

# 마찰 기인 2 자유도계 시스템의 자려진동에 대한 댐핑의 영향

°조 용 구\*\*\*, 신 기 흥\*\*· 오 재 응\*

## The effects of damping on the limit cycle of a 2-dof friction induced self-oscillation system

Kihong Shin\*\*\*, Yong-goo Joe\*\*, Jae-Eung Oh\*

**Key Words** : Limit Cycle(극한 사이클) Stick-Slip(스틱 슬립), Damping(댐핑), Phase Space(위상 공간), Self-excited vibration(자려 진동)

### ABSTRACT

A two-degree of freedom model is suggested to understand the basic dynamical behaviors of the interaction between two masses of the friction induced vibration system. The two masses may be considered as the pad and the disk of the brake. The phase space analysis is performed to understand complicated dynamics of the non-linear model. Attractors in the phase space are examined for various conditions of the parameters of the model especially by emphasizing on the damping parameters. In certain conditions, the attractor becomes a limit cycle showing the stick-slip phenomena. In this paper, not only the existence of the limit cycle but also the size of the limit cycle is examined to demonstrate the non-linear dynamics that leads the unstable state. For the two different cases of the system frequency( (1)two masses with same natural frequencies , (2) with different natural frequencies ), the propensity of limit cycle is discussed in detail. The results show an important fact that it may make the system worse when too much damping is present in the only one part of the masses .

### 1. 서론

최근들어 마찰 메커니즘에 의한 자려진동의 해석이 마찰 기인 소음 현상을 규명하기 위한 수학적 방법으로써 연구되어지고 있다.

예로써, 90 년도 이후부터 많은 수학자들과 마찰 기인 역학과 관계가 있는 엔지니어들이 브레이크 시스템에 대해 연구를 진행해 오고 있다.

또한 마찰 기인 진동에 대한 리뷰 논문이 Ibrahim(1994a, 1994b) 및 다수의 연구자들에 의해 발표되었다. (1,2)

다양한 공학분야에서의 결과들은 스틱-슬립 진동현상이라는 한가지 공통적이면서 뚜렷한 본질을 보여준다.

스틱-슬립 진동은 마찰력-속도 관계의 비선형성에 의하여 발생하며, 시스템에 에너지를 축적시키는 스틱운동과 축적된 에너지를 소산시키는 운동으로 나누어지게 된다.

스틱-슬립 진동은 또한 채터링 현상과 공통되는 역학관계를 가지고 있다. 그러나 채터링이란

\*\*\* 회원, 한양대학교 대학원 자동차공학과

\*\* 회원, 안동대학교 기계공학부

\* 회원, 한양대학교 기계공학부

단어는 주로 금속 가공공정에서 사용되어 지며, 마찰 기인 진동을 다루는 많은 공학분야에서는 스틱-슬립이라는 용어를 주로 사용한다. 스틱-슬립 진동은 McIntyre 와 Woodhouse(1979)의 마이올린의 활-켜기 역학의 연구 이래로 매우 흥미로운 주제의 연구분야로 여겨져 왔다.<sup>(3)</sup> 그 이후로 스틱-슬립 운동의 영역을 정의하는 마찰-속도특성을 고려한 스틱-슬립 운동의 안정성 해석에 관한 많은 논문들이 출간되었다(Capone et al., 1992a; Ruina, 1983).<sup>(4,5,6)</sup>

스티크 슬립 운동은 위상 공간(phase space)에서 극한 사이클(limit cycle)로서 분류되며, 극한 사이클은 위상면에서 원의 형태를 나타낸다.

극한 사이클이란 위상공간 내에서 솔루션 커브를 도시할 때 정상 상태(steady state)에서의 솔루션 모양이 일정한 사이클 로 나타나는 것을 말한다. 위상공간이란 상태공간과 같은 의미를 지니며 미분방식의 차수를 반으로 줄였을 때 나타나는 공간을 말한다.

스티크-슬립 운동과는 별도로, 다른 형태의 극한 사이클 거동과 혼돈 운동(chaotic motion)이 마찰 기인 진동에 의해 발생할 수 있다. 특히, Popp 과 Stelzer(1990)은 매우 단순한 1 자유도 계 모델이, 다양한 운동형태를 제공해줄 수 있음을 보였다.<sup>(7)</sup>

스티크-슬립 현상이 마찰-속도 관계로부터 유발되므로, 가장 최근의 연구들은 위에서 언급된 참고문헌들을 포함하여 더욱 실질적인 마찰-속도 관계식들(역학관점: Bengisu and Akay, 1999; Mostaghel and Davis, 1997; Van De Velde and De Baet, 1998; Van De Velde et al., 1998; Wiercigroch, 1994; You and Hsia, 1995: 마이크로스코픽 관점: Berman et. al, 1996; Gao et al., 1993; Rozman et al., 1998)을 사용하는 것에 초점이 맞추어지고 있다.<sup>(8,9,10,11,12,13)</sup>

그러나 본 연구에서의 목적은 그와 같은 복잡한 마찰 메커니즘을 개발하는 것을 다루는 것이

아니라, 새롭게 제안된 2 자유도계 모델을 사용하여 댐핑의 효과를 강조함으로써 마찰기인 자려진동의 기본적인 운동현상을 이해하는 것이다.

지금까지 몇 가지의 2 자유도계 모델이 탐구되어져 왔다(Awrejcewicz and Delfs, 1990a, 1990b; Galvanetto et al.; Ibrahim, 1994b; Ouyang et al. 1999; You and Hsia, 1995;).<sup>(2,12,15,16,17)</sup>

그러나 이러한 것들은 질량이 직렬로 연결되어 있거나 질량이 두개의 좌표계로 고려되었다. 따라서, 그것 들은 가상의 마찰면을 통해 두개의 질량이 동적으로 연결 되어있는 본 연구에서 제안된 모델과는 다른 메커니즘으로 되어있다.

마찰 기인 소음은 두 질량 마찰 시스템의 동적 불안정성을 유발하는 자려진동의 결과로써 일반적으로 받아들여지고 있다.

자려진동의 존재와 비존재는 평형점의 안정성에 의존한다(Ibrahim, 1994b)<sup>(2)</sup>. 또한 자려진동이 항상 스틱-슬립 불안정성을 만들어 내는 것은 아니고 일정 극한 사이클(steady limit cycle)을 발생시키기도 한다.

연구자들은 극한 사이클의 크기가 극한사이클의 존재 보다 더욱 중요하다고 생각한다. 본 연구에서는 마찰기인 소음을 좀더 이해할 수 있는 메커니즘으로 기술하기 위해 극한 사이클의 존재성뿐만 아니라 극한 사이클의 크기에 대해서도 논의되어 진다.

다음 장에서는, 스틱-슬립 운동과 새로이 제안된 모델의 운동역학이 기술된다. 그리고 다양한 댐핑계수의 값에 따른 극한 사이클의 크기를 분석 함으로써 자려진동에 대한 댐핑의 효과가 시스템 진동수의 특징적인 두 가지 경우에 대해 심도있게 논의된다.

## 2. 스틱-슬립 운동과 2-dof 모델

스티크-슬립 운동은 일반적으로 마찰이 있는 시스템에서 자려진동으로부터 생성된다. 1 자유도계 시스템에서, 스틱-슬립 운동에 대한 필수 조건은 미끌어지는 표면의 속도가 증가

함에 따라 마찰력은 감소해야 한다는 것이 다.<sup>(2)</sup>

스틱-슬립 운동은 두개의 다른 프로세스로 구성되어 있다. 스틱-슬립 운동은 유연하지 못한 특성으로 인해 금속 커팅 공정, 베어링, 회전 축 등에서와 같은 많은 공학분야에서 다양한 문제를 야기 시키므로 바람직하지 않은 현상으로 알려져 있다. 따라서 이러한 현상을 방지하기위해, 수 많은 연구들이 진행되어 왔다. 스틱-슬립 운동의 단순한 예는 벨트에 의해 구동되어지는 미끌어지는 질량의 자력진동에서 살펴볼 수 있다. 상대속도의 음의 방향을 고려한다면, 마찰력은 제로 상대속도에서 불연속점을 가진다. 이것이 그 시스템의 비선형성을 크게 만들고 스틱-슬립 운동을 발생시키게 된다.<sup>(18)</sup>

질량이 조화 가진에 의해 가진 된다면, 그 시스템의 운동은 시스템의 파라미터에 따라 매우 복잡하게 된다. 이경우에, 스틱-슬립 운동을 포함하는 극한 사이클 및 준정적 주기운동 그리고 혼돈 운동을 나타낸다.<sup>(7)</sup>

그러나, 외부의 가진력이 존재하지 않고 댐핑이 충분히 작다면, 그 시스템이 위상 공간에서 유연함, 유연하지 않음(스틱-슬립)에 상관없이 그 시스템의 가능한 운동은 극한 사이클이라는 것이 알려져 있다.<sup>(2)</sup>

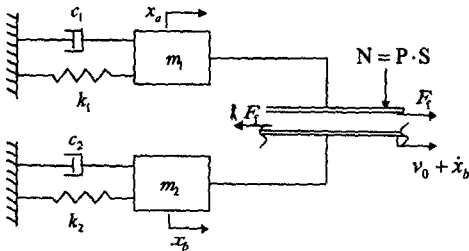


Fig. 1 2-dof model ( $v_r = v_0 + \dot{x}_b - \dot{x}_a$ )

두 질량 시스템의 기본적인 역학이 Fig. 1 에서 보여지듯이 2 자유도계에 대해서 위의 해석을 확장함으로써 이해되어질 수 있다.

이 모델은 m 1 과 m 2 사이의 동적 상호작용을 설명해준다. 이 시스템의 기본적인 동적 역학이

마찰력 모델<sup>(18)</sup>을 이용하여 수치적인 시뮬레이션을 통하여 보여진다. 이 경우에, 두 m 사이의 상대적인 운동을 고려하면, 정적 마찰력은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$F_s = k_1 x_a + c_1 \dot{x}_a - k_2 x_b - c_2 \dot{x}_b \quad (1)$$

따라서, 운동방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_a + c_1 \dot{x}_a + k_1 x_a &= F_f(v_r) - F_f(v_0) \\ m_2 \ddot{x}_b + c_2 \dot{x}_b + k_2 x_b &= -[F_f(v_r) - F_f(v_0)] \end{aligned} \quad (2)$$

여기에서,  $v_r = v_0 + \dot{x}_b - \dot{x}_a$ , 그리고 상수 항  $F_f(v_0) = N(\mu_s - \alpha v_0)$  이 된다.

또한 N 은 수직력,  $\mu_s$  는 정지 마찰계수,  $\alpha$  는 마찰계수 vs 상대속도 그래프에서의 기울기 값이며  $v_0$  는 m2 의 이동 속도이다.

$$F_f = \begin{cases} \min(|F_s|, \mu_s N) \cdot \text{sgn}(F_s), & \text{for } v_r = 0 \text{ stick,} \\ \mu(v_r) N \cdot \text{sgn}(v_r), & \text{for } v_r \neq 0 \text{ slip.} \end{cases}$$

이와 같은 마찰 모델을 고려하여, 식(2)는 다음과 같이 상태 방정식의 형태로 다시 쓰여질 수 있다.

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{c_1}{m_1} x_2 - \frac{k_1}{m_1} x_1 + \frac{1}{m_1} (F_f(v_r) - F_f(v_0)) \quad (3)$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = -\frac{c_2}{m_2} x_4 - \frac{k_1}{m_2} x_3 - \frac{1}{m_2} (F_f(v_r) - F_f(v_0))$$

여기에서,

$$x_a = x_1, \dot{x}_a = \dot{x}_1 = x_2, x_b = x_3, \dot{x}_b = \dot{x}_3 = x_4$$

이것은 수치적으로 쉽게 해를 구할 수 있는 1 계 상미분 방정식이며 다양한 파라미터에 대한 위상 공간에서의 일정한 운동이 수치적으로 탐구된다. 수치적 방법으로는 룬게 쿠타(Runge Kutta)법을 사용하였다. 이 모델을 주의 깊게 관찰해 보면 두 질량은 같은 마찰력을 공유하지만 부호는 다르며,  $m_1 = m_2, c_1 = c_2$  그리고  $k_1 = k_2$  라면 누구나 직관적으로 패드와 디스크의 양쪽 운동의 형태가 같다는 것을 알 수 있다. 이러한 경우에 그 운동역학은 1 자유

도계 시스템과 크게 다르지 않다. 즉 스틱-슬립 극한 사이클 운동은 충분히 작은 댐핑에 대해서라면 매우 지배적이다. 이 경우는 파라미터  $\alpha N$  그리고  $v_0$ 의 영향을 효과적으로 설명하기 위해 연구되어졌다.<sup>(19)</sup>

위의 결과들은 ' $N\alpha$ '항의 중요성을 말해주며 ' $N\alpha$ '항이 작은 값을 가질수록 자려진동에 더 좋은 결과를 준다는 것을 의미한다. 또한, 일정 속도 ' $v_0$ '는 동적 마찰계수의 기울기에 영향을 준다는 것이 보여진다. 따라서 ' $v_0$ '는 극한 사이클의 크기에도 영향을 미치게 된다.

위의 결과에서 고려된 파라미터들은 동적 마찰계수와 직접 관련되며 실제로 시스템을 설계할 때 수정하기에는 매우 어려운 파라미터이다. 사실상, 시스템의 파라미터(질량, 댐핑, 강성)를 변화시키는 것이 훨씬 쉽다고 할 수 있다. 따라서 이러한 파라미터들의 효과에 대해 댐핑 파라미터를 강조하여 다음장에서 논의 하였다.

### 3. 극한 사이클에 대한 댐핑의 효과

#### 3.1 동일한 시스템 고유진동수

앞에서 언급 했듯이, 선형해석에 관한 대부분의 문헌에서 마찰 기인 자려진동이 극한사이클의 존재에 의해서 기인한다는 가정하에 안정성 해석이 이루어지고 있다. 그러나 본 연구에서는 극한 사이클의 존재뿐 아니라 극한 사이클의 크기도 탐구된다. 왜냐하면 극한 사이클의 크기는 자려진동의 크기와 밀접한 관련이 있기 때문이다.

m1 과 m2의 댐핑이 동시에 증가할 때 극한 사이클의 크기가 감소하고 Fig. 2에서 보여지듯이 댐핑 파라미터가 충분히 클 때 마침내 고정점으로 수렴하는 결과가 본 연구에서 얻어 졌다.

한가지 흥미로운 사실이 그림들로부터 발견되어진다. 두개의 고유진동수가 같을 때의 임계 조건 ' $\min(c_1, c_2) > 2N\alpha$ ' 이 Fig. 2(b) 과 2(c)로부터 쉽게 증명된다.<sup>(18)</sup>

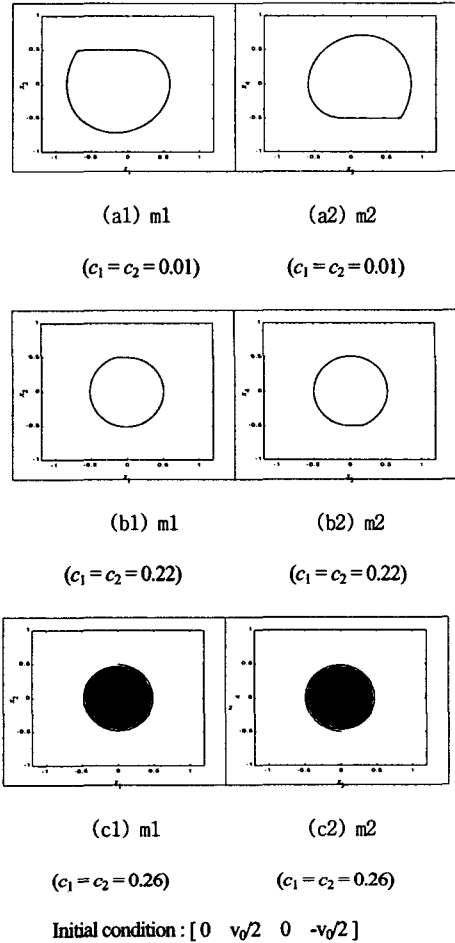


Fig. 2 Motions when both damping are increased

이 경우에 ' $2N\alpha$ '의 값은 0.24 이다. 댐핑 파라미터는 각각 다음과 같다. ' $c_1=c_2=0.22$ ' 및 ' $c_1=c_2=0.26$ ' 그러나 댐핑이 오직 한쪽 방향으로만 증가한다면 예를들어 m1 쪽만 증가한다면 m1의 극한 사이클은 감소하게 되지만 다른 쪽의 극한 사이클은 커지게 된다. 그 이유는 한쪽의 댐핑만 줄때, 예를 들면 패드쪽의 댐핑만 줄때는 m1 쪽의 에너지는 감소 하려는 현상이 두드러지지만 m2 쪽은 오히려 그 감소된 에너지만큼을 받게되어서 에너지 흡수가 생기게 된다. 상대운동 ( $x_a - x_b$ )을 관찰하면 거의 일정하다는 것을 알 수 있다. 그리고

생기게 된다. 상대운동 ( $x_a - x_b$ )을 관찰하면 거의 일정하다는 것을 알 수 있다. 그리고

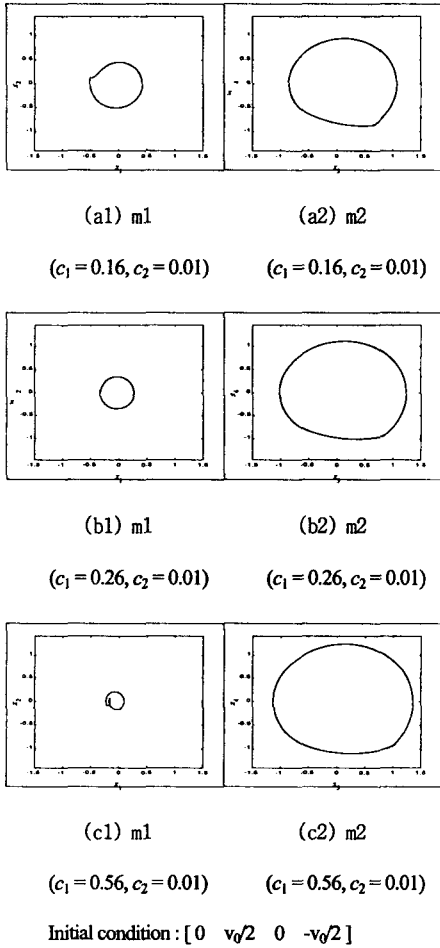


Fig. 3 Motions when only one damping is increased

이러한 경우에 굉장히 큰 댐핑을 가하여도 고정점으로 시스템이 수렴하지 않게 된다. 이러한 사실이 Fig. 3에서 보여지고 있으며 m2의 댐핑이  $c_2=0.01$ 로 고정되고, m1의 댐핑이 점차적으로 증가된다. 또한 Fig. 3(a1)과 3(a2)를 비교하면 알 수 있다. 이러한 그림들로부터, 한 가지 중요한 현상이 발견되는데, 그것은 한쪽 만의 필요 이상의 댐핑은 극한 사이클의 크기가 자려 진동의 크기와 관계된다는 점에서 그 시스템을 더 악화 시

킬 수도 있다는 것이다. 즉, m1쪽의 너무 과도한 댐핑은 m2의 진동에 기인한 심각한 진동을 유발할 수도 있다는 것이다. 본 연구에서 소개된 위상 공간해석의 결과로부터, 한쪽 부분에만 너무 과도한 댐핑을 주었을 경우에는 진동이 오히려 더 커질 수도 있음이 보여졌다. 따라서, 마찰 기인 진동을 저감시키기 위해서는 m1과 m2에 대해 동시에 댐핑이 고려되어야만 한다.

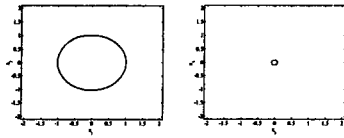
### 3.2 상이한 시스템 고유진동수

앞 장에서, m1과 m2에 대한 시스템 파라미터의 같은 값이 고려되었다. 그리고 그러한 경우에는 스틱-슬립모션이 지배적이라는 것이 보여졌다. 그러나, 이러한 값들이 다른 값이라면 m1과 m2가 완전히 다른 주파수로 진동을 할 때 두 질량 사이의 제로 상대 운동이 오래 지속할 수 없으므로 스틱 모션은 쉽게 발생할 수가 없다. 따라서, 이러한 경우에 일정 극한 사이클이 지배적이 된다.

다양한 시스템 파라미터의 조합이 댐핑의 효과를 분석하기 위해 고려되며 마찰에 관한 파라미터는 아래의 모든 경우에 대하여 ' $N=10$ ', ' $\alpha=0.012$ ' 그리고 ' $v_0=1$ '로 놓여진다. 우선, 두 주파수의 차이가 클 때 다음과 같은 2가지 경우의 시스템 파라미터에 대한 임계 조건인 ' $\min(c_1, c_2) > N\alpha$ '에 대하여 검증된다. 즉 ' $\omega_1=1, \omega_2=1.5$  그리고  $c_1=c_2=0.11$ ' 및 ' $\omega_1=1, \omega_2=1.5$  그리고  $c_1=c_2=0.13$ '

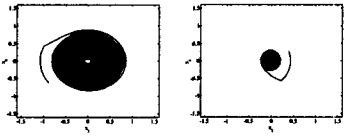
이 경우에 ' $N\alpha$ '의 값이 0.12인 것을 주목해야 한다. 또한 이러한 임계 조건을 만족하기 위해서는 양쪽의 댐핑 파라미터가 모두 ' $N\alpha$ '보다 커져야만 한다. Fig. 4(a)에서 보여지듯이 댐핑 파라미터가 ' $N\alpha$ '보다 작을 때 그 운동은 불안정한 평형점이 있다는 것을 보여주는 일정 극한 사이클이다. 댐핑 값들이 ' $N\alpha$ '보다 크다면 그 경우의 시간 응답은 Fig. 4(b)에서 보여지는 것과 같다.

시스템 고유 진동수가 다를 때에 가장



(a1) m1 (a2) m2

$$(\omega_1 = 1, \omega_2 = 1.5, c_1 = c_2 = 0.11)$$



(b1) m1 (b2) m2

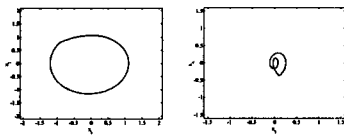
$$(\omega_1 = 1, \omega_2 = 1.5, c_1 = c_2 = 0.13)$$

$$\text{Initial condition: } [0 \quad v_0/2 \quad 0 \quad -v_0/2]$$

Fig. 4 Existence of limit cycle as ' $N\alpha$ '

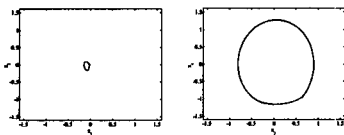
주목할 점은 각 질량에 대하여 극한 사이클이 두개가 존재한다는 것이다.

$\omega_1 = 1, \omega_2 = 1.5, c_1 = c_2 = 0.01$  에 대하여 Fig. 5 에서와 같이 초기조건에 따라 수렴하는 극한 사이클이 달라지게 된다.



(a1) m1 (a2) m2

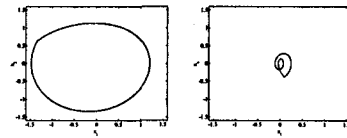
$$\text{Initial condition: } [1.5 \quad 1.5 \quad 0.01 \quad 0.01]$$



(b1) m1 (b2) m2

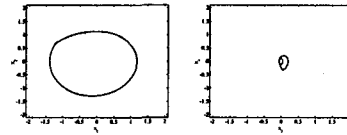
$$\text{Initial condition: } [0.01 \quad 0.01 \quad 0.01 \quad 0.01]$$

Fig. 5 Variation of limit cycle as initial condition



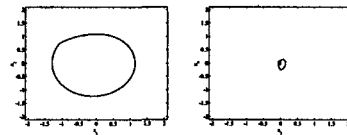
(a1) m1 (a2) m2

$$(c_1 = 0.01 \quad c_2 = 0.01)$$



(b1) m1 (b2) m2

$$(c_1 = 0.03 \quad c_2 = 0.01)$$



(c1) m1 (c2) m2

$$(c_1 = 0.05 \quad c_2 = 0.01)$$

Fig. 6 Motions when only one damping is increased

초기조건을 고정하고 댐핑의 값만 변화 시키면서 극한 사이클을 살펴볼 때 m1 에 해당하는 극한 사이클이 크고 m2 의 극한 사이클이 작은 경우에는 댐핑을 증가 시킬 때 극한 사이클의 크기가 점차 줄어들지만 시스템 고유 진동수가 같은 경우에 비해서 그 줄어드는 영향이 작다. Fig. 4 와 같이 임계 조건 ' $\min(c_1, c_2) > N\alpha$ ' 일 때에는 갑자기 극한 사이클이 사라지게 된다.

한쪽만 댐핑이 증가되는 경우에는 Fig. 6 에 서 보여지듯이 극한 사이클이 큰 쪽의 댐핑을 서서히 증가 시킬 경우 양쪽 극한 사이클이 점차 줄어들는다. 그러나 Fig. 7 에서 보여지듯이 어느 일정량 이상의 댐핑을 증가시키면 댐핑을 준쪽의 극한 사이클은 작은 극한 사이클로 변하고 그 반대쪽의 극한 사이클은 큰 극한 사이클로 변하게 된다.

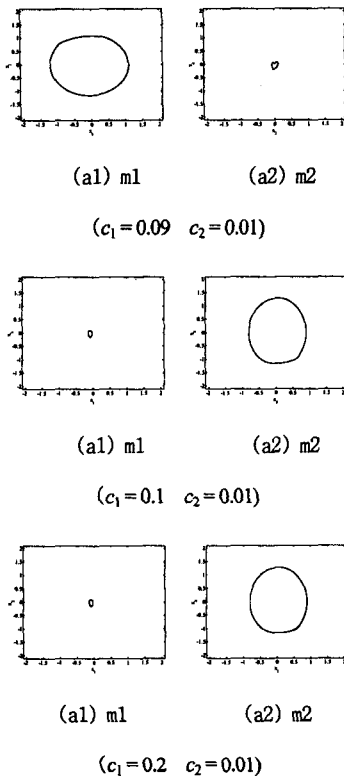


Fig. 7 Variation of limit cycle as damping change

위의 결과로부터 한쪽 부분에만 너무 과도한 댐핑을 주었을 경우에는 진동이 오히려 더 커질 수도 있음이 보여졌다.

#### 4. 결론

마찰 기인 자려진동의 복잡한 동적 역학을 설명하기 위하여 새롭게 제안된 2자유도계 모델을 이용한 비선형 해석이 소개되었고 댐핑의 중요성에 대하여 언급하였다.

m1 과 m2 의 운동이 다양한 마찰 파라미터와 시스템 파라미터에 대해서 고려되었다.

시뮬레이션을 통해 댐핑이 가장 중요한 인자임이 밝혀졌고, 그 결과는 이전의 연구결과(5)와 잘 일치하고 있다. 따라서 댐핑 파라미터는 특히 모델의 동적 역학을 분석할 때 강조된다. 또한 극한 사이클의 크기를 조사함으로써, 댐핑의

중요성에 관해 심도있게 논의 되었다.

마지막으로 시스템의 고유진동수에 따라 다음과 같이 극한 사이클의 변화의 경향이 분석되었다. 즉 고유진동수가 같을 때에는 한 쪽 댐핑 점차증가의 경우 댐핑을 준쪽의 극한사이클의 크기는 점차적으로 작아지고 다른쪽의 극한사이클은 점차적으로 커지게된다.

시스템의 고유진동수가 다를 때에는 한 쪽 댐핑을 점차적으로 증가시키는 경우 초기에는 미세한 변화를 일으키면서 양쪽의 극한 사이클의 크기를 동시에 작게 하지만 어느 일정량 이상의 댐핑을 증가 시키게 되면 댐핑을 준 쪽의 극한 사이클의 크기는 매우 작은 극한 사이클로 변하고 다른 쪽의 극한 사이클은 큰 극한 사이클로 변한다. 따라서 필요 이상의 한쪽 방향으로 치우쳐진 댐핑은 시스템을 더욱 좋지 않은 방향으로 만들 수 있다.

복잡한 마찰 메커니즘에 의한 동적 거동을 완전히 이해 하기 위해서는 해결해야 할 많은 과제들이 남아 있다. 예를 들면, 더욱 현실적인 마찰력 메커니즘의 구성 및 m1 과 m2 의 면의 방향진동의 분석 그리고 확장된 자유도계를 통한 면내 및 면외 방향의 운동의 연성 관계규명등이 요구 되고 있다

#### 후 기

이 연구는 BK-21 사업에 의해 지원 되었다.

#### 참 고 문 헌

- (1) Ibrahim, R. A., 1994, "Friction-induced vibration, chatter, squeal, and chaos Part 1: Mechanics of contact and friction", *Applied Mechanics Review*, Vol. 47, No. 7, pp. 209-226.
- (2) Ibrahim, R. A., 1994, "Friction-induced vibration, chatter, squeal, and chaos Part 2: Dynamics and Modelling", *Applied Mechanics Review*, Vol. 47, No. 7, pp. 227-253.
- (3) McIntyre, M. E. and Woodhouse, J., 1979, "Fundamentals of bowed-string dynamics", *Acustica*, Vol. 43, pp. 94-108.

- (4) Capone, G., D'agostino, V., Valle, S. D. and Guida, D., 1992, "Influence of the vibration between static and kinetic friction on stick-slip instability", *Wear*, Vol. 161, pp. 121-126.
- (5) Capone, G., D'agostino, V., Valle, S. D. and Guida, D., 1992, "Stick-Slip Instability Analysis", *Meccanica*, Vol. 27, pp. 111-118.
- (6) Ruina, A., 1983, "Slip instability and state variable friction laws", *Journal of Geophysical Research*, Vol. 88, No. B12, pp. 10359-10370
- (7) Popp, K. and Stelzer, P., 1990, "Stick-slip vibrations and chaos", *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A*, Vol. 332, pp. 89-105.
- (8) Bengisu, M. T. and Akay, A., 1999, "Stick-slip oscillations: dynamics of friction and surface roughness", *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 105, No. 1, pp. 194-205.
- (9) Berman, A. D., Ducker, W. A. and Israelachvili, J. N., 1996, "Origin and characterization of different stick-slip friction mechanisms", *Langmuir*, Vol. 12, No. 19, pp. 4559-4563.
- (10) Van De Velde, F. and De Baets, P., 1998, "The relationship between friction force and relative speed during the slip-phase of a stick-slip cycle", *Wear*, Vol. 219, pp. 220-226.
- (11), "The friction force during stick-slip with velocity reversal", *Wear*, Vol. 216, pp. 138-149.
- (12) You, H-I. and Hsia, J-H., 1995, "The influence of friction-speed relation on the occurrence of stick-slip motion", *ASME Journal of Tribology*, Vol. 117, pp. 450-455.
- (13) Wiercigroch, M., 1994, "A note on the switch function for the stick-slip phenomenon", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 175, No. 5, pp. 700-704.
- (14) Awrejcewicz, J., 1988, "Chaotic motion in a nonlinear oscillator with friction", *KSME International Journal*, Vol. 2, No. 2, pp. 104-109.
- (15) Awrejcewicz, J. and Delfs, J., 1990, "Dynamics of a self-excited stick-slip oscillator with two degrees of freedom Part II. Slip-stick, slip-slip, stick-slip transitions, periodic and chaotic orbits", *European Journal of Mechanics, A/Solids*, Vol. 9, No. 5, pp. 397-418.
- (16) Galvanetto, U., Bishop, S. R. and Briseghella, L., 1995, "Mechanical stick-slip vibrations", *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Vol. 5, No. 3, pp. 637-651.
- (17) Ouyang, H., Mottershead, J. E., Cartmell, M. P. and Brookfield, D. J., 1999, "Friction-induced vibration of an elastic slider on a vibration disc", *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 41, pp. 325-336.
- (18) K Shin, M J Brennan, J-E Oh, C J Harris, 2002, "Analysis of disc brake noise using a two-degree of freedom model", *Journal of Sound and Vibration*, (will be published)
- (19) Kihong Shin, Jae-Eung Oh, Michael J. Brennan, 2002, "Nonlinear analysis of friction induced vibrations of a two-degree-of-freedom model for disc brake squeal noise", *JSME*, (will be published)