mathbf{e} , \mathbf{v} 와 평행하다. \mathbf{v}_{xi} , 고유 진동수들, 그리고 대칭 외평면 진동축들의 좌표는 다음과 같고, $\mathbf{T}_3^{\text{out}}$ 가 순 좌회전 모우드이며, $\mathbf{T}_1^{\text{out}}$, $\mathbf{T}_2^{\text{out}}$ 가 $\mathbf{T}_3^{\text{out}}$ 축상에서 90° 로 교차하는 점들의 좌표는 $(-0.0425, 0.0425)$, $(0.976, -0.976)$ 이다.

$$[\mathbf{v}_{xi}] = [-0.0854 \quad 1.9521]$$

$$[\omega_i^{\text{out}}] = [0.4115 \quad 0.2132 \quad 0.3898] \text{Hz}$$

$$\left[\tan^{-1} \left(\frac{\phi_y}{\phi_x} \right)_i \right] = [45^\circ \quad 45^\circ \quad -45^\circ]$$

$$[\mathbf{T}_i^{\text{out}}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -0.0604 & 1.3811 & 0 \\ 0.7073 & 0.7068 & 0.7071 \\ 0.7069 & 0.7075 & -0.7071 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

대칭 안평면 진동축들의 모우드들과 대칭 외평면 진동축들의 모우드들을 합치면 다음과 같이 전체 모우드 행렬을 구할 수 있다.

$$\Psi = [\mathbf{T}_1^{\text{in}} \quad \mathbf{T}_2^{\text{in}} \quad \mathbf{T}_3^{\text{in}} \quad \mathbf{T}_1^{\text{out}} \quad \mathbf{T}_2^{\text{out}} \quad \mathbf{T}_3^{\text{out}}]$$

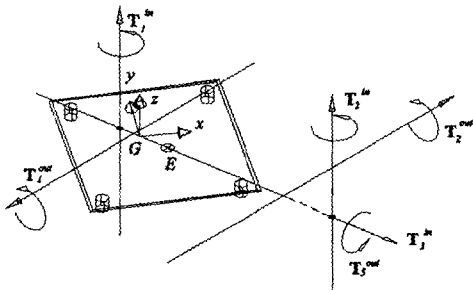


Fig. 5 The Axes of Vibration

5. 결론

강성 및 관성 행렬들의 분해들로부터, 공간상에서 탄성체로 지지 되어있고, 대칭면을 가진 단일 강체에 대하여 순수 병진과 순 좌회전 모우드들이 존재할 조건들을 제시하였다. \mathbf{XY} 평면이 대칭 평면인 경우 ($\mathbf{e}_z = 0$), 순수 병진 모우드는 $k_x = k_y = k$ 일 때만 존재하며, 순 좌회전 모우드는 $k_\beta I_x = k_\alpha I_y$ 인 경우에만 존재할 수 있다. \mathbf{XY} 와 \mathbf{ZX} 평면들이 대칭 평면들인 경우 ($\mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z = 0$), 순수 병진 모우드는 x 강성 주축 방향이며, 순 좌회전 모우드는 x 강성 주축에 관한 순수 회전이다. 대칭 평면이 세 개인 경우는 탄성 중심과 질량 중심이 일치하므로, 모든 진동 모우드들이 비연성화 된다. 그러므로, 세 개의 순수 병진 모우드들과 세 개의 순 좌회전 모우드들이 존재한다.

참고문헌

- (1) Lipkin, H. and Patterson, T., 1992, "Geometrical Properties of Modelled Robot Elasticity: Part I - Decomposition", ASME 1992 Design Technical Conference, Scottsdale, DE-Vol. 45, pp. 179-185.
- (2) Lipkin, H. and Patterson, T., 1992, "Geometrical Properties of Modelled Robot Elasticity: Part II - Center of Elasticity", ASME 1992 Design Technical Conference, Scottsdale, DE-Vol. 45, pp. 187-193.
- (3) Ciblak, N. and Lipkin, H., 1994, "Centers of Stiffness, Compliance, and Elasticity in the Modelling of Robotic Systems", ASME 1994 Design Technical Conferences, Minneapolis, DE-vol. 72, pp. 185-195.
- (4) Lipkin, H., 1996, "Extension of Euler's Principal Axes to Articulated Inertia", ASME 1996 Design Engineering Technical Conference and Computers in Engineering Conference, Irvine, DETC'96/MECH-1166.
- (5) Blanchet, P. and Lipkin, H., 1997, "New Geometric Properties for Modelled Planar Vibration", ASME 1997 Design Engineering Technical Conferences, Sacramento, DETC'97/VIB-4176.
- (6) Dan, B.J. and Choi, Y.J., 1999, "The Geometrical Mode Analysis of a Vibrating System with the Planes of Symmetry", ASME 1999 Design Engineering Technical Conferences, Las Vegas, DETC'99/VIB-8120.
- (7) Blanchet, P. and Lipkin, H., 1998, "Dual Properties for Vibration Analysis Via Screw Theory", ASME 1998 Design Engineering Technical Conferences, Atlanta, DETC'98/MECH-5868.
- (8) Kim, D.W., 2001, Design of a Vibration Absorber via Screw Theory, Ph.D. Thesis, Yonsei University.