

충격햄머 가진으로 구한 주파수응답함수의 오차와 해결방법

The errors and reducing method in the frequency response function from impact hammer testing

°안세진* 정의봉**

Se Jin Ahn, Weui Bong Jeong

Key Words : Impact Hammer Test(충격햄머시험), Impulse Response Function(충격응답함수), Frequency Response Function(주파수응답함수), Fourier Transform(푸리에변환), Discrete Signal(이산신호), Record Length(신호획득시간), Leakage Error(누설오차), .

ABSTRACT

The spectrum of impulse response signal which is obtained from an impulse hammer testing is used for frequency response function, nevertheless it has serious faults when the record length for the signal processing is not very long. The faults cannot be avoided with the conventional signal analyzer that is processing all the signals as if they are always periodic. The signals generated by the impact hammer are undoubtedly non-periodic because of the damping, and are acquired for limited recording time due to the memory as well as the computation performance of the signal analyzer. This paper will make clear the relation between the faults and the length of recording time, and propose the way for solving the faults.

1. 서론

충격햄머 실험은 장치가 비교적 간단하면서도 실용적인 결과를 얻을 수 있기 때문에 구조물의 동특성 파악을 위해 많이 이용되고 있다. 그런데 일회적이고 비주기적인 충격신호와 시간에 따라 감소하는 응답신호를 동시에 디지털신호처리하여 구한 충격응답함수 스펙트럼은 신호획득시간의 길이에 따라 각 주파수에서의 값이 달라지는 결점을 가지고 있다. 이러한 현상은 일회적이거나 감소하는 신호를 주기적이고 정상적인 신호와 동일한 방법으로 디지털 신호처리하는 기존의 분석 장비에서는 피할 수 없는 것이다. 본 논문에서는 충격응답함수 스펙트럼과 신호획득시간과의 관계를 규명하고, 이것으로부터 정확한 주파수응답함수를 구하는 방법을 제시하고자 한다.

2. 충격응답 스펙트럼의 결점

2.1 충격응답함수의 Fourier Transform 과 FRF

Fig. 1 과 같이 점성감쇠계를 가지는 1 자유도

진동계의 운동방정식은

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t) \quad (1)$$

과 같다. 식(1)에서 우변의 가진력을 충격하중으로 취급하면 Dirac delta 함수를 이용하여

$$f(t) = F_0 \delta(t) \quad (2)$$

와 같이 가정할 수 있다. 식(1)의 변위응답은

$$x(t) = F_0 h(t) = F_0 \frac{e^{-\zeta\omega_d t}}{m\omega_d} \sin\omega_d t, \quad t \geq 0 \quad (3)$$

와 같다. 여기서 $h(t)$ 를 충격응답함수라 한다[2].

시간 영역에서 고려된 식(1)~(3)의 관계는 주파수 영역에서도 성립하는 것을 이용하면 식(1)의 주파수응답함수(FRF)는 식(2)와 식(3)을 각각 Fourier Transform(FT)하여 구할 수 있게 된다. 주파수 영역에서 식(1)과 식(2)~(3)의 관계를 알아 보기 위해 먼저 식(2)를 FT

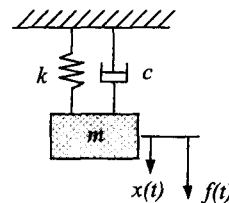


Fig. 1 Damped 1-DOF model

* 정회원, 부산대학교 기계설계공학과 대학원

E-mail : sjahn@home.pusan.ac.kr

Tel. : (051) 510-3088, Fax : (051) 517-3805

** 정회원, 부산대학교 기계공학부

$$F(j\omega)|_{T>0} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (4)$$

$$= F_0 \int_0^T \delta(t) e^{-j\omega t} dt = F_0$$

와 같고, 식(3)을 FT 하면

$$X(j\omega)|_{T>0} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (5)$$

$$= F_0 \int_0^T \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{m\omega_d} \sin\omega_d t e^{-j\omega t} dt$$

$$= \frac{F_0}{k - \omega^2 m + j\omega c} [1 - E(j\omega)]_T$$

와 같이 된다. 여기서

$$E(j\omega)|_T = e^{(-\zeta\omega_n - j\omega)T} \left\{ \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin\omega_d T + \cos\omega_d T + j \frac{\omega}{\omega_d} \sin\omega_d T \right\} \quad (5a)$$

이고 $\lim_{T \rightarrow \infty} E(j\omega)|_T = 0$ 임을 알 수 있다. 즉 식(4)와 식(5)에서 적분 구간(T)을 무한히 크게 하고 주파수 응답함수를 구하면 다음과 같이 구할 수 있게 된다.

$$H(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{X(\omega)|_T}{F(\omega)|_T} = \frac{1}{k - \omega^2 + j\omega c} \quad (6)$$

식(4)~(6)을 종합하면 충격응답함수 $x(t)$ 의 시간신호가 무한히 긴 시간동안 적분되어 FT 되었을 때는 주파수 응답함수(FRF)로 수렴하게 되지만, 그렇지 못할 경우에는 $E(j\omega)|_T$ 배 만큼의 오차를 가지게 된다는 것을 알 수 있다.

2.2 충격 및 응답신호의 이산화와 스펙트럼

충격신호와 감쇠하는 정현파 응답신호는 일회적이고 비 주기적인 신호이기 때문에 적분 시간(T)에 의존적인 주파수 응답함수를 얻게 됨을 2.1 절에서 보았다. 본 절에서 실험으로 충격해머 가진에 의한 변위응답으로부터 주파수 응답함수를 구하는 과정을 소개한다.

충격해머에 의한 가진력 신호는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$f(t) = \begin{cases} P \sin \frac{\pi}{t_0} t, & \text{if } 0 \leq t \leq t_0 \\ 0, & \text{else} \end{cases} \quad (7)$$

여기서 t_0 가 충분히 작으면 충격신호로 근사화

될 수 있으며 이에 대한 충격응답 신호는 식(8)와 같이 표현 될 수 있다.

$$x(t) = A e^{-bt} \sin ct, \quad \text{단 } t \geq 0 \quad (8)$$

한편, 충격 가진력 신호에 대하여 Δt 간격으로 샘플링한 이산 신호에 대해서 Fourier Transform 하면

$$F(f) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} [\Delta t f(i\Delta t)] e^{-j2\pi f i \Delta t} \quad (9)$$

와 같이 표현 되므로, T_{RL} 시간 동안 샘플링한 $N(T_{RL}/\Delta t)$ 개의 데이터에 대한 식으로 변환하면

$$F(k\Delta f) = \Delta t \sum_{i=0}^{N-1} f(i\Delta t) e^{-j2\pi(k\Delta f)i\Delta t} \quad (10)$$

$$= T_{RL} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f(i\Delta t) e^{-\frac{j2\pi ki}{N}}$$

과 같이 된다. 식(10)은 $T_{RL} = N \cdot \Delta t = 1/\Delta f$ 의 관계를 이용하였고 DFT와의 관계를 보여준다. 이제 식(7)을 식(10)에 대입하여 정리하면 식(11)가 된다.

$$F(k\Delta f) = \Delta t P \sum_{i=0}^{\text{mod}(t_0/\Delta t)} \sin\left(\frac{\pi}{t_0} i \Delta t\right) e^{-\frac{j2\pi ki}{N}} \quad (11)$$

식(11)는 샘플링 시간 Δt 가 결정되면 신호 획득 시간 T_{RL} 에 무관하게 일정한 값을 가지게 되므로써 충격신호의 물리적인 의미를 유지할 수 있게 되었다. 식(8)에 주어진 응답신호에 대해서도 같은 방법으로 정리하면 다음 식과 같이 된다.

$$X(k\Delta f) = \Delta t A \sum_{i=0}^{N-1} e^{-b(i\Delta t)} \sin[c(i\Delta t)] e^{-\frac{j2\pi ki}{N}} \quad (12)$$

식(12)은 임의의 샘플링 시간 Δt 에 대해서 신호 획득시간 T_{RL} 또는 데이터수 N 이 커짐에 따라 우변의 지수 감쇠 항이 점점 0으로 수렴하게 되므로써 그 이상에서의 응답신호는 주파수 신호에 영향을 거의 미치지 못하게 되어 일정한 값을 가지게 된다.

2.3 충격응답신호처리 오차와 누설오차

실제 충격해머 실험에서는 여러 가지 요인으로 인해 신호 획득시간을 제한하지 않을 수 없기 때문에 식(12)의 계산에서 신호처리 데이터 부족

으로 인한 오차가 발생하게 된다. 이 오차를 본 논문에서는 충격응답신호처리 오차라 명명한다. 신호획득시간 T_{RL} 변화에 따른 충격응답신호처리 오차량의 경향을 알아 보기 위해 식(7)과 식(8)에 $P=10^3$, $t_0=10^{-3}$, $A=10^3$, $b=5$, $c=2\pi 100$, $\Delta t=10^{-4}$ 의 값들을 각각 대입하였다. 이때의 충격신호와 응답신호를 Fig. 2와 Fig. 3에 나타내었고, T_{RL} 을 변화시키면서 구한 스펙트럼을 Fig. 4와 Fig. 5에 나타내었다. Fig. 4에서 볼 수 있듯이 같은 충격신호에 대해서 샘플링 시간 Δt 가 결정되고 나면 신호획득시간 T_{RL} 는 주파수 간격에 영향을 주지만 스펙트럼의 값을 변화시키지는 않음을 알 수 있다. 하지만 Fig. 5를 보면 충격응답 신호의 스펙트럼이 신호획득시간 T_{RL} 에 따라 달라짐을 알 수 있다. Fig. 5에서 peak 값이 신호획득시간 T_{RL} 이 0.1sec ~ 1.5sec 변할 때 달라지는 경향을 나타낸 것이 Fig. 6이다. 신호획득시간 T_{RL} 이 길어 질수록 충격응답신호처리 오차는 작아 짐을 확인 할 수 있다. 또 Fig. 6에서 특정한 영역을 확대한 그림을 보면 신호획득시간 T_{RL} 이 짧은 구간 ㉠에서는 누설오차에 의해 peak 값의 변화가 큰 반면에 신호획득시간 T_{RL} 이 긴 구간 ㉡에서는 그 변화가 적음을 알 수 있다.

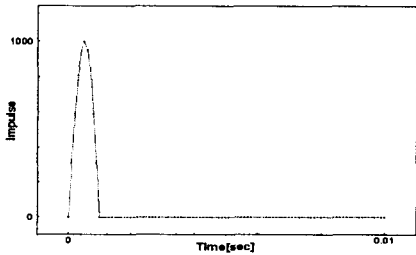


Fig. 2 Impulse signal

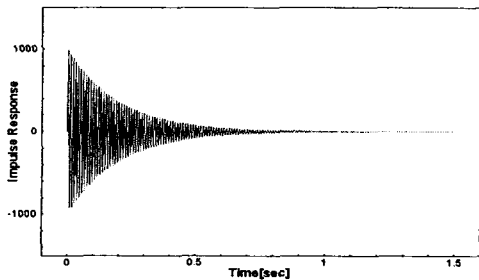


Fig. 3 Impulse response signal

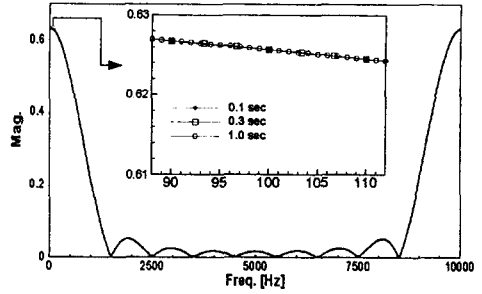


Fig. 4 Spectrum of impulse signal

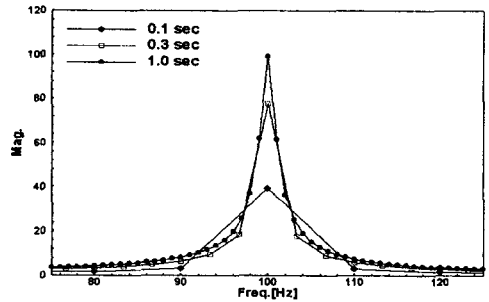


Fig. 5 Spectrum of impulse response signal

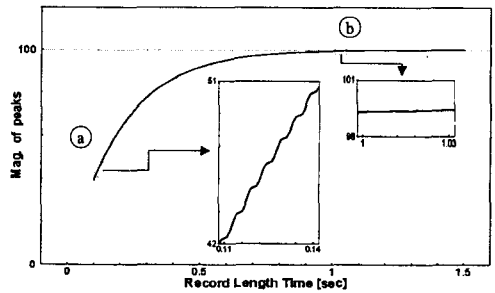


Fig. 6 The variation of peak values of impulse response spectrum to record length

2.4 충격응답함수 스펙트럼과 FRF의 비교

기존의 디지털 신호분석 방법으로 충격해머의 힘 신호와 응답의 변위신호를 각각 DFT 하여 주파수응답함수 스펙트럼을 구할 때 발생하는 충격응답신호처리 오차를 보이기 위해 Fig. 1과 같은 1 자유도 점성감쇠 모델에 대하여 시뮬레이션 하였다. 질량 $m = 3.0\text{kg}$, 강성 $k = 47374.1\text{N/m}$, 감쇠 $c = 11.3097\text{N}\cdot\text{s/m}$ 를 적용하고 $f(t)$ 는 단위충격으로 하여 식(1)의 미분방

정식을 수치적인 방법(Runge-Kutta)으로 변위 응답을 구했다. 1 자유도계에 가해진 충격력과 그에 의한 변위응답을 수치적으로 구한 것을 Fig. 7 에 나타내었다. Fig. 8 은 식(15)을 이용하여 구한 주파수응답함수의 크기를 나타낸 것이다.

$$\frac{X}{F}(\omega) = \frac{1}{k - m\omega^2 + jc\omega} \quad (15)$$

충격신호와 응답신호를 샘플링 시간 (t 는 고정하고 4 초 동안 4,096 개를 샘플링한 경우와 1 초 동안 1,024 개를 샘플링한 경우에 대하여 단위충격응답함수 스펙트럼을 구하고 이것을 이용하여 모달원(modal circle)을 구하였다. 앞의 두 경우의 단위충격응답함수 스펙트럼의 모달원과 식(16)에 의한 주파수응답함수의 모달원을 Nyquist plot 상에서 비교한 것이 Fig. 9(a)와 Fig. 9(b)이다. Fig. 9(a)의 경우는 신호획득시간 T_{RL} 이 충분히 길기 때문에 충격응답신호처리 오차도 무시할 정도로 작고 누설오차도 없는 것을 알 수 있고, Fig. 9(b)의 경우는 응답신호 주기에 맞게 신호를 획득했기 때문에 누설오차의 영향은 없으나 신호획득시간이 짧음으로 인한 충격응답신호처리 오차가 발생하였음을 알 수 있다.

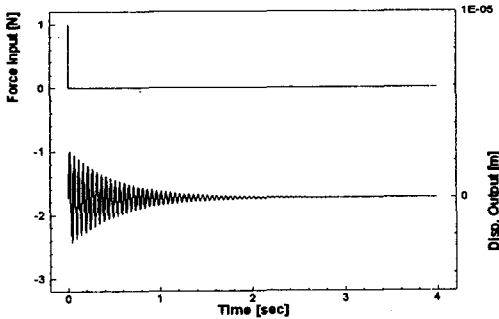


Fig. 7 Impulse input and displacement response for the 1-DOF damped model (by Runge-Kutta method)

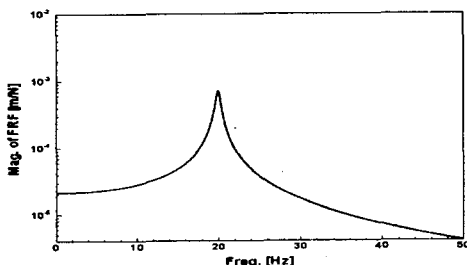
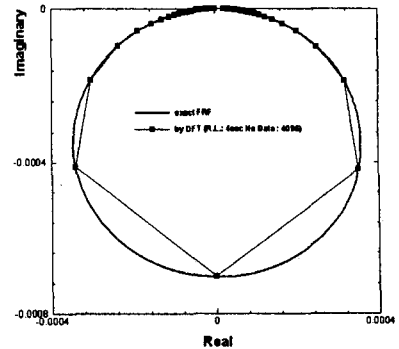
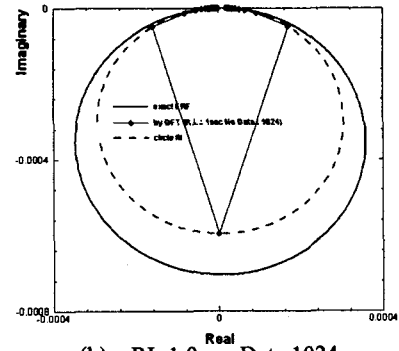


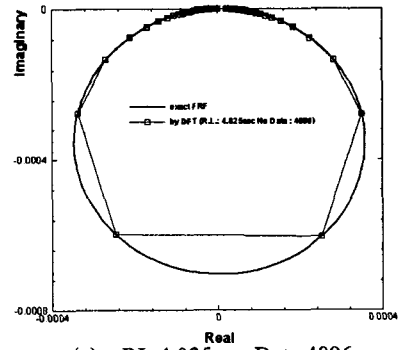
Fig. 8 Magnitude of F.R.F. calculated by Eq. (15)



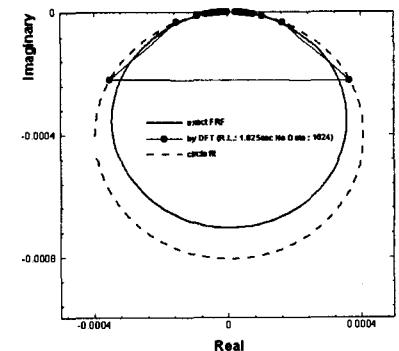
(a) RL:4.0sec, Data:4096



(b) RL:1.0sec, Data:1024



(c) RL:4.025sec, Data:4096



(d) RL:1.025sec, Data:1024

Fig. 9 The comparison of Nyquist Plot between the exact FRF and impulse response spectrum

Fig. 9(c)와 Fig. 9(d)는 신호획득시간을 응답 신호의 주기에 맞지 않게 획득하여 누설오차의 영향을 나타낸 것이다. Fig. 11 은 신호획득시간 4.025 초 동안 4096 개를 샘플링한 경우이고, Fig. 12 는 1.025 초 동안 1024 개를 샘플링한 경우를 나타낸다, 신호획득시간이 충분히 길었던 Fig. 9(c)은 누설오차의 영향으로 인해 최대 peak 값을 표현하지는 못하지만 모달원이 이론적인 것과 거의 일치하는 반면에 Fig. 9(d)는 누설 오차와 충격응답신호처리 오차로 인해 이론적인 모달원과는 크게 차이를 알 수 있다.

3. 충격응답함수 스펙트럼을 이용한

FRF 계산식 유도

2 장에서 충격응답신호를 충분히 긴 시간 동안 획득하지 않으면 충격응답신호처리 오차와 누설 오차로 인해 정확한 주파수응답함수를 구할 수 없음을 보였다. 본 장에서는 충격해머 실험으로 구한 충격응답 스펙트럼으로부터 충격응답함수의 변수들을 직접 구하는 식을 유도한다.

3.1 단위충격응답함수의 이산화와 스펙트럼

Fig.1 과 같이 질량 m , 강성 k , 감쇠 c 를 갖는 1 자유도 감쇠 진동계의 단위충격응답함수(unit impulse response function) $h(t)$ 는 식(16)과 같다.

$$h(t) = Ae^{-\sigma t} \sin 2\pi f_d t \quad (16)$$

여기서

$$A = \frac{1}{2\pi m f_n \sqrt{1-\zeta^2}} \quad (16a)$$

$$\sigma = 2\pi \zeta f_n \quad (16b)$$

$$f_d = f_n \sqrt{1-\zeta^2} \quad (16c)$$

이다.

식(16)을 샘플링 시간을 Δt 로 하여 식(12)과 같이 이산화된 주파수 표현식으로 나타내면 다음과 같이 된다.

$$H_\nu = \frac{T_{RL}}{N} \sum_{i=0}^{N-1} h_i e^{-\frac{j2\pi\nu i}{N}}, \quad \nu = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2}-1 \quad (17)$$

여기서

$$h_i = Ae^{-\sigma i \frac{T_{RL}}{N}} \sin[2\pi f_d i \frac{T_{RL}}{N}] \quad (17a)$$

이다. 식(17)을 등비급수 합의 공식을 이용하여 다시 정리하면 식(18)과 같이 된다.

$$H_\nu = \frac{A \cdot T_{RL}}{2 \cdot j} \left[\frac{1 - e^{-[\sigma T_{RL} - j2\pi(m-\nu)]}}{N[1 - e^{-[\sigma T_{RL} - j2\pi(m-\nu)]/N}]} - \frac{1 - e^{-[\sigma T_{RL} + j2\pi(m+\nu)]}}{N[1 - e^{-[\sigma T_{RL} + j2\pi(m+\nu)]/N}]} \right] \quad (18)$$

$$, \nu = -\frac{N}{2}, \dots, -1, 0, 1, \dots, \frac{N}{2}-1$$

여기서

$$m = \frac{f_d}{\Delta f} = f_d T_{RL} \quad (18a)$$

이고, m 은 신호획득시간 T_{RL} 내에 존재하는 정현파의 개수를 의미한다. m 이 정수가 될 때 누설오차가 없는 단위충격응답함수 스펙트럼을 얻을 수 있지만, 일반적으로 m 은 실수가 되므로 다음과 같이 표현 된다.

$$m = p(\text{정수부}) + q(\text{소수부}) \quad (19)$$

여기서 p 는 실험으로 구한 단위충격응답함수 스펙트럼에서 peak 이 있는 위치의 일련번호가 되고 q 는 스펙트럼 상에서는 나타낼 수 없는 주파수오차량이 된다. 데이터 개수 N 이 무한히 크다고 가정하고 식(19)를 식(18)에 대입하면 식(20)을 유도해 낼 수 있다.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} H_\nu = \frac{A \cdot T_{RL}}{2} \left[\frac{1 - e^{-\sigma T_{RL}} \cdot e^{j2\pi\{(p+q)-\nu\}}}{2\pi\{(p+q)-\nu\} + j\sigma T_{RL}} + \frac{1 - e^{-\sigma T_{RL}} \cdot e^{-j2\pi\{(p+q)+\nu\}}}{2\pi\{(p+q)+\nu\} - j\sigma T_{RL}} \right] \quad (20)$$

식(20)은 신호의 시간영역에서 Δt 가 0 이 되므로써 샘플링 오차가 없는 단위충격응답 스펙트럼의 식이 된다.

3.2 오차가 제거된 단위충격응답함수 추정

충격해머 가진으로 구한 충격응답함수 스펙트럼이 신호획득시간 T_{RL} 에 따라 충격응답신호 오차와 누설오차에 의해 크게 달라 진다는 것을 앞절에서 밝혔다. 본 논문에서는 충격해머 실험으로 구한 충격응답함수 스펙트럼의 peak 와 peak 앞과 뒤의 값의 크기 비를 식(20)에 적용하여 단위충격응답함수의 변수인 식(16)의 A , σ , f_d 를 직접 구하기로 한다. 먼저 식(20)에서 peak 와 peak 앞과 뒤의 값의 크기 비를 정리하여 나타내면 다음 식과 같이 된다[1].

$$R_-^2 = \left| \frac{H_p}{H_{p-1}} \right| \quad (21)$$

$$= \frac{[2p(q+1) + (\sigma T_{RL}/2\pi)]^2 + [2(\sigma T_{RL}/2\pi)]^2}{[q \cdot 2p + (\sigma T_{RL}/2\pi)]^2 + [2(\sigma T_{RL}/2\pi)p]^2}$$

$$R_+^2 = \left| \frac{H_p}{H_{p-1}} \right|^2 \quad (22)$$

$$= \frac{[2p(q-1) + (\sigma T_{RL}/2\pi)]^2 + [2(\sigma T_{RL}/2\pi)]^2}{[q \cdot 2p + (\sigma T_{RL}/2\pi)]^2 + [2(\sigma T_{RL}/2\pi)p]^2}$$

이 때 일반적으로 $p \ll 1$, $p \ll q$ 임을 이용하여, $p \pm 1 \approx p$, $2p + q \pm 1 \approx 2p$ 로 근사화 하였다. 식(19)와 식(20) 좌변의 R_{\pm}^2 는 실험으로 구한 주파수응답함수 스펙트럼으로부터 알 수 있는 값이므로 두 식을 연립하여 풀면 감쇠율 σ 를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\sigma = \frac{\pi}{T_{RL}} \sqrt{-\left(\frac{R_+^2 - R_-^2}{R_+^2 + R_-^2 - 2}\right)^2 + \frac{8}{R_+^2 + R_-^2 - 2}} \quad (23)$$

식(23)에서 구한 감쇠율 σ 를 식(21) 또는 식(22)에 대입하여 주파수오차량 q 를 구하고, 이것을 식(18a)와 식(19)를 이용하면 감쇠고유진동수 f_d 를 구할 수 있다. 마지막으로 감쇠율 σ 와 주파수오차량 q 를 식(18)에 대입하면 진폭 A 를 구할 수 있다. 이렇게 구한 감쇠율 σ 와 감쇠고유진동수 f_d , 그리고 진폭 A 를 식(16a), (16b), (16c)에 대입하면 m , c , k 를 구할 수 있고, 이것을 식(15)에 대입하면 새로운 주파수응답함수를 얻을 수 있다.

4. 적용 예

2.4 절에서 시뮬레이션으로 구한 충격응답함수 스펙트럼을 이용하여 본 논문에서 제안하는 방법을 적용해 보았다. 그 결과를 Table 1 에 나타내었다. 여기서 case1 은 신호획득시간 T_{RL} 과 data 수 N 을 각각 4.0sec 에 4096 개로 한 경우이고, case2 는 4.025sec 동안 4096 개, case3 는 1.0sec 동안 1024 개, case4 는 1.025sec 동안 1024 개로 한 경우의 충격응답 스펙트럼을 이용한 것이다. Table 1 과 같이 구한 case4 에 대한 단위충격응답함수의 변수를 이용하여 주파수응답함수를 구하였고, 이론적인 주파수응답함수와 비교하여 Nyquist plot 상에 나타낸 것이 Fig. 10 이다.

Table 1 The parameters of unit impulse response function calculated by the method proposed in this paper

	A	σ	f_d
EXACT	2.6529×10^{-3}	1.8850	19.9977
case1	2.6454×10^{-3}	1.8849	19.9963
case2	2.6475×10^{-3}	1.8940	19.9972
case3	2.6484×10^{-3}	1.8775	19.9723
case4	2.7577×10^{-3}	2.0806	19.9918

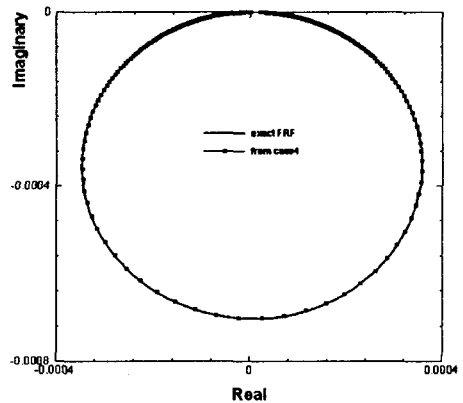


Fig. 10 The comparison of Nyquist Plot between the exact FRF and the function calculated by the unite impulse response function's parameters (for case4).

5. 결론

감쇠 1 자유도 진동모델에 대한 주파수응답함수(FRF)와 충격응답함수의 Fourier Transform과의 관계는 FT에서의 적분 시간 T 에 의존적임을 보였다. 또 충격해머 실험에서 실제로 얻게 되는 충격신호와 충격응답신호의 형태를 가정하고 N 개의 데이터로 이산화하여 스펙트럼을 구하였고, DFT와의 관계도 함께 규명하였다. 또한 이 스펙트럼이 진동모델의 주파수응답함수를 잘 표현하기 위해서는 충분히 긴 시간의 응답신호가 필요하다는 것을 보였고, 그렇지 못했을 때는 충격응답신호처리 오차와 누설오차가 발생하는 것을 보였다. 감쇠 1 자유도 모델에서 충격 가진에 대한 변위 응답 신호를 수치적인 방법으로 구했고, 이들을 각각 신호획득시간을 변화해 가면서 DFT하여 구한 충격응답함수 스펙트럼을 Nyquist plot 상에서 비교해 보았다. 본 논문에서는 신호획득시간 T_{RL} 에 따라 변화하는 충격응답함수 스펙트럼으로부터 단위충격응답함수의 변수들을 계산하는 식을 정리하였다. 그리고 시플레이션으로 구한 격응답함수 스펙트럼에 본 논문이 제안한 식을 적용하여 단위충격응답함수의 변수들을 직접 구해 보았고, 이 변수들을 이용하여 주파수응답함수를 계산해서 이론적인 것과 비교해 보았는데 상당히 잘 일치하는 것을 확인할 수 있었다.

참고 문헌

- (1) 정의봉, 안세진, 장호엽, 장진혁, 2001, "디지털 푸리에 변환에서 누설오차의 개선", 한국소음진동공학회지, 제 11 권, 제 3 호, pp. 455-460.
- (2) S. S. Rao, 1990, Mechanical Vibrations, Chapter 4, Addison-Wesley Publishing Company, Inc..
- (3) Julius. S. Bendat and Allan G. Piersol, 1986, Random Data: Analysis and Measurement Procedures, Chapter 6, John Wiley & Sons, Inc..
- (4) John C. Burgess, 1975, "On Digital Spectrum Analysis of Periodic Signals", The Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 58, No. 3, pp. 556-567
- (5) Huang Dishan, 1995, "Phase Error in Fast Fourier Transform Analysis", Mechanical System and Signal Processing 9(2), pp. 113-118