

홈이 회전하는 빗살무늬 저널 베어링의 안정성 해석

Stability Analysis of a Herringbone Grooved Journal Bearing with Rotating Grooves

윤진욱* · 장건희**
Jinwook Yoon and Gunhee Jang

Key Words : Herringbone grooved journal bearing(빗살무늬 저널 베어링), HDD (하드 디스크 드라이브), Stability analysis(안정성 해석), Parametrically excited system(계수가진계)

ABSTRACT

This paper presents an analytical method to investigate the stability of a hydrodynamic journal bearing with rotating herringbone grooves. The dynamic coefficients of the hydrodynamic journal bearing are calculated using the FEM and the perturbation method. The linear equations of motion can be represented as a parametrically excited system because the dynamic coefficients have time-varying components due to the rotating grooves, even in the steady state. Their solution can be assumed as a Fourier series expansion so that the equations of motion can be rewritten as simultaneous algebraic equations with respect to the Fourier coefficients. Then, stability can be determined by solving Hill's infinite determinant of these algebraic equations. The validity of this research is proved by the comparison of the stability chart with the time response of the whirl radius obtained from the equations of motion. This research shows that the instability of the hydrodynamic journal bearing with rotating herringbone grooves increases with increasing eccentricity and with decreasing groove number, which play the major roles in increasing the average and variation of stiffness coefficients, respectively. It also shows that a high rotational speed is another source of instability by increasing the stiffness coefficients without changing the damping coefficients.

1. 서론

최근 컴퓨터 하드 디스크 드라이브는 큰 저장 용량을 갖으며 더 빠르고 더 조용하게 그리고 보다 안정적으로 작동되도록 요구되고 있다. 빗살무늬 홈이 파인 저널 베어링은 우수한 진동 및 소음 특성 때문에 기존의 볼 베어링을 대체하여 하드 디스크 드라이브용 스피들 모터의 지지 요소로 사용되는 추세이다. 홈이 파여진 위치에 따라서 홈이 회전하는 경우와 홈이 정지하고 있는 경우로 분류될 수 있으며 홈의 위치에 따라서 동특성이 달라진다. 특히 홈이 회전하는 유체 동압 저널 베어링은 주기적인 유막 반력을 발생시켜 결과적으로 스피들 시스템을 가진하게 된다.

많은 연구자들은 유체 동압 저널 베어링의 안정성을 연구해왔다. Pai 와 Majumdar⁽¹⁾는 여러 하중 조건 하에서 플레인 저널 베어링의 안정성을 해석하였다. Jonnadula⁽²⁾ 등은 표면 거칠기가 플레인 저널 베어링의 안정성에 미치는 영향을 해석하였다. Raghunandana 와 Majumdar⁽³⁾는 일정한 방향으로 정하중이 작용하는 경우 비뉴턴 유체가 유체

베어링에 미치는 영향을 분석하였다. Kakoty 와 Majumdar⁽⁴⁾는 유체 관성의 효과를 고려하여 저널 베어링의 안정성을 해석하였다. 그러나 이전의 연구들은 단지 플레인 저널 베어링의 안정성에만 국한되었다.

한편 빗살무늬 저널 베어링의 안정성에 대해 많은 연구가 진행되어왔다. Zirkelback 과 San Andres⁽⁵⁾는 홈이 회전하는 빗살무늬 저널 베어링의 동특성 계수 변화를 고정된 저널 위치에 대해 해석하였다. Jang 과 Yoon⁽⁶⁾은 빗살무늬 홈의 위치에 따른 비선형 운동 방정식을 풀어 유체 동압 저널 베어링의 동적 거동을 해석하였다. Kang⁽⁷⁾ 등은 정, 동특성을 계산하기 위한 수치해석을 수행하였고 또한 8 개의 원형 형상의 홈이 고정된 슬리브에 파여진 빗살무늬 저널 베어링의 안정성을 해석하였다. 그러나 홈이 회전하는 경우에는 정상 상태라 하더라도 동특성 계수가 변화하기 때문에 이전의 연구들은 홈이 회전하는 빗살무늬 저널 베어링의 안정성 해석에 적용할 수 없다.

본 논문은 회전하는 빗살무늬 홈을 갖는 유체 동압 저널 베어링의 안정성을 해석하기 위한 방법을 제시하였다. 동특성 계수는 유한요소법과 섭동법을 이용하여 구하였다. 회전하는 홈은 정상상태에서 동특성 계수를 주기적으로 변화시키므로 선형 운동 방정식은 계수가진(parametrically excited) 계로 생각할 수 있다. 운동 방정식의 해는

* 한양대학교 정밀기계공학과 대학원

** 정회원, 한양대학교 기계공학부

E-mail : ghjang@hanyang.ac.kr
Tel : (02) 2290-0431, Fax : (02) 2292-3406

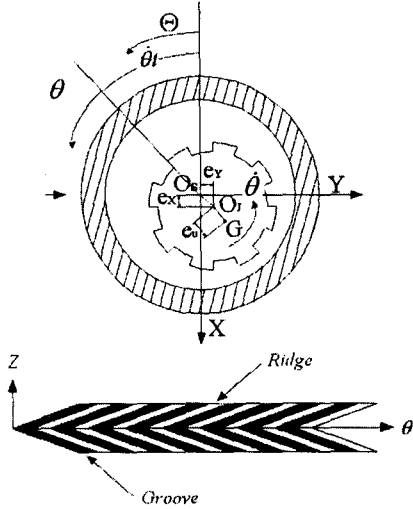


Fig. 1 Coordinate system of the hydrodynamic journal bearing with rotating herringbone grooves

Fourier 급수 전개로 가정할 수 있으며 그 결과 운동 방정식은 Fourier 계수에 대한 선형 대수 방정식으로 표현될 수 있다. 이 대수 방정식으로부터 Hill의 무한 행렬식(Hill's infinite determinant)을 구함으로써 계수가진제의 안정성을 구하게 된다.

2. 해석 방법

2.1 동특성 계수 결정

그림 1은 회전하는 빗살무늬 홈을 갖는 유체 동압 저널 베어링의 좌표계를 나타내고 있다. 원주 좌표계 \$\Theta\$는 음의 X 좌표로부터 결정된다. 레이놀즈 방정식은 그림 1에 나타난 바와 같이 회전하는 저널에 고정된 좌표계(\$x' = R\theta, z'\$)를 사용하여 다음과 같이 표현될 수 있다.⁽⁶⁾

$$\frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial x'} \right) + \frac{\partial}{\partial z'} \left(\frac{h^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z'} \right) = -\frac{R\dot{\theta}}{2} \frac{\partial h}{\partial x'} + \frac{\partial h}{\partial t} \quad (1)$$

유막 두께 \$h\$는 원주좌표 \$\Theta\$에 의해서 홈과 마루 영역에서 각각 다음과 같이 표현된다.

$$h = c_g + c + e_x \cos \Theta + e_y \sin \Theta \quad (2)$$

$$h = c + e_x \cos \Theta + e_y \sin \Theta \quad (3)$$

여기서 \$c\$와 \$c_g\$는 각각 간극과 홈 깊이이다.

원주좌표 \$\Theta\$는 저널의 회전속도 \$\dot{\theta}\$와 회전좌표 \$\theta\$의 함수로 다음과 같이 표현된다.

$$\Theta = \theta + \dot{\theta}t \quad (4)$$

따라서 식 (1)의 유막 두께의 시간변화율은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -\dot{\theta}e_x \sin \Theta + \dot{\theta}e_y \cos \Theta \quad (5)$$

평형 위치에 대한 축의 섭동(\$\Delta x, \Delta y\$)에 대해서 압력 \$p\$와 유막 두께 \$h\$는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$p = p_0 + \sum_{\xi} p_{\xi} \Delta \xi + \sum_{\xi} p_{\xi} \Delta \dot{\xi}, \quad \xi = x, y \quad (6)$$

$$h = h_0 + \Delta x \cos \Theta + \Delta y \sin \Theta \quad (7)$$

여기서 아래첨자 0는 준 평형 상태를 의미한다. 유막 두께의 시간변화율은 다음과 같은 형태로 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial h_0}{\partial t} - \dot{\theta} \Delta x \sin \Theta + \dot{\theta} \Delta y \cos \Theta + \Delta \dot{x} \cos \Theta + \Delta \dot{y} \sin \Theta \quad (8)$$

식 (6), (7) 그리고 (8)을 식 (1)에 대입하면 다음과 같은 5개의 섭동 방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{h_0^3}{12\mu} \frac{\partial p_{\xi}}{\partial x'} \right) + \frac{\partial}{\partial z'} \left(\frac{h_0^3}{12\mu} \frac{\partial p_{\xi}}{\partial z'} \right) = \begin{cases} -\frac{R\dot{\theta}}{2} \frac{\partial h_0}{\partial x'} - \dot{\theta}e_x \sin \Theta + \dot{\theta}e_y \cos \Theta & : \xi = 0 \\ -\frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{h_0^2}{4\mu} \cos \Theta \frac{\partial p_0}{\partial x'} \right) - \frac{\partial}{\partial z'} \left(\frac{h_0^2}{4\mu} \cos \Theta \frac{\partial p_0}{\partial z'} \right) + \frac{R\dot{\theta}}{2} \frac{\partial}{\partial x'} (\cos \Theta) & : \xi = x \\ -\frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{h_0^2}{4\mu} \sin \Theta \frac{\partial p_0}{\partial x'} \right) - \frac{\partial}{\partial z'} \left(\frac{h_0^2}{4\mu} \sin \Theta \frac{\partial p_0}{\partial z'} \right) + \frac{R\dot{\theta}}{2} \frac{\partial}{\partial x'} (\sin \Theta) & : \xi = y \\ R \frac{\partial}{\partial x'} (\sin \Theta) & : \xi = \dot{x} \\ -R \frac{\partial}{\partial x'} (\cos \Theta) & : \xi = \dot{y} \end{cases} \quad (9)$$

식 (9)의 해는 유한요소법을 이용하여 쉽게 구할 수 있다.⁽⁶⁾ 부하용량, 강성과 감쇠 계수는 베어링 영역에서 해를 적분하여 구할 수 있다. 유체 동압과 베어링 반력과의 관계는 다음과 같은 형태로 나타낼 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} = \{F_0\} + [K] \begin{Bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{Bmatrix} + [C] \begin{Bmatrix} \Delta \dot{x} \\ \Delta \dot{y} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

여기서 $\{F_0\}$, $[K]$ 그리고 $[C]$ 는 각각 부하용량, 강성 그리고 감쇠 행렬이며 다음과 같이 표현된다.

$$\{F_0\} = \begin{Bmatrix} F_{x0} \\ F_{y0} \end{Bmatrix} = \iint_A \begin{Bmatrix} -p_0 \cos \Theta \\ -p_0 \sin \Theta \end{Bmatrix} dA \quad (11)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} \\ K_{yx} & K_{yy} \end{bmatrix} = \iint_A \begin{Bmatrix} -\cos \Theta \\ -\sin \Theta \end{Bmatrix} \{p_x \quad p_y\} dA \quad (12)$$

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} \\ C_{yx} & C_{yy} \end{bmatrix} = \iint_A \begin{Bmatrix} -\cos \Theta \\ -\sin \Theta \end{Bmatrix} \{p_x \quad p_y\} dA \quad (13)$$

2.2 계수 가진계의 안정성 해석

두개의 동일한 유체 동압 저널 베어링으로 지지되는, 질량이 m 인 강체 회전자의 운동 방정식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} m0 \\ 0m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} C_{xx} & C_{xy} \\ C_{yx} & C_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} \\ K_{yx} & K_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (14)$$

흙이 회전하는 유체 동압 저널 베어링의 강성 및 감쇠 계수는 유막 두께가 변화하기 때문에 평형 위치라 하더라도 시간에 따라 변화하는 성분을 갖게되며 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$C_{ij} = \alpha_{c_{ij}} + \delta_{c_{ij}} \cos(\chi t + \phi_{c_{ij}}) \quad (15)$$

$$K_{ij} = \alpha_{k_{ij}} + \delta_{k_{ij}} \cos(\chi t + \phi_{k_{ij}}) \quad (16)$$

여기서 α 와 δ 와 χ 그리고 ϕ 는 각각 동특성 계수의 평균값, 변화량, 계수가진 주파수 그리고 위상각이다. 위의 방정식은 Mathieu 방정식의 대표적인 형태인 강성 계수만 시간에 따라 변화하는 경우⁽⁹⁾보다 복잡하다. 그러나 식 (15)와 (16)을 식 (14)에 대입한 후 다음의 행렬을 이용하면 운동 방정식을 고유치 문제로 바꿀 수 있다.

$$\begin{bmatrix} 1 & \beta_1 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\alpha_{k_{xx}}} \begin{bmatrix} \alpha_{k_{xx}} & \alpha_{k_{xy}} \\ \alpha_{k_{yx}} & \alpha_{k_{yy}} \end{bmatrix} \quad (17)$$

식 (17)의 역행렬을 식 (14)에 곱하면 강성 행렬의 대각 요소가 같은 값을 갖는 다음과 같은 형태의 방정식을 구할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} E_1 & E_2 \\ E_3 & E_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 & e_2 \\ e_3 & e_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \cos \chi t - \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \\ f_3 & f_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{Bmatrix} \sin \chi t + \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \cos \chi t - \begin{bmatrix} n_1 & n_2 \\ n_3 & n_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} \sin \chi t = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (18)$$

위 방정식에서 각각의 행렬은 다음과 같이 표현된

다.

$$\begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{bmatrix} = \frac{m}{\beta_3 - \beta_1 \beta_2} \begin{bmatrix} \beta_3 & -\beta_1 \\ -\beta_2 & 1 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\begin{bmatrix} E_1 & E_2 \\ E_3 & E_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{\beta_3 - \beta_1 \beta_2} \begin{bmatrix} \beta_3 \alpha_{c_{xx}} - \beta_1 \alpha_{c_{yx}} & \beta_3 \alpha_{c_{xy}} - \beta_1 \alpha_{c_{yy}} \\ -\beta_2 \alpha_{c_{xx}} + \alpha_{c_{yx}} & -\beta_2 \alpha_{c_{xy}} + \alpha_{c_{yy}} \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\begin{bmatrix} e_1 & e_2 \\ e_3 & e_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{\beta_3 - \beta_1 \beta_2} \times \begin{bmatrix} \beta_3 \delta_{c_{xx}} \cos \phi_{c_{xx}} - \beta_1 \delta_{c_{yx}} \cos \phi_{c_{yx}} & \beta_3 \delta_{c_{xy}} \cos \phi_{c_{xy}} - \beta_1 \delta_{c_{yy}} \cos \phi_{c_{yy}} \\ -\beta_2 \delta_{c_{xx}} \cos \phi_{c_{xx}} + \delta_{c_{yx}} \cos \phi_{c_{yx}} & -\beta_2 \delta_{c_{xy}} \cos \phi_{c_{xy}} + \delta_{c_{yy}} \cos \phi_{c_{yy}} \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\begin{bmatrix} f_1 & f_2 \\ f_3 & f_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{\beta_3 - \beta_1 \beta_2} \times \begin{bmatrix} \beta_3 \delta_{c_{xx}} \sin \phi_{c_{xx}} - \beta_1 \delta_{c_{yx}} \sin \phi_{c_{yx}} & \beta_3 \delta_{c_{xy}} \sin \phi_{c_{xy}} - \beta_1 \delta_{c_{yy}} \sin \phi_{c_{yy}} \\ -\beta_2 \delta_{c_{xx}} \sin \phi_{c_{xx}} + \delta_{c_{yx}} \sin \phi_{c_{yx}} & -\beta_2 \delta_{c_{xy}} \sin \phi_{c_{xy}} + \delta_{c_{yy}} \sin \phi_{c_{yy}} \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$\begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{k_{xx}} & 0 \\ 0 & \alpha_{k_{yy}} \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$\begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ k_3 & k_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{\beta_3 - \beta_1 \beta_2} \times \begin{bmatrix} \beta_3 \delta_{k_{xx}} \cos \phi_{k_{xx}} - \beta_1 \delta_{k_{yx}} \cos \phi_{k_{yx}} & \beta_3 \delta_{k_{xy}} \cos \phi_{k_{xy}} - \beta_1 \delta_{k_{yy}} \cos \phi_{k_{yy}} \\ -\beta_2 \delta_{k_{xx}} \cos \phi_{k_{xx}} + \delta_{k_{yx}} \cos \phi_{k_{yx}} & -\beta_2 \delta_{k_{xy}} \cos \phi_{k_{xy}} + \delta_{k_{yy}} \cos \phi_{k_{yy}} \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$\begin{bmatrix} n_1 & n_2 \\ n_3 & n_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{\beta_3 - \beta_1 \beta_2} \times \begin{bmatrix} \beta_3 \delta_{k_{xx}} \sin \phi_{k_{xx}} - \beta_1 \delta_{k_{yx}} \sin \phi_{k_{yx}} & \beta_3 \delta_{k_{xy}} \sin \phi_{k_{xy}} - \beta_1 \delta_{k_{yy}} \sin \phi_{k_{yy}} \\ -\beta_2 \delta_{k_{xx}} \sin \phi_{k_{xx}} + \delta_{k_{yx}} \sin \phi_{k_{yx}} & -\beta_2 \delta_{k_{xy}} \sin \phi_{k_{xy}} + \delta_{k_{yy}} \sin \phi_{k_{yy}} \end{bmatrix} \quad (25)$$

식 (18)의 계수가진 주파수가 χ 이므로 해는 $T=2\pi/\chi$ 의 주기를 가지는 주기함수이다. 따라서 해 $x(t)$ 는 다음과 같은 성질을 갖게 된다.

$$x(t+T) = \sigma x(t) \quad (26)$$

여기서 σ 는 상수이며 그 크기에 의해 안정성과 불안정성의 경계의 존재를 예상할 수 있다. 즉, $|\sigma| > 1$ 의 경우는 불안정한 해를 가지며, $|\sigma| < 1$ 의 경우 주기해는 안정하다. 또한 $\sigma = \pm 1$ 의 경우가 안정과 불안정의 경계가 된다. $\sigma = +1$ 의 경우 해 $x(t)$ 는 그 주기가 T 이며 $\sigma = -1$ 인 경우는 $2T$ 의 주기를 가지게 된다. 그러나 $\sigma = -1$ 인 경우의 특성 방정식이 $\sigma = +1$ 인 경우의 특성 방정식의 모든 고유치를 포함하므로 본 해석에서는 $\sigma = -1$ 인 경우의 특성 방정식만을 유도하였다. 주기해 $x(t)$

의 주기가 $2T$ 인 경우 식 (26)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$x(t+2T) = x(t) \quad (27)$$

이 경우 응답 $x(t)$ 와 $y(t)$ 는 Fourier 급수를 사용하여 다음과 같이 가정할 수 있다.

$$x = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\chi t}{2} + b_n \sin \frac{n\chi t}{2} \right) \quad (28)$$

$$y = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n \cos \frac{n\chi t}{2} + d_n \sin \frac{n\chi t}{2} \right) \quad (29)$$

여기서 a_n, b_n, c_n 과 d_n 은 Fourier 계수이다.

식 (28)과 (29)의 속도 및 가속도는 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\dot{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-a_n \frac{n\chi}{2} \sin \frac{n\chi t}{2} + b_n \frac{n\chi}{2} \cos \frac{n\chi t}{2} \right) \quad (30)$$

$$\dot{y} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-c_n \frac{n\chi}{2} \sin \frac{n\chi t}{2} + d_n \frac{n\chi}{2} \cos \frac{n\chi t}{2} \right) \quad (31)$$

$$\ddot{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-a_n \frac{n^2 \chi^2}{4} \cos \frac{n\chi t}{2} - b_n \frac{n^2 \chi^2}{4} \sin \frac{n\chi t}{2} \right) \quad (32)$$

$$\ddot{y} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-c_n \frac{n^2 \chi^2}{4} \cos \frac{n\chi t}{2} - d_n \frac{n^2 \chi^2}{4} \sin \frac{n\chi t}{2} \right) \quad (33)$$

식 (28)~(33)을 식 (18)의 운동 방정식에 대입한 후 $\sin n\chi t$, $\cos n\chi t$ 에 관한 성분 그리고 상수에 대하여 정리하고 각 항을 0 으로 두면 a_n, b_n, c_n 과 d_n 에 대한 선형 대수연립 방정식을 얻을 수 있다. 다음의 식은 식 (18)의 첫번째 방정식으로부터 구한 선형 대수연립 방정식이다.

constant ($n=0$):

$$e_1 b_2 \frac{2\chi}{4} + e_2 d_2 \frac{2\chi}{4} + K a_0 + k_1 \frac{a_2}{2} + k_2 \frac{c_2}{2} + f_1 a_2 \frac{\chi}{2} + f_2 c_2 \frac{\chi}{2} - n_1 \frac{b_2}{2} - n_2 \frac{d_2}{2} = 0 \quad (34)$$

$\cos \chi t / 2$ ($n=1$):

$$\begin{aligned} & -m_1 a_1 \frac{\chi^2}{4} - m_2 c_1 \frac{\chi^2}{4} + E_1 b_1 \frac{\chi}{2} + e_1 b_3 \frac{3\chi}{4} + e_1 b_1 \frac{\chi}{4} + E_2 d_1 \frac{\chi}{2} \\ & + e_2 d_3 \frac{3\chi}{4} + e_2 d_1 \frac{\chi}{4} + K a_1 + k_1 \frac{a_3}{2} + k_1 \frac{a_1}{2} + k_2 \frac{c_3}{2} + k_2 \frac{c_1}{2} \\ & + f_1 a_1 \frac{\chi}{4} + f_1 a_3 \frac{3\chi}{4} + f_2 c_1 \frac{\chi}{4} + f_2 c_3 \frac{3\chi}{4} \\ & - n_1 \frac{b_1}{2} - n_1 \frac{b_3}{2} - n_2 \frac{d_1}{2} - n_2 \frac{d_3}{2} = 0 \end{aligned} \quad (35)$$

$\cos \chi t$ ($n=2$):

$$\begin{aligned} & -m_1 a_2 \chi^2 - m_2 c_2 \chi^2 + E_1 b_2 \chi + e_1 b_4 \chi + E_2 d_2 \chi + e_2 d_4 \chi + K a_2 \\ & + k_1 \frac{a_4}{2} + k_1 a_0 + k_2 \frac{c_4}{2} + k_2 c_0 \\ & + f_1 a_4 \chi + f_2 c_4 \chi - n_1 \frac{b_4}{2} - n_2 \frac{d_4}{2} = 0 \end{aligned} \quad (36)$$

$\cos \frac{n\chi t}{2}$ ($n \geq 3$):

$$\begin{aligned} & -m_1 a_n \frac{n^2 \chi^2}{4} - m_2 c_n \frac{n^2 \chi^2}{4} \\ & + E_1 b_n \frac{n\chi}{2} + e_1 \left[\frac{n-2}{4} \chi b_{n-2} + \frac{n+2}{4} \chi b_{n+2} \right] \\ & + E_2 d_n \frac{n\chi}{2} + e_2 \left[\frac{n-2}{4} \chi d_{n-2} + \frac{n+2}{4} \chi d_{n+2} \right] \\ & + K a_n + k_1 \left[\frac{a_{n-2}}{2} + \frac{a_{n+2}}{2} \right] + k_2 \left[\frac{c_{n-2}}{2} + \frac{c_{n+2}}{2} \right] \\ & + f_1 \left[\frac{n+2}{4} \chi a_{n+2} - \frac{n-2}{4} \chi a_{n-2} \right] + f_2 \left[\frac{n+2}{4} \chi c_{n+2} - \frac{n-2}{4} \chi c_{n-2} \right] \\ & - n_1 \left[\frac{b_{n+2}}{2} - \frac{b_{n-2}}{2} \right] - n_2 \left[\frac{d_{n+2}}{2} - \frac{d_{n-2}}{2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (37)$$

$\sin \chi t / 2$ ($n=1$):

$$\begin{aligned} & -m_1 b_1 \frac{\chi^2}{4} - m_2 d_1 \frac{\chi^2}{4} - E_1 a_1 \frac{\chi}{2} - e_1 a_3 \frac{3\chi}{4} + e_1 a_1 \frac{\chi}{4} \\ & - E_2 c_1 \frac{\chi}{2} - e_2 c_3 \frac{3\chi}{4} + e_2 c_1 \frac{\chi}{4} + K b_1 + k_1 \frac{b_3}{2} - k_1 \frac{b_1}{2} + k_2 \frac{d_3}{2} - k_2 \frac{d_1}{2} \\ & - f_1 b_1 \frac{\chi}{4} + f_1 b_3 \frac{3\chi}{4} - f_2 d_1 \frac{\chi}{4} + f_2 d_3 \frac{3\chi}{4} \\ & - n_1 \frac{a_1}{2} + n_1 \frac{a_3}{2} - n_2 \frac{c_1}{2} + n_2 \frac{c_3}{2} = 0 \end{aligned} \quad (38)$$

$\sin \chi t$ ($n=2$):

$$\begin{aligned} & -m_1 b_2 \chi^2 - m_2 d_2 \chi^2 - E_1 a_2 \chi - e_1 a_4 \chi - E_2 c_2 \chi - e_2 c_4 \chi \\ & + K b_2 + k_1 \frac{b_4}{2} + k_2 \frac{d_4}{2} + f_1 b_4 \chi + f_2 d_4 \chi + n_1 \frac{a_4}{2} + n_2 \frac{c_4}{2} = 0 \end{aligned} \quad (39)$$

$\sin \frac{n\chi t}{2}$ ($n \geq 3$):

$$\begin{aligned} & -m_1 b_n \frac{n^2 \chi^2}{4} - m_2 d_n \frac{n^2 \chi^2}{4} \\ & - E_1 a_n \frac{n\chi}{2} + e_1 \left[-\frac{n-2}{4} \chi a_{n-2} - \frac{n+2}{4} \chi a_{n+2} \right] \\ & - E_2 c_n \frac{n\chi}{2} + e_2 \left[-\frac{n-2}{4} \chi c_{n-2} - \frac{n+2}{4} \chi c_{n+2} \right] \\ & + K b_n + k_1 \left[\frac{b_{n-2}}{2} + \frac{b_{n+2}}{2} \right] + k_2 \left[\frac{d_{n-2}}{2} + \frac{d_{n+2}}{2} \right] \end{aligned}$$

Table 1 Design parameters of the herringbone grooved journal bearing

Nominal clearance, c	3 [μm]
Radius, R	0.00175 [m]
Length, L	0.00175 [m]
Fluid viscosity, μ	0.018094 [Pa·s]
Number of grooves, N_g	4, 8 [-]
Groove angle, α	20 [degree]
Groove depth, c_g	4.5 [μm]
Groove width ratio, δ	0.5 [-]
Ambient pressure, p_a	0.0 [N/m^2]

$$\begin{aligned}
 & -f_1 \left[\frac{n-2}{4} \chi b_{n-2} - \frac{n+2}{4} \chi b_{n+2} \right] \\
 & -f_2 \left[\frac{n-2}{4} \chi d_{n-2} - \frac{n+2}{4} \chi d_{n+2} \right] \\
 & -n_1 \left[\frac{a_{n-2}}{2} - \frac{a_{n+2}}{2} \right] - n_2 \left[\frac{c_{n-2}}{2} - \frac{c_{n+2}}{2} \right] = 0 \quad (40)
 \end{aligned}$$

같은 방법으로 유사한 형태의 선형 대수연립 방정식을 식 (18)의 두번째 방정식으로부터 구할 수 있다.

n 개의 Fourier 급수에 대해서 운동 방정식은 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$[P]\{U\} = 0 \quad (41)$$

여기서 행렬 $[P]$ 의 위쪽과 아래쪽 $2n+1$ 개의 요소들은 각각 식 (18)의 첫번째와 두번째 식으로부터 구해진다. 벡터 $\{U\}$ 의 요소는 다음과 같이 Fourier 계수들로 이루어져 있다.

$$\{U\} = \{a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n, c_0, c_1, \dots, c_n, d_1, \dots, d_n\}^T \quad (42)$$

행렬 $[P]$ 의 요소들은 다음과 같은 무차원 변수들을 이용하여 표현된다.

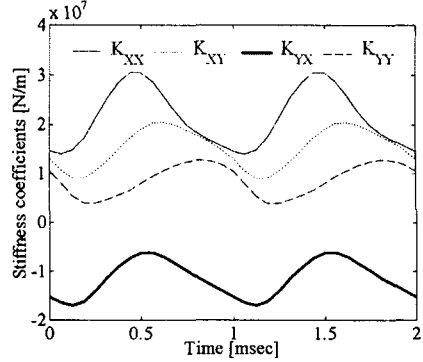
$$\lambda = \frac{K}{m_1 \chi^2} \quad (43)$$

$$\xi_i = \frac{k_i}{m_1 \chi^2}, \quad i=1, \dots, 4 \quad (44)$$

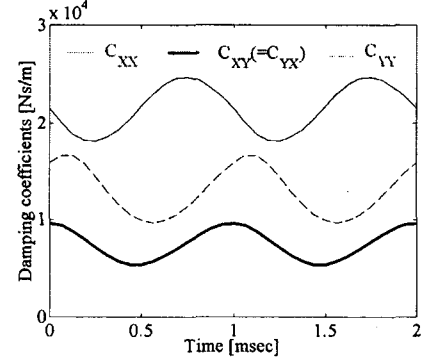
$$\eta_i = \frac{E_i}{m_1 \chi}, \quad i=1, \dots, 4 \quad (45)$$

$$\mu_i = \frac{e_i}{m_1 \chi}, \quad i=1, \dots, 4 \quad (46)$$

$$\kappa_i = \frac{f_i}{m_1 \chi}, \quad i=1, \dots, 4 \quad (47)$$



(a) Stiffness coefficient



(b) Damping coefficient

Fig. 2 Variation of the dynamic coefficients of the hydrodynamic journal bearing at 15,000 rpm ($\epsilon=0.8$ and $N_g=4$)

$$v_i = \frac{n_i}{m_1 \chi^2}, \quad i=1, \dots, 4 \quad (48)$$

식 (41)이 의미없는 해를 갖지 않으려면 행렬 $[P]$ 의 행렬식이 0이 되어야 하며 그 결과 식 (18)의 운동 방정식에 대한 특성 방정식을 얻을 수 있다. 행렬 $[P]$ 의 대각 성분에 λ 만이 포함되어 있으므로 λ 는 행렬 $[P]$ 의 고유치이며 다음과 같이 쓸 수 있다.

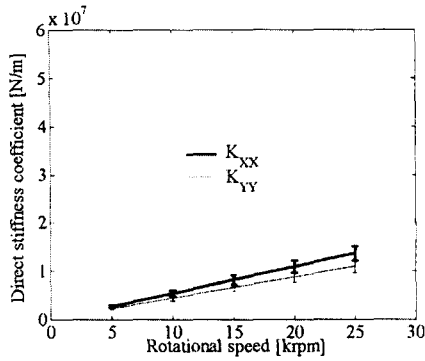
$$[[P]_{\lambda=0}] + \lambda[I] = 0 \quad (49)$$

여기서 $[P]_{\lambda=0}$ 는 행렬 $[P]$ 에서 λ 를 제외한 행렬이고 $[I]$ 는 단위행렬이다. 따라서 식 (49)는 Hill의 무한 행렬식의 형태를 가지며 그 해는 안정과 불안정 영역의 경계가 된다.⁽⁹⁾

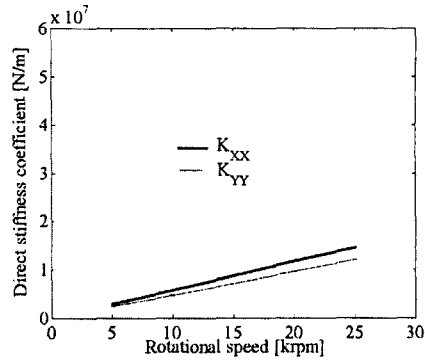
3. 결과

3.1 동특성 계수 해석

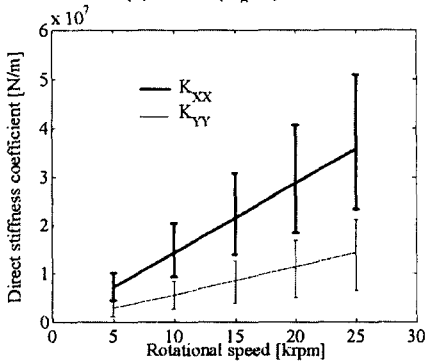
Jang 과 Yoon⁽⁶⁾이 개발한 프로그램을 사용하여



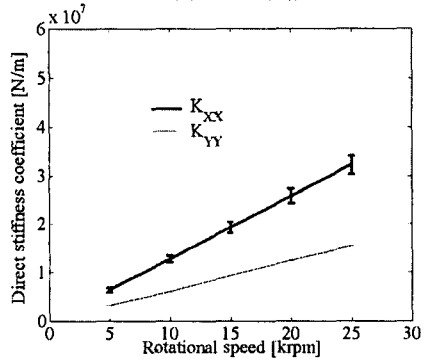
(a) $\epsilon=0.4$ ($N_g=4$)



(b) $\epsilon=0.4$ ($N_g=8$)

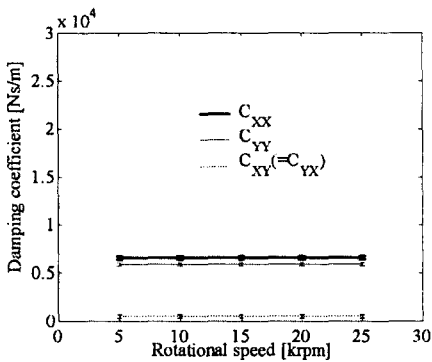


(c) $\epsilon=0.8$ ($N_g=4$)

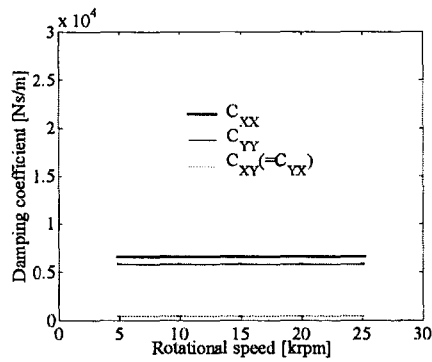


(d) $\epsilon=0.8$ ($N_g=8$)

Fig. 3 Variation of the direct stiffness coefficients for increasing rotational speed



(a) $N_g=4$



(b) $N_g=8$

Fig. 4 Variation of the damping coefficients for increasing rotational speed at $\epsilon=0.4$

회전하는 빗살무늬 홈을 갖는 유체 동압 저널 베어링의 동특성 계수를 구하였다. 표 1은 본 해석에 사용된 빗살무늬 홈이 파인 저널 베어링의 설계 변수를 나타내고 있다. 유막은 4 절점 등방성 요소를 사용하여 64×20 개의 요소로 분할하였으며 원주방향으로 압력이 연속이고 양끝단에서의 압력은 대기압이라는 경계조건을 사용하였다.

그림 2는 편심율이 0.8 이고 15000 rpm의 속도로 회전하고 있는 정상상태에서 홈 수가 4 개인 빗살무늬 저널 베어링의 동특성 계수의 시간변화

를 도시한 것이다. 동특성 계수는 $(60/\theta)/N_g$ 의 주기로 변화한다.⁽⁵⁾ 모든 강성 및 감쇠 계수는 식 (15)와 (16)에서 설명한 바와 같이 θN_g 의 계수가 진 주파수를 갖으며 삼각 함수의 형태로 변화한다고 가정할 수 있다.

그림 3은 각각 두가지 경우의 편심율($\epsilon=0.4$ 와 0.8)과 홈 수($N_g=4$ 와 8)에 대해 회전속도에 따른 강성 계수의 대각 요소의 변화를 나타낸 것이다. 바는 동특성 계수의 최소값과 최대값을 의미한다.

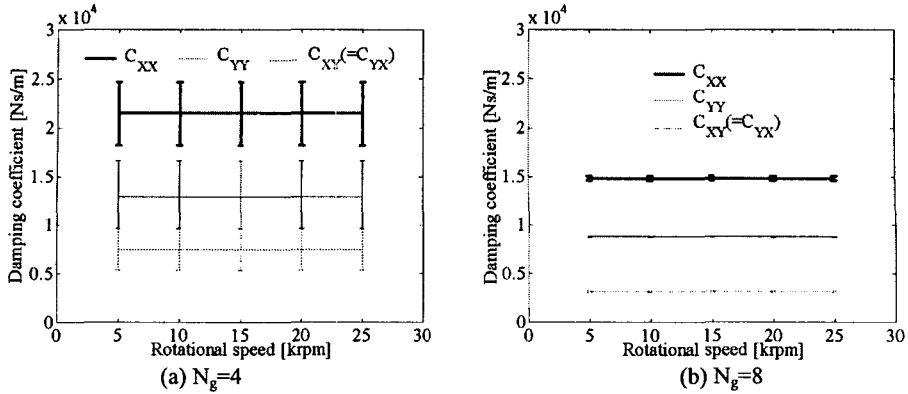


Fig. 5 Variation of the damping coefficients for increasing rotational speed at $\epsilon=0.8$

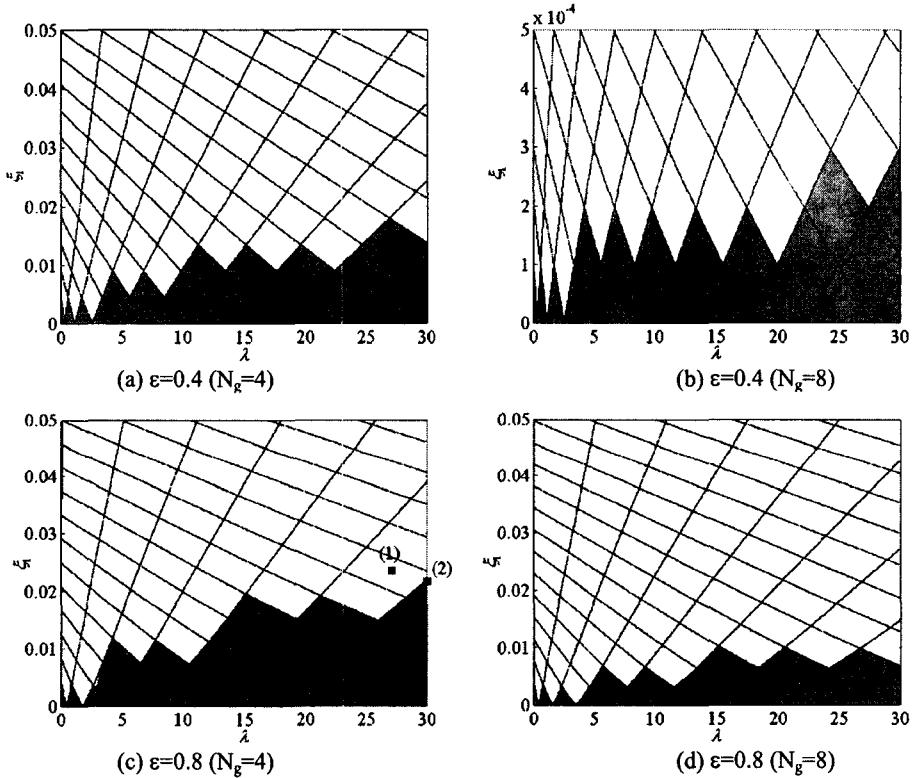


Fig. 6 Stability chart of the hydrodynamic journal bearing with rotating grooves
(□ : stable region, ■ : unstable region)

본 해석 모델에 대해 K_{XX} 가 K_{YY} 보다 크게 나타났다. 강성 계수의 대각 요소의 평균값과 변화량은 회전속도에 비례하여 증가하며 또한 편심율이 커지고 흡수가 작아질수록 증가한다. 회전속도에 따른 강성 계수의 비대각 요소의 변화는 본 해석 모델에 대해 K_{XY} 가 $-K_{YX}$ 보다 크게 나타났다. 강성 계수의 비대각 요소의 평균값과 변화량은 대각 요소의 경우와 마찬가지로 회전속도에 비례하여 증가하며 또한 편심율이 커지고 흡수가 작아질수록 증가한다. 그림 4와 5는 두가지 경우의 편심

율($\epsilon=0.4$ 와 0.8)에 대해서 회전속도에 대한 감쇠 계수의 변화를 도시한 것이다. 감쇠 계수의 평균값과 변화량은 회전속도에는 무관하고 편심율과 흡수에 의해서만 영향을 받아 편심율이 커지고 흡수가 작아질수록 증가한다.

3.2 안정성 해석

3.1 절에서 구한 동특성 계수를 이용하여 흡이 회전하는 유체 동압 저널 베어링의 안정성 해석을 수행하였다. 본 해석에서 사용된 회전자는 컴퓨터

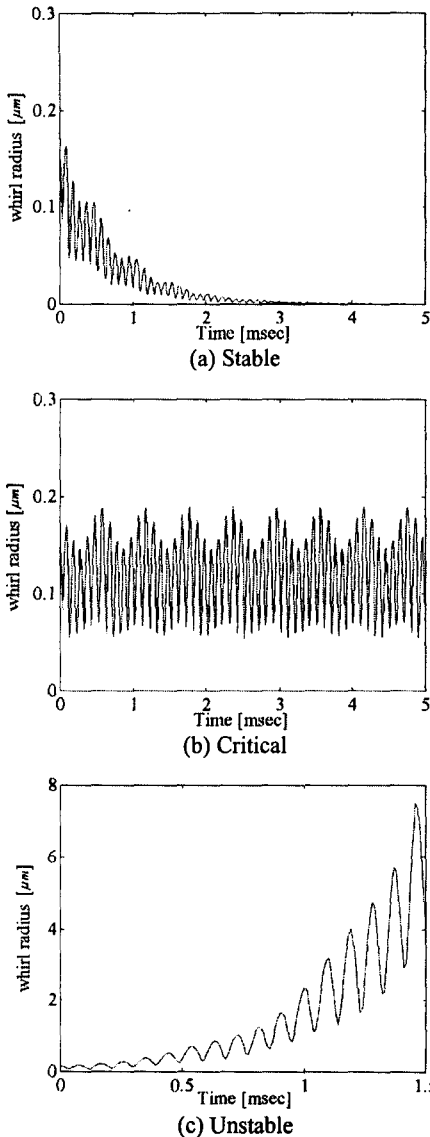


Fig. 7 Time response of the whirl radius in the stable, critically stable and unstable positions

하드 디스크 드라이브용 스피들의 회전부와 한 장의 디스크로 구성되어 있으며 총 무게는 42.2 g이다. 안정 영역과 불안정 영역이 변하지 않을 때까지 Fourier 계수를 증가시키며 2.2 절에 기술된 안정성 해석을 반복하였다. 본 해석에서는 20 개의 Fourier 계수를 사용하였다.

그림 6 은 회전하는 빗살무늬 홈을 갖는 유체 동압 저널 베어링의 안정성 선도를 편심율과 흡수의 변화에 따라 나타낸 것이다. ξ 을 변화시키면서 고유치 λ 를 계산하여 안정성 선도를 구하였다. 운동 방정식으로부터 구한 응답에 의해 각 영

역의 안정성을 판별하였다. 편심율의 증가와 흡수의 감소는 그림 3, 4, 5 에서 보는 바와 같이 강성과 감쇠 계수의 평균값과 변화량을 증가시키며 또한 그림 6 의 불안정 영역을 넓힌다. 이것은 강성 계수의 평균값과 변화량이 빗살무늬 저널 베어링의 불안정 영역을 증가시키는데 큰 영향을 준다는 것을 의미한다. 왜냐하면 일반적으로 감쇠 계수의 증가는 안정 영역을 증가시키기 때문이다. 본 해석에 사용된 15,000 rpm 으로 회전하는 빗살무늬 저널 베어링의 경우 불안정 영역의 위쪽 안정 영역에서 작동하고 있다. 그러나 높은 회전 속도는 그림 3, 4, 5 에 나타난 바와 같이 감쇠 계수는 변화시키지 않고 강성 계수만 증가시키므로 흡이 회전하는 유체 동압 저널 베어링의 불안정성을 야기할 수 있다.

그림 7 은 그림 6 (c)에 표시된 안정, 임계 안정 그리고 불안정 위치에 대한 휠 반경($\sqrt{x^2 + y^2}$)의 시간 응답을 나타낸 것이다. 식 (18)의 운동 방정식을 4 차 Runge-Kutta 법으로 풀었고 시간 간격은 10^{-6} sec 으로, 초기 휠 반경은 $0.15 \mu\text{m}$ 으로 가정하였다. 그림 7 은 안정, 임계 안정 그리고 불안정 영역에서의 휠 반경을 나타낸 것으로서 각각 수렴, 한계값을 가지는 진동 그리고 발산하는 것을 볼 수 있다. 휠 반경의 시간 응답은 본 논문에서 제안된 안정성 해석의 타당성을 입증하고 있다.

4. 결론

회전하는 빗살무늬 홈을 갖는 유체 동압 저널 베어링은 시간에 따라 변화하는 동특성 계수때문에 계수가진계로 간주된다. 본 논문은 운동 방정식을 Hill 의 무한 행렬식의 형태인 고유치 문제로 변환함으로써 안정성을 해석하는 방법을 제안하였다. 안정성 선도와 운동 방정식으로부터 구한 휠 반경의 시간 응답을 비교하여 본 연구의 타당성을 검증하였다. 편심율의 증가와 흡수의 감소가 강성 계수의 평균값과 변화량을 증가시키는데 큰 역할을 하며 회전하는 빗살무늬 홈을 갖는 유체 동압 저널 베어링의 불안정성을 증가시켰다. 또한 높은 회전 속도는 감쇠 계수는 변화시키지 않고 강성 계수만 증가시켜 불안정성의 원인이 된다.

참고문헌

- (1) Pai, R. and Majumdar, B. C., 1991, "Stability of Submerged Oil Journal Bearings under Dynamic Load", *Wear*, 146, pp. 125-135.

- (2) Jonnadula, R., Majumdar, B. C., and Rao, N. S., 1997, "Stability Analysis of Flexibly Supported Rough Submerged Oil Journal Bearings", *Trib. Trans.*, Vol. 40, No. 3, pp. 437-444.
- (3) Raghunandana, K., and Majumdar, B. C., 1999, "Stability of journal bearing systems using non-Newtonian lubricants: a non-linear transient analysis", *Trib. Intl.*, Vol. 32, pp. 179-184.
- (4) Kakoty, S. K., and Majumdar, B. C., 2000, "Effect of Fluid Inertia on Stability of Oil Journal Bearings", *ASME J. Trib.*, Vol. 122, pp. 741-745.
- (5) Zirkelback, N., and San Andres, L., 1998, "Finite Element Analysis of Herringbone Groove Journal Bearings: A Parametric Study", *ASME J. Trib.*, Vol. 120, pp. 234-240.
- (6) Jang, G. H., and Yoon, J. W., 2002, "Nonlinear Dynamic Analysis of a Hydrodynamic Journal Bearing Due to the Effect of a Rotating or Stationary Herringbone Groove", *ASME J. Trib.*, Vol. 124, No. 2, pp. 297-304.
- (7) Kang, K., Rhim, Y., and Sung, K., 1996, "A Study of the Oil-Lubricated Herringbone-Grooved Journal Bearing-Part 1: Numerical Analysis", *ASME J. Trib.*, Vol. 118, pp. 906-911.
- (8) Jang, G. H., and Kim, Y. J., 1999, "Calculation of Dynamic Coefficients in a Hydrodynamic Bearing Considering Five Degrees of Freedom for a General Rotor-Bearing System", *ASME J. Trib.*, Vol. 121, pp. 499-505.
- (9) D. E. Newland, *Mechanical Vibration Analysis and Computation*, Longman Scientific and Technical, 1989.