

스캐닝 데이터를 이용한 랜덤 가진된 일차원 구조물의 모달 분석

Modal Identification of a randomly excited 1-D structure using Scanned data

경용수* · 왕세명** · 김상명** · 박기환**

Yongsoo Kyong, Semyung Wang, Sang-Myeong Kim and Kyihwan Park

Key Words : LDV(레이저 도플러 진동계), continuous scan(연속 스캐닝), Chebyshev Demodulation(체비셰프 변환)

ABSTRACT

Usually vibration properties are obtained from frequency response functions or impulse response functions of a system. Since the contact type sensors can affect the characteristics of vibrating systems, the non-contact type sensors such as laser Doppler vibrometer (LDV) are being widely used. Currently researches are being carried out in terms of modal analysis using a scanning vibrometer. For the continuous scan; the Chebyshev demodulation (or polynomial) is apparently suggested to extract the mode shapes. With single frequency sinusoidal excitation, this approach is well fitted. In this research, the Chebyshev demodulation technique has been applied to the impact excitation case. The vibration of the tested structure is modeled using impulse response functions. The technique is also adopted to the random excitation case. In order to verify the technique, a simply supported beam was chosen as the test rig. The calculation modules are developed by using MATLAB® in WindowsNT® environment.

1. 서론

진동현상은 주위 어디에서나 찾아볼 수 있다. 사람의 목소리, 걷는 모습, 또는 악기(樂器) 등에서 진동에 관한 현상을 알아낼 수 있다. 하지만, 진동은 때에 따라서 재앙을 불러일으키기도 한다. 외부 가진과 구조물 고유 주파수간의 공진현상이 주된 이유인데, 건물을 무너뜨리기도 하고, 교각을 붕괴시키기도 한다. 이러한 결과를 피하기 위해서 구조물의 진동현상을 미리 알아내는 것은 중요하다[1].

기존의 진동해석에서, 진동 특성은 주로 주파수 응답 함수나 임펄스 응답함수로부터 얻어낸다. 시스템의 응답을 얻기 위해 주로 가속도계가 사용되지만, 이러한 접촉식 계측기는 시스템의 특성을 변화시키는 원인이 되거나 또는 측정하고자 하는 대상체의 범위에 한계가 있다. 따라서, 레이저 도플러 진동 측정계와 같은 비접촉식 계측기의 연구가 활발하게 진행되고 있으며, 또한 널리 쓰이고 있다.

빠른 데이터 확보를 위해 반사경과 구동계를 사용, 레이저로 구조물을 연속 스캐닝하는 방식이 소개되었고,

스캐닝방법과 해석방법에 대한 연구가 동시에 활발히 진행되고 있다. 연속 스캐닝을 이용한 모드 형상 추출에 대한 기존의 연구 결과를 살펴보면, 체비셰프 다항식을 이용한 방법이 주로 사용되고 있고, 주로 단일 주파수로 가진하는 경우에 대해 진행되어 왔다[2-7]. 실제 진동실험에 주로 사용하는 충격 시험이나 랜덤 가진 (random excitation) 시험의 경우에 대해서도 연구가 시작되고 있다[8,9].

본 논문에서는 임펄스 가진된 구조물과 랜덤 가진된 구조물의 모드 형상을 추출하고자 한다. 대상 구조물의 진동 신호는 충격 응답 함수로부터 생성되었고, 랜덤의 경우엔 임의의 랜덤신호와외의 컨볼루션을 취해 신호를 생성하였다. 만들어진 진동신호와 체비셰프 다항식을 이용하여 모드 형상을 복원하였다. 또한, 기존의 접촉식 계측기를 사용하는 경우에 대해서도 적용할 수 있는 진동 해석 모듈을 개발하였다.

계산 모듈의 검증을 위한 이론적인 진동 구조물로는 간단한 일차원의 단순 지지 보 (simply supported beam)가 사용되었다. 모든 계산 모듈은 MS-Window®를 기반으로 상용 수치 계산 프로그램인 MATLAB®을 이용하여 구현되었다.

2. 모드형상 추출 알고리즘

모드 형상의 추출에는 여러 가지 방법이 있으나, Sriram 등이 후처리 과정으로 체비셰프 방법을 제안하

* 광주과학기술원 기전공학과 박사과정
E-mail : yskyong@kjst.ac.kr
Tel : (062)970-2429, Fax : (062)970-2384

** 광주과학기술원 기전공학과 교수

였다[2]. 체비셰프 다항식을 사용하면, 대상체의 시간에 따른 진동속도를 이용하여, 모드형상을 대략적인 수식으로 표현할 수 있다.

2.1 체비셰프 다항식

(1) 사인함수로 가진 할 경우

1차원의 보(beam)가 스캐닝할 대상체이고, 대상체는 물체 자체의 공진주파수중의 하나로 가진되고 있다. 공간의 속도분포는 stationary하다고 가정한다. 스캔은 x축상에서 수행되며, -1 에서 +1 까지 스캔하는 것으로 정규화하였다. 그러면, 측정하는 위치는 다음 식(1)과 같이 표현할 수 있다.

$$x(t) = \cos(\Omega_y t) \quad (1)$$

단, Ω_y 는 스캐닝 주파수이다.

한편, 일차원 모드 형상은 다음과 같이 V_m 을 계수로 하는 m차 다항식으로 표현할 수 있다.

$$\phi(x) = \sum_m V_m x^m \quad (2)$$

위의 측정 위치 식(1)을 식(2)에 대입하면, 모드형상을 시간에 따른 함수로 표현할 수 있다.

$$\phi(x) = \phi[\cos(\Omega_y t)] = \sum_m V_m \cos^m(\Omega_y t) \quad (3)$$

삼각함수의 공식(4)와 type I 체비셰프 다항식(5)를 이용하면,

$$\cos^{2\gamma} \alpha = \frac{1}{2^{2\gamma}} \left\{ \sum_{\beta=0}^{\gamma-1} 2_{2\gamma} C_{\beta} \cos 2(\gamma - \beta)\alpha + 2_{\gamma} C_{\gamma} \right\} \quad (4)$$

$$T_n(x) = \cos(n \cos^{-1} x) \quad (5)$$

모드 형상은 다음 식(6)과 같이 간략하게 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \sum_m V_m \cos^m(\Omega_y t) \\ &= A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} 2A_m \cos(m\Omega_y t) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} &= A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} 2A_m \cos(m \cdot \cos^{-1} x) \\ &= A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} 2A_m T_m(x) \end{aligned}$$

위 식중 A 는 푸리에 계수로서 속도신호를 푸리에 변환하여 얻을 수 있다.

계수를 추출하기 위해, 속도 분포가 다음과 같다고 하면,

$$v(x, t) = \phi(x) \cdot \sin(\omega t) \quad (7)$$

이 속도는 시간의 함수로만 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} v(t) &= A_0 \sin(\omega t) + \sum_{m=1}^{\infty} 2A_m \cos(m\Omega_y t) \cdot \sin(\omega t) \\ &= A_0 \sin(\omega t) + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \{ \sin[(\omega + m\Omega_y) t] + \sin[(\omega - m\Omega_y) t] \} \end{aligned} \quad (8)$$

이때의 계수들이 푸리에 계수이다. 계수를 구하여 위의 모드형상 식(6)에 대입하여 값을 구한다. 이때 계수들은 물체의 공진주파수와 스캐닝 주파수의 배수만큼 떨어진 측파대에서 추출한다. 단, 계수 추출시에 FFT를 취한 데이터의 Phase도 함께 계산하여 비교하여야 한다. 위상이 0이면 계수는 양의 값을 가지고, 위상이 180° 혹은 -180° 이면 부호가 반대가 되어야 한다.

위의 푸리에 계수만으로도 모드형상을 표현하는 것은 가능하나, 이를 오로지 x 의 함수로 나타내기 위해서는 체비셰프 다항식의 특징을 이용해야만 한다.

$$T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0 \quad (9)$$

위의 식으로부터 변환 행렬을 얻을 수 있고, 변환 행렬을 통해 다항식으로 표현이 가능하다.

(2) 충격함수로 가진 할 경우

1차원 보를 충격함수로 가진하고 사인함수로 스캐닝 하는 경우에 대한 simulation을 수행하였다. 모드형상 추출을 위해 기본적으로 필요한, 속도신호를 만들어 내었다. 시간에 따른 속도신호는 system과 impulse response function을 이용하여 다음 식 (10)과 같이 표현하였다.

$$v(x_o, t) = \sum_{n=1}^N Y_n(\omega) \phi_n(x_f) \phi_n(x_o) \\ = \sum_{n=1}^N \left[-\frac{\omega_n}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t - \varphi) \right] \phi_n(x_f) \phi_n(x_o) \quad (10)$$

단, x_f 는 가진 위치, x_o 는 측정위치라고 하면, 위의 식 (10)에 사용된 변수들은 아래와 같이 정의될 수 있다.

$$\varphi = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right), \omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} \\ \phi_n(x_f) = \sqrt{2} \sin \frac{n\pi x_f}{L}, \phi_n(x_o) = \sqrt{2} \sin \frac{n\pi x_o}{L}$$

측정 위치가 사인함수를 따라서 대상체를 스캔하므로, 주어진 모달 응답식은 식 (11)과 같이 바뀌게 된다. 이때 측정은 대상체의 끝단에서 시작한다고 가정한다.

$$x_o = -\frac{L}{2} \cos \Omega_y t \quad (11)$$

$$\phi_n(x_f) = \sqrt{2} \cos \frac{n\pi}{L} \left(x_f + \frac{(n-1)L}{2n} \right) \\ \phi_n(x_o) = \sqrt{2} \cos \frac{n\pi}{L} \left(x_o + \frac{(n-1)L}{2n} \right) \\ = \sqrt{2} \cos \frac{n\pi}{L} \left(-\frac{L}{2} \cos \Omega_y t + \frac{(n-1)L}{2n} \right)$$

이러한 모달 응답식을 속도식 (10)에 대입하면, 다음과 같이 시간에 따른 속도식으로 표현이 가능하다

$$v \left(-\frac{L}{2} \cos \Omega_y t, t \right) \\ = \sum_{n=1}^N \left[-\frac{\omega_n}{m\omega_d} \phi_n(x_f) e^{-\zeta\omega_n t} \right] \cdot \sin(\omega_d t - \varphi) \quad (12) \\ \cdot \sqrt{2} \cos \frac{n\pi}{L} \left(-\frac{L}{2} \cos \Omega_y t + \frac{(n-1)L}{2n} \right)$$

이 속도식을 푸리에 변환하면, 대응하는 주파수 응답함수에는 대상체의 고유주파수들과 주위의 측과대들이 나타날것이며, 그 계수는 모드형상 복원에 사용될 것이다.

(3) 랜덤으로 가진 할 경우

1차원 보를 랜덤가진하고 사인함수로 스캐닝 하는 경우에는 convolution을 이용해 속도신호를 발생시킨다.

$$v(x_o, t) = \sum_{n=1}^N \left[\left\{ -\frac{\omega_n}{m\omega_d} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t - \varphi) \right\} \phi_n(x_f) \phi_n(x_o) \right] * F(t) \quad (13)$$

기존의 impulse 응답에 랜덤신호를 convolution함으로서 속도신호를 만들고, 충격함수로 가진하는 경우에 사용된 모달응답식 (11)을 적용하면 다음과 같은 속도신호를 만들어 낼 수 있다.

$$v(\cos \Omega_y t, t) \\ = \sum_{n=1}^N \left[\left\{ -\frac{\omega_n}{m\omega_d} \phi_n(x_f) e^{-\zeta\omega_n t} \right\} \cdot \sin(\omega_d t - \varphi) \cdot \sqrt{2} \cos \frac{n\pi}{L} \left(-\frac{L}{2} \cos \Omega_y t + \frac{L}{2} \right) \right] * F(t) \quad (14)$$

단, 랜덤가진의 경우, 주파수 응답함수를 얻기 위해서 power spectrum을 이용했으며, averaging을 위해 많은 양의 데이터를 사용하였다.

3. Numerical Implementations

신호 처리를 신속히 하기 위해, 특히, FFT 속도를 빠르게 하기 위해 샘플 데이터는 2^n 개를 사용하였다. 그리고, 특정 주파수에서의 계수 추출을 위해, 측정하고자 하는 주파수대에서 충분히 높은 해상도를 가지

도록 하였다. 이론적으로는 대상체를 한번만 스캔하여도 해석에 충분한 데이터를 얻을 수 있으나, 랜덤가진 경우 많은 양의 데이터를 필요로 하였다. 충격 가진의 경우나 랜덤 가진의 경우에 고유주파수와 측파대의 주파수응답 함수의 절대값을 구하기 위해 기존의 curve fitting을 사용하게 되면, 계산이 복잡하여 많은 시간이 소요될 수 있다.

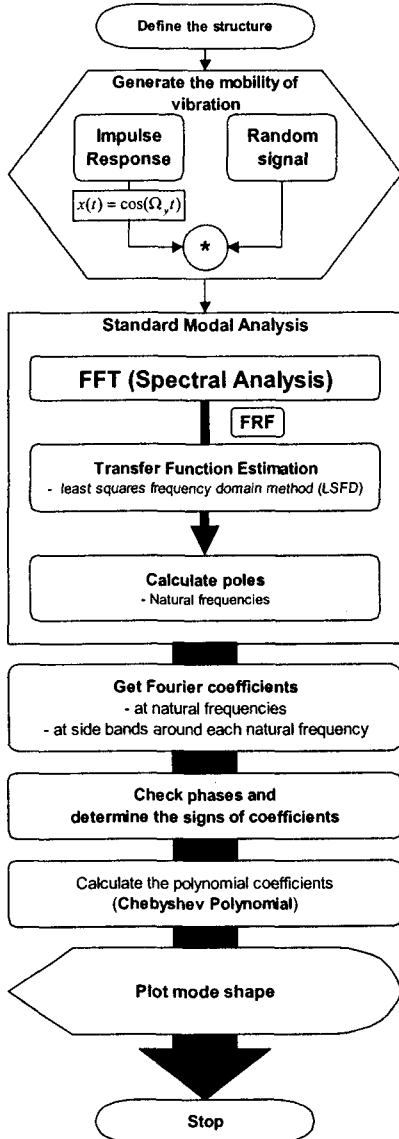


Fig. 1 Modal identification with scanned data from a random excitation

3.1 순서도

수치실험의 과정을 그림 1과 같이 순서도로 나타내었다.

4. Numerical Experiments

그림 2와 같은 단순지지보를 대상체로 하여 수치실험을 수행하였다. 보는 표 1의 물성치를 가지고 있으며, 연속체라고 가정하였다.

Table 1. Dimensions and Properties of the simply supported beam

| Property name | Character | Variable (Program) | Value |
|------------------------|-----------|--------------------|--------------------------|
| Density | ρ | rho | 7.85e3 kg/m ³ |
| Young's Modulus | E | E | 200 GPa |
| Width of cross section | w | wid | 5e-3 m |
| Thickness of beam | t | th | 5e-3 m |
| Length of beam | L | L | 1 m |

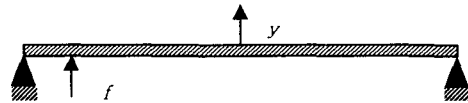


Fig. 2 Simply Supported Beam

위의 물성치를 이용해 대상체의 고유주파수를 구하면 표 (2)와 같다. 그러나 본 수치 실험에서는 고유주파수를 정수로 반올림하여 사용하였다. 신속한 데이터 처리를 위해 1초 동안의 속도신호를 발생시켰다. 모든 그림은 표 (3)에 정리하였다.

Table 2. Analytic solutions of 3 natural frequencies

| Mode number | Natural frequency in Hz | Natural frequency in rad |
|-------------|-------------------------|--------------------------|
| 1 | 11.444 | 71.905 |
| 2 | 45.776 | 287.62 |
| 3 | 102.99 | 647.15 |

4.1 Impact Testing Simulation

(1) $\zeta = 0$ 인 경우

3개의 모드를 동시에 고려하여 1Hz로 대상체를 스

캔할 때의 신호를 발생시키고 모드형상을 복원하였다.

(2) $\zeta = 0.01$ 인 경우

댐핑이 증가했을 때 1Hz의 주파수로 스캔을 하면 모드형상이 현저히 왜곡됨을 확인하였다. 따라서, 스캔 주파수를 2Hz로 하여 수행하였다. 스캔을 빠르게 한 결과, 모드형상이 엄밀해와 비슷해짐을 확인할 수 있었다. 스캐닝을 더 빠르게 할 경우(5Hz)를 살펴보면 표 (3)과 같다.

5Hz로 스캔할 경우의 두번째와 세번째 모드형상은 거의 엄밀해와 비슷함을 보였다. 하지만, 첫번째 모드형상을 통해 다음과 같은 고찰을 할 수 있었다. 측파대는 고유주파수 주위에 생기는데, 스캐닝 주파수의 배수마다 나타난다. 그리고 고려할 측파대의 개수는 최종적으로 재구성될 모드형상식의 차수와 비례한다. 모드형상식의 차수는 실제모드형상을 복원하는 정확도와 비례한다. 즉, 차수가 높을수록 복잡한 모드형상을 정확히 표현할 수 있다는 말이다. 그러나 주파수 변환 데이터의 그림에 나타나 있다시피, 충분히 떨어져 있는 모드(well-separated mode)가 아닌 이상 서로의 고유주파수에 따른 측파대들이 중첩되지 않을 수 없다. 예를 들어, 고주파 영역에서 충분히 떨어지지 못한 모드들의 모드형상을 복원하는 경우에, 모드형상의 차수를 낮추면 정확히 표현할 수 없고, 차수를 높이면 위의 그림처럼 왜곡된 모드 형상을 얻게 된다.

4.2 Random Testing Simulation

(1) $\zeta = 0$ 인 경우

랜덤가진의 경우 주파수 응답함수 추정을 위해 spectral analysis를 이용하게 되는데 이때 데이터의 양이 많아야 한다.

5. 결론

본 연구를 통해, 스캔 데이터를 이용한 진동모드형상 추출 프로그램이 개발되었다. 충격가진과 랜덤가진의 경우에 대해 체비셰프 다항식을 이용하여 모드형상을 재구성하였다.

진동하고 있는 물체를 스캔하였을 때의 속도신호를 이상적인 경우에 대해 발생시켰다. 그 신호를 사용하여 모드형상을 추출하는 작업을 수행하였으며, 이상적인 형상과 비교하였다.

대상체의 감쇠정도를 변화시켜가면서 해석을 수행한

결과, 모드형상을 보다 정확히 재구성하려면 감쇠가 클수록 스캐닝 속도도 빨라져야 한다는 결론을 얻게 되었다.

하지만, 스캐닝 속도가 빨라지면, 고유주파수 및 측파대 간의 주파수 응답이 중첩되는 경우가 발생할 가능성이 높아진다.

따라서, 이를 해결하는 방법에 대한 연구와 실험을 통한 검증이 진행되어야 할 것이다.

후 기

이 연구는 2001년도 산자부 산업기술개발사업에 의하여 지원되었음.

참 고 문 헌

- (1) D. J. Ewins, 1984, Modal Testing: Theory and Practice, Research Studies Press Ltd., John Wiley & Sons Inc., England.
- (2) P. Sriram, S. Hanagud, J. Craig and N. M. Komerath, "Scanning Laser Doppler Technique for velocity profile sensing on a moving surface" Applied Optics, Vol.29, No.16, 1990, pp.2409-2417.
- (3) P. Sriram, Sathya V. Hanagud and James I. Craig, "Scanning Laser Doppler Technique for Modal Testing of Distributed-Parameter Systems" AIAA Journal, Vol.30, No.3, 1992, pp.765-766.
- (4) P. Sriram, S. Hanagud and J. I. Craig, "Mode Shape Measurement Using a Scanning Laser Doppler Vibrometer" The International Journal of Analytical and Experimental Modal Analysis, Vol.7, No.3, 1992, pp.169-178.
- (5) A. B. Stanbridge and D. J. Ewins, "Structural Modal Analysis Using A Scanning Laser Doppler Vibrometer" International Forum On Aeroelasticity and Structural Dynamics, 1995, pp.85.1-85.7.
- (6) A. B. Stanbridge and D. J. Ewins, "Using a Continuously-Scanning Laser Doppler Vibrometer for Modal Testing" Proc. Of IMAC XIV, 1996, pp.816-822.
- (7) A. B. Stanbridge and D. J. Ewins, "Modal Testing Using A Scanning Laser Doppler Vibrometer" Mechanical Systems and Signal Processing, Vol.13, No.2, 1999, pp.255-270.
- (8) A. B. Stanbridge, M. Martarelli and D. J. Ewins, "The Scanning Laser Doppler Vibrometer Applied to Impact Modal Testing" Proc. Of IMAC XVII, 1999, pp.986-991.
- (9) A. B. Stanbridge, A. Z. Khan and D. J. Ewins, "Modal testing using impact excitation and a scanning LDV" Shock and Vibration, 7, 2000, pp.91-100.
- (10) Sang-Myeong Kim, Lecture Notes on Special Topics in Noise and Vibration, 2000.

Table 3. Table of Mode shapes for each case

| 가진 방법 | Impact testing | | | Random testing |
|----------------------------|----------------|----------------|-----|----------------|
| 댐핑 | $\zeta = 0$ | $\zeta = 0.01$ | | $\zeta = 0$ |
| 스캔 주파수 | 1Hz | 2Hz | 5Hz | 1Hz |
| Time data | | | | |
| FRF | | | | |
| 1 st mode shape | | | | |
| 2 nd mode shape | | | | |
| 3 rd mode shape | | | | |