

멀티스케일 파라다임과 웨이블릿

김 윤 영
(서울대학교 기계항공공학부)

1. 서론

모든 과학 및 공학분야에 걸쳐, 신호나 함수를 어떻게 표현하는 것이 바람직한 것인지에 대해서 많은 연구가 이루어져 왔다. 만약 신호나 함수를 적절하게 잘 표현하게 되면, 그것들 속에 내재된 의미있는 물리적 현상을 쉽게 파악할 수도 있고, 최소한의 함수나 데이터로 효과적으로 표현할 수도 있다. 지난 10여년 동안 비약적 발전을 해온 '웨이블릿'이라는 것도 신호나 함수를 표현하는 새로운 도구인데, 이것이 각광을 받고 있는 이유는 웨이블릿이 전통적인 표현방법이 제공하지 못하는 특성을 제공하기 때문이다. 사실 웨이블릿이 갖는 특징을 여러 관점에서 살펴볼 수 있으나, 본 강연에서는 웨이블릿을 신호나 함수를 '멀티스케일(multi-scale)'로 표현하게 해 주는 하나의 새로운 도구, 즉, '멀티스케일 파라다임을 구현하기 위한 도구'라는 관점에서 웨이블릿을 살펴보고자 한다. 웨이블릿 이론이 어떻게 전개되어 왔는지에 대해서는 Hubbard(1996)을 참고하기 바란다.

본 강연에서는 먼저 멀티스케일(multiscale)에 대한 기본적 개념을 소개하고, 이를 통해 자연스럽게 웨이블릿 개념을 도입하고 한다. 이러한 개념을 바탕으로 어떤 신호 (또는 함수) 공간을 표현하는 '기저(basis)'로서의 웨이블릿을 살펴본 후, 현재 많이 사용되고 있는 대표적인 웨이블릿과 그 특성을 살펴보고자 한다. 마지막으로 몇몇 분야에서의 웨이블릿 응용사례를 소개하고자 한다.

2. 멀티스케일 표현과 웨이블릿

이 절에서는 멀티스케일로 표현한다는 것이 무엇을 의미하는지를 설명하기 위해서 그림 1(a)과 같은 어떤 곡선을 보간(interpolation)하는 문제를 생각해보기로 한다. 어떤 곡선(또는 함수)을 여러 가지 방법으로 보간할 수 있으나, 여기서는 그림 1(a)에서 예시되어 있듯이, 가장 간단한 보간형태인 모자형 보간함수의 조합으로 곡선을 보간하는 방법을 생각해보기로 한다. 그림 1(a)에 있는 보간 방법은 전통적인 유한요소에서 사용되는 선형 변위함수를 이용하여 문제의 해를 이산화하는 것과 동일하다. 보간되는 점은 그림에서 검은 원으로 표시하였다. 그림 1(a)에서 있는 보간함수는 자신의 보간점에서는 1이고 나머지 보간점에서 모두 0이 되는 부분적인 선형함수(piecewise linear function)이다.

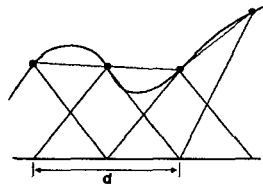
만약 그림 1(a)에 있는 곡선을 보다 정밀하게 보간하려면 그림 1(b)에서처럼 보간함수의 지지구간(함수가 0이 아닌 구간을 의미함)이 그림 1(a)에서 사용된 보간함수의 지지구간의 1/2이 되는 보간함수를 사용하면 된다. 즉 보간의 정밀도를 증가시킬 때마다, 보간함수의 지지구간의 크기를 반씩 줄여가면 된다. 그런데, 그림 1(c)는 그림 1(b)과는 다른 표현방법이긴 하지만, 그림 1(b)에서 사용된 것과 동일한 보간점을 이용하고 있고, 아울러 그림 1(b)와 똑같은 정밀도로 곡선을 표현하고 있다. 그림 1(b)와 그림 1(c)에서의 보간의 차이점은 그림 1(b)에서는 곡선이 지지구간이 모두 $d/2$ 인 모자형 함수 7개로 근사화된 것에 반해, 그림 1(c)에서는 곡선이 지지구간이 d 인 모자형 함수 4개와 지지구간이 $d/2$ 인 모자형 함수 3개로 (하지만, 그림 1(b)에서 사용된 함수의 수와 그림 (c)에서 사용된 함수의 수가 동일하다는 점에 주목할 것) 근사화되었다는 것을 알 수 있다. 여기서 핵심이라고 생각되는 점을 정리하면 다음과 같다.

- 1) 그림 1(b)과 그림 1(c)에 사용된 기저함수가 표현하는 함수공간은 동일하다.
- 2) 그림 1(b)에 사용된 함수공간의 기저는 지지구간이 모두 $d/2$ 인 단일 스케일(single scale)의 함수로 구성된 것에 반해, 그림 1(c)의 공간은 지지구간이 d 와 $d/2$ 인 멀티스케일(multiscale)의 함수로 구성되어 있다.
- 3) 그림 1(c)의 공간표현에 여러 스케일이 사용되었지만, 각각의 함수는 그림 1(b)에서의 함수처럼 모두 독립적이다. 즉 그림 1(c)에 사용된 함수도 기저를 이룬다.

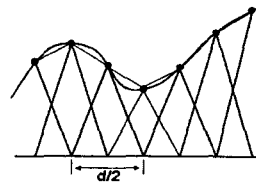
그런데, 그림 1(b)에 사용된 기저와 그림 1(c)에 사용된 기저가 같은데, 그림 1(c)에서와 같이 멀티스케일로 함수를 표현하고자 하는 이유는 무엇일까? 물론 멀티스케일 표현을 적용하는 문제 유형에 따라, 그 이유가 다소 다르다고 할 수 있다. 하지만, 그림 1에 있는 것과 같은 어떤 곡선을 보간하는 경우, 원하는 정밀도(통상 에너지놈을 이용하여 평가)로 보간하기 위해서는 몇 개의 보간점을 이용해야 하는지를 사전에 알 수 없다. 이 경우 그림 1(a)에서처럼 매우 거칠게 근사해본 다음 그 정밀도가 만족스럽지 않으면 그림 1(b) 또는 그림 1(c)로 그 정밀도를 늘려나가게 된다. 이 때 그림 1(b)의 경우에는 그림 1(a)에서 이미 구해놓은 정보를 바로 이용하지 않고, 지지구간이 작은 더 정밀한 보간함수를 이용하여 다시 새롭게 보간하는 반면, 그림 1(c)의 경우에는 그림 1(a)에서 이미 구한 결과를 바탕으로 추가로 요구되는 부분만 수정해 나가는 방식이다. 즉 재보간을 할 필요가 없다는 것이다.

그림 1(d)는 그림 1(a)의 근사와 그림 1(c)의 '차이'만을 보여주고 있는데, 이 '차이'를 나타내는 보간함수의 지지구간은 그림 1(a)에 사용된 보간함수의 지지구간의 반에 해당한다는 것

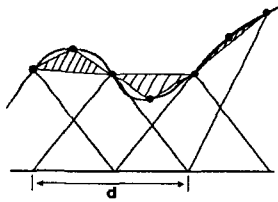
을 알 수 있다. 다음 단계의 더 정밀한 근사를 원한다면 그림 1(d)에 있는 함수의 지지구간의 반을 갖는 보간함수를 추가하게 된다. 이와 같이 두 정밀도 또는 해상도를 갖는 두 보간공간의 '차이'를 표현하는 그림 1(d)에 제시된 함수를 '보간 웨이블릿'이라고 부른다. 즉 웨이블릿이란 이러한 '차이'를 표현하게 해 주는 수학적 도구이다. 두 보간 공간의 정밀도 또는 해상도의 차이가 여러 단계에 걸쳐 있을 때, 그 '차이'를 여러 스케일을 갖는 웨이블릿으로 표현하게 되는 것이다.



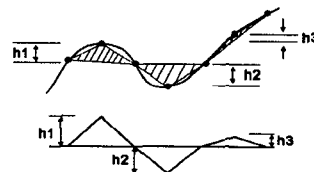
(a) 지지구간 d 의 모자형 함수로 보간



(b) 지지구간 $d/2$ 의 모자형 함수로 보간



(c) 멀티스케일 개념에 의한 함수의 보간



(d) 그림 1(a)와 그림 1(b)에서 중간 절점에서의 함수값의 차이

그림 1 곡선의 여러 보간 방법

그림 1에서는 어떤 곡선을 멀티스케일 기반으로 보간하기 위해서, 보간 웨이블릿이라는 함수를 이용하는 방법을 설명하였다. 통상적으로 웨이블릿을 소개할 때 가장 많이 사용하는 것이 Haar 웨이블릿이다. 이 Haar 웨이블릿을 설명하기 위해서는 그림 2에 있는 부분적으로 상수인 f (이것을 이산형 자료로 볼 수도 있음)를 예를 들면 편리하다. 그림 2(a)는 f 를 단일스케일로 표현한 것이고, 그림 2(b)는 f 를 멀티스케일로 표현한 것이다. 그림 2(a,b)에는 f 를 표현하기 위해 사용된 기저함수들도 그려져 있다. 그림 2(b)에서 평균을 나타내는 첫 번째 함수를 Haar 스케일링함수라고 부르고, 왼쪽과 오른쪽의 '차이'를 나타내는 나머지 3개의 함수를 Harr 웨이블릿이라고 하는데, 이 그림에서의 3개의 웨이블릿은 2 스케일에 걸쳐 있다. 여기서 주목할 점은 3개의 웨이블릿은 어떤 한 웨이블릿을 팽창(또는 수축)하여 그것을 평행 이동하면 모두 만들 수 있다는 것이다. 이것은 웨이블릿이 효율적인 수학적 도구가 되는데 필요한 중요한 특징 중의 하나이다. 그리고 Haar 웨이블릿의 평균은 항상 0이

라는 것에 주목할 필요가 있다. 실제로 앞서 설명한 보간 웨이블릿을 제외한 나머지 종류의 웨이블릿은 그 평균이 항상 0이 되는 특징이 있는데, 이것은 바로 웨이블릿이 '차이', 즉 함수의 국부적인 변화를 나타내도록 고안되었기 때문이다.

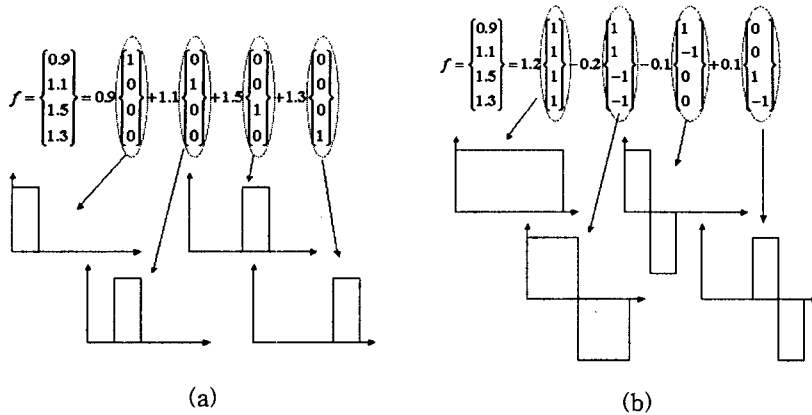


그림 2 부분적으로 상수 함수(또는 이산형 자료)의 표현방법. (a) 단일스케일 기반의 Haar 스케일링 함수로 표현한 형태, (b) Haar 스케일링 함수와 3개의 Haar 웨이블릿으로 표현한 형태

3. 다중해상도해석(MRA)과 웨이블릿 기저

앞에서 설명한 바와 같이 웨이블릿은 함수(또는 신호)를 멀티스케일로 나누어 표현하는 새로운 수학적 도구이다. 웨이블릿으로 멀티스케일 표현을 하게 되면 특정 해상도를 갖는 함수를 낮은 해상도(resolution)에서 출발하여 원하는 해상도에 이르기까지 다중해상도로 표현할 수 있게 된다. 통상 이와 같은 해석을 다중해상도해석, 즉 MRA(MultiResolution Analysis)라고 한다. MRA를 구현하기 위해서는, 각 해상도를 표현할 수 있는 기저함수, 즉 스케일링 함수라는 것을 정의해야 한다. 이 때 웨이블릿은 일련의 연속된 해상도 공간(집합)의 차이를 측정하는 기저가 되는 셈이다. 일반적으로 MRA 개념을 설명하기 위해서는 그림 3과 같이 연속된 부분 공간을 이용한다. (여기서 타원의 크기는 그 공간의 크기로 이해하면 된다.)

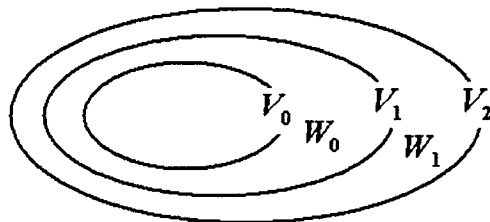


그림 3 다중해상도 표현을 위한 연속된 부분 공간

위의 그림에서 V_j 는 각 부분공간을 나타내고 W_j 는 두 부분공간 V_{j+1} 와 V_j 와의 차이를 나타낸다. 만약 우리가 원하는 공간이 유한에너지를 갖는 함수나 신호로 구성된 L^2 공간이라고 하면, 통상 다음과 같은 수식으로 MRA를 설명한다.

$$\begin{aligned} & \{0\} \subseteq \dots V_{-1} \subseteq V_0 \subseteq V_1 \subseteq \dots \subseteq L^2 \\ & \text{If } f(x) \in V_j, \text{ then } f(2x) \in V_{j+1} \\ & \text{If } f(x) \in V_j, \text{ then } f(x-k) \in V_j \quad k, z \in \mathbb{Z}(\text{정수}) \end{aligned} \quad (1)$$

이 경우 V_0 와 ‘차이’ 공간 W_0 를 각각 생성하는 스케일링 함수 $\phi(x)$ 와 웨이블릿 $\psi(x)$ 가 정의되면, $\phi_{j,k} = 2^{j/2} \phi(2^j x - k)$, $\psi_{j,k} = 2^{j/2} \psi(2^j x - k)$ ($k \in \mathbb{Z}$)는 곧바로 V_j , W_j 의 기저함수가 되는 특징이 있다. 물론 V_0 와 W_0 를 표현하기 위해 어떤 형태의 함수를 사용하느냐에 따라서 다양한 웨이블릿이 존재하게 된다. 여기서 ‘멀티스케일’, ‘웨이블릿’, ‘다중해상도해석’ 간의 관계를 개념적으로 정리해보면 다음과 같다. 다중해상도로 함수나 신호를 매우 효율적으로 표현할 수 있는데, 이 다중해상도 해석을 수행하기 위해서는 멀티스케일 개념이 필요하다. 그리고 이 멀티스케일 개념은 웨이블릿이라는 수학적 도구로 가장 잘 구현된다는 것이다.

웨이블릿 기저가 갖는 또 하나의 중요한 특징은 신호의 정보를 시간과 주파수(또는 스케일) 두 영역에서 효율적으로 국소화시킬 수 있다는 것이다. 푸리에 변환(Fourier transform)에 근간을 두고 있는 전통적인 주파수 분석 기법은 소음 진동 해석 등의 문제를 포함하여 많은 공학 분야에서 활용되고 있으나, 해석하고자 하는 신호의 시간 정보를 전혀 제공하지 않는다는 단점이 있다. 이에 반해 웨이블릿 변환은 주어진 신호에 대한 시간과 주파수 영역에서의 정보를 균형적으로 국소화시킴으로써, 비정상, 과도 신호 등의 시간-주파수 해석을 가능하게 한다.

편의상 $-\infty < t < \infty$ 에서 정의되는 L^2 함수 f 는 웨이블릿만으로 표현할 수 있는데 이것을 급수 전개형태로 쓰면 다음 식에서처럼 스케일을 표현하는 인덱스(j)와 평행이동을 나타내는 인덱스(k)에 대한 이중 합(summation)으로 표현된다.

$$f = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k} \equiv \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_j[k] \psi_{j,k} \quad (2)$$

여기서 $\langle f, \psi_{j,k} \rangle$ 는 f 와 $\psi_{j,k}$ 와의 내적(inner product)을 나타낸다.

식 (1)의 MRA와 그림 3의 개념을 활용하면 식 (2)의 웨이블릿 $\phi(t)$ 는 스케일링 함수 $\phi(t)$ 로부터 식 (3a)처럼 구할 수 있으며, 또한 스케일링 함수사이에서도 식 (3b)와 같은 관계가 있음을 보일 수 있다(Daubechies,1992).

$$\phi(t) = \sqrt{2} \sum_n h_n \phi(2t - n) \quad (3a)$$

$$\phi(t) = \sqrt{2} \sum_n g_n \phi(2t - n) \quad (3b)$$

그런데 식 (3)에서 나타나는 계수 h_n 과 g_n 를 저주파 통과 및 고주파 통과 필터라고 부르는데, 이것은 이 계수들이 갖는 실질적 의미가 그렇기도 하지만, 웨이블릿이 많이 사용되고 있는 신호처리분야에서 이 용어가 보편적으로 사용되어 왔기 때문이다. 두 필터 g_n 과 h_n 의 관계는 $g_n = (-1)^n h_{1-n}$ 이며, 대부분의 웨이블릿 해석에서는 h_n 만 알면 g_n 은 물론 ϕ , ψ 를 구할 수 있기 때문에 웨이블릿의 설계란 바로 h_n 를 설계하는 것을 의미하게 된다.

예를 들어 길이 $N=2^J$ 인 유한한 이산신호 $a_j[k]$ ($k=0, \dots, 2^J-1$)를 $a_j[k] = \langle f, \phi_{j,k} \rangle$ 로 간주하면 이 이산신호에 대한 웨이블릿 계수 $d_j[k]$ 는 다음과 같이 계층적인 이산 필터링 과정에 의해 구해진다. (유한한 이산신호는 웨이블릿 계수로만 표현될 수 없으며, 전체 신호의 평균을 나타내는 평균치, 즉 가장 큰 스케일에서의 스케일링함수의 계수가 추가되어야 한다.)

$$\begin{aligned} a_{j-1}[p] &= \sum_k h[k-2p] a_j[k] \\ d_{j-1}[p] &= \sum_k g[k-2p] a_j[k] \end{aligned} \quad (5)$$

식 (5)의 과정을 통상 이산 웨이블릿 변환(DWT)이라고 한다. 식 (5)에서 얻은 웨이블릿 계수로부터 원 이산신호를 복원하는 과정을 역 이산 웨이블릿 변환(IWT)이라고 하며 이것도 다음과 같은 이산 필터링 과정에 의해 수행된다.

$$a_j[p] = \sum_k h[p-2k] a_{j-1}[k] + \sum_k g[p-2k] d_{j-1}[k] \quad (6)$$

식 (5), (6)의 웨이블릿 변환 과정을 Mallat 알고리즘(Mallat, 1998)이라고 하는데, 그림 4에서는 가장 간단한 Haar 기저를 이용하여, 길이가 4인 신호가 어떻게 웨이블릿 변환(그리고 역변환)이 되는지를 보여주고 있다.

지금까지는 주로 간단한 Haar 웨이블릿으로 이용하여 신호를 다루는 것을 설명하였다. 하지만 해석하고자 하는 대상이나 문제에 따라 다양한 형태의 웨이블릿이 사용되고 있다. 웨이블릿을 설계하거나 선정하는 가장 중요한 기준은 웨이블릿의 1) 소멸 모멘트(vanishing moment)의 차수와 2) 지지구간의 길이, 그리고 3) 직교성(또는 쌍직교성)이다. 소멸 모멘트

란, 신호의 효율적 표현과 연관된 것이고, 웨이블릿 지지구간은 시간 영역내의 에너지의 집중도 및 계산의 효율성과 관련되는데, 이 두가지 특징을 모두 원하는 정도로 좋게 할 수는 없다. 그리고 직교성(또는 쌍직교성)도 계산의 효율성과 관련된 특성이다. 따라서 신호 표현의 효율성, 에너지의 집중도, 계산의 효율성을 높이기 위해서는 이를 균형적으로 구현하는 웨이블릿을 선택할 필요가 있는데, Daubechies 웨이블릿 (그림 5 참조)은 동일 소멸 모멘트의 수에 대해 최소의 지지구간을 갖는 유일한 직교 기저함수이다. 그러나, Daubechies 웨이블릿의 이러한 특징에도 불구하고, 그 형상의 임의성 때문에 지지구간 내에서의 국소적 에너지가 한쪽으로 치우치는 단점이 있다.

영상 등의 문제에 있어, 시각적인 효과를 증진시키기 위해서는 대칭(symmetry) 혹은 비대칭(antisymmetry)의 웨이블릿 기저를 사용할 필요가 있는데, Haar 웨이블릿을 제외한 직교 웨이블릿 기저로는 이런 특성을 구현할 수 없다. 이 문제를 해결하기 위해서 쌍직교(bi-orthogonal) 웨이블릿(Cohen, et al. 1992)이 만들어졌는데, 직교 웨이블릿과는 달리 신호를 분해할 때와 합성할 때 다른 형태의 기저를 사용한다.

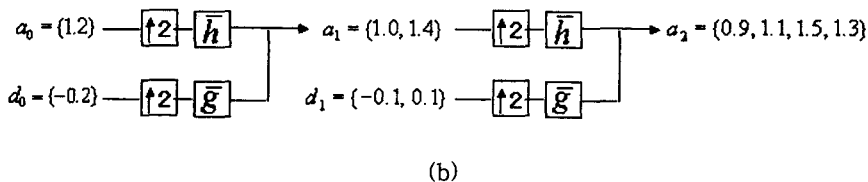
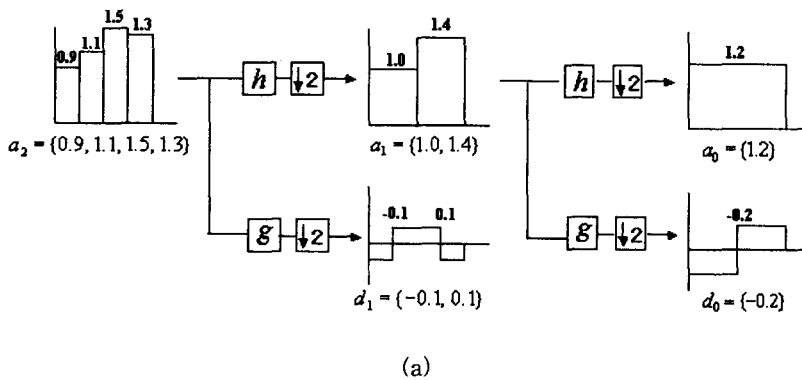


그림 4 (a) Haar 기저 ($h=[1/2, 1/2]$, $g=[1/2, -1/2]$)를 이용한 웨이블릿 변환 (b) 역변환

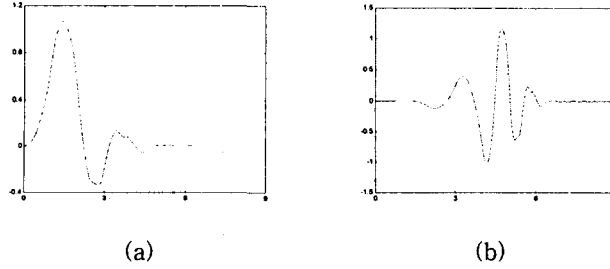


그림 5 차 Daubechies 기저 (a) 스케일링 함수, (b) 웨이블릿 함수

웨이블릿 변환이 갖는 간과할 수 없는 중요한 특징은 매우 적은 연산을 요한다는 것이다. 예를 들어 신호처리에서 전통적으로 사용되고 있는 FFT(Fast Fourier Transform)는 $O(N \log_2 N)$ 의 연산을 요구하는 반면 이산 웨이블릿 변환은 단지 $O(N)$ 의 연산을 요구한다. 따라서 빠른 실시간 처리를 필요로 하는 응용분야에서 웨이블릿 변환은 매우 유용하다. 특히 신호처리와 관련하여 생각해볼 때, 웨이블릿 변환은 시간과 주파수 영역에서의 정보를 균형적으로 국소화시킬 수 있는 장점도 있다.

4. 응용 사례

4.1 노이즈 제거

신호로부터 노이즈(일반적으로 가우스(Gaussian) 노이즈)를 제거하여 유용한 정보를 갖는 신호로 복원하는 문제는 웨이블릿의 대표적 응용 분야 중의 하나이다. 노이즈 제거 문제의 일반적 형태는 노이즈 $z(t)$ 에 의해 왜곡된 관측값 $y(t)$, 즉, $y(t) = f(t) + z(t)$, (여기서 $z(t) \sim N(0, \sigma^2)$)로부터 원 함수 $f(t)$ 를 복원하는 것이다. 웨이블릿 변환을 이용한 노이즈 제거는 노이즈는 그 통계적 특성을 반영하여 각 웨이블릿 계수로 고루 분포하고, 추정하고자 하는 신호는 적은 수의 웨이블릿 계수에 집중된다는 사실에 기초한다. Donoho 와 Johnstone (1994, 1995)은 이를 바탕으로 소위 웨이블릿 축소(Wavelet shrinkage) 기법을 노이즈 제거 방법으로 제안하였는데, 간단한 3단계의 과정을 통해 수행된다. 첫째, 관측 신호 $y(t)$ 에 대해 웨이블릿 변환을 수행하여, 각 스케일에 대한 웨이블릿 계수를 추출한다. 둘째, 정해진 문턱값에 대해 축소 작용소를 이용하여 각각의 웨이블릿 계수를 축소시킨다. 셋째, 축소된 웨이블릿 및 스케일링 계수를 이용하여 웨이블릿 역변환을 수행함으로써 노이즈가 제거된 추정 신호 $\hat{f}(t)$ 를 얻는다. 그림 6은 수정된 웨이블릿 축소 기법을 이용하여 가우스잡음과 이상치(outlier)를 동시에 제거함으로써, 시불변 선형 시스템의 전달 함수(FRF)를 추정한 사례를 보여주고 있다.(Kim, et al, 2001)

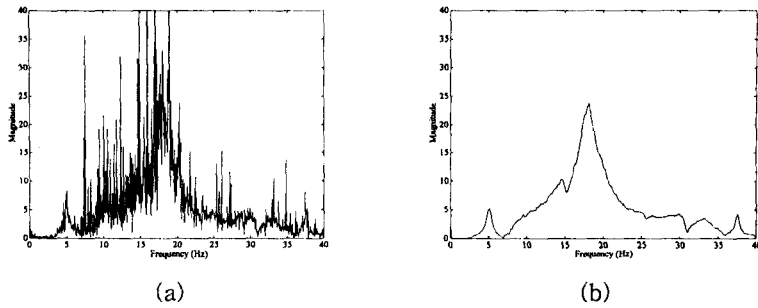


그림 6 (a) 잡음이 섞인 FRF (크기), (b) 잡음이 제거된 FRF

4.2 기계류의 이상진단

웨이블릿 변환 및 보다 일반화된 형태인 웨이블릿 패킷(wavelet packet) 변환은 베어링과 모터 등의 회전체 및 마모 등에 의한 공작 기계 등의 이상 상태를 진단하기 위해 효과적으로 사용될 수 있다. (Wu et al. (1996), Wang et al. (1996)) 이는 작동중인 기계에 이상이 발생할 경우, 진동이나 전류 신호에서 시간 및 주파수 성분이 민감하게 변화하기 때문에, 이런 정보를 적절히 분석할 수 있다면, 비정상 상태의 검출 및 이상의 원인을 효과적으로 진단할 수 있다는데 기초한다. 웨이블릿 패킷 변환은 고주파 영역의 주파수 분해능이 우수하고, 적절한 기저 선택을 통해서 주파수 대역을 유연하게 조절할 수 있다는 장점 때문에, 기계류의 이상 진단 문제에 일반 웨이블릿 변환에 비하여 보다 널리 활용되고 있다. 이상 진단을 위한 핵심 과정은 웨이블릿 패킷 변환을 통해 계측 신호를 다수의 주파수 대역으로 분해하고 그 주파수 대역으로부터 이상의 발생 및 원인을 잘 나타내는 특징(feature) 벡터를 추출하는 데 있는데, 이는 곧 신호 분류의 성능 문제와 직결된다. 현재까지 문헌을 통해 여러 특징 벡터 추출 기법이 보고되었는데, Coifman과 Wickerhauser (1992)가 제시한 엔트로피(entropy)에 기반하여 분류하고자 신호들에 공통적으로 적용할 수 있는 가장 효율적인 패킷 구조를 계산하고, 노이즈의 영향을 배제하기 위해서 특정 문턱값(threshold) 이상 계수의 에너지를 비교함으로써 패턴을 인식하는 방법(Yen et al. (2000))이 그 대표적 예라고 할 수 있다.

그림 7은 채터가 발생하기 전후의 드릴링 머신의 회전축 모터의 전류신호를 웨이블릿 패킷 변환으로 분석한 결과로서 결합에 의해 특정 시간 및 주파수 성분이 현저하게 차이가 남을 확인할 수 있는데, 이를 특징 벡터로 사용하면 효과적으로 이상 상태를 진단할 수 있다. 이처럼 웨이블릿 (패킷) 변환은 빠른 계산 속도와 구별성이 뛰어난 특징 벡터를 효과적으로 추출할 수 있다는 장점 때문에 신경망(Neural Network) 등의 분류자(classifier)와의 결합을 통해서 기계류의 실시간 감시 및 지능형 진단 시스템 구축에 널리 활용되고 있다.

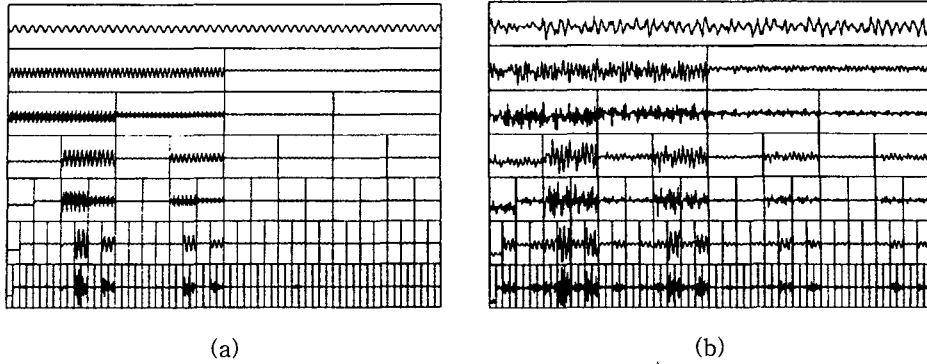


그림 7 드릴링 머신의 회전속 모터 신호의 웨이블릿 패킷 분석.
(a) 채터 발생 전, (b) 채터 발생 후

4.3 수치 해석

다중스케일 특성을 갖는 웨이블릿 기반 다중해상도 해석 개념은 수치해석에도 유용할 수 있음을 예상할 수 있다. 웨이블릿을 수치해석에 사용할 때 생각할 수 있는 가장 큰 장점은 적응 해석을 쉽게 할 수 있다는 것이고, 필요하다면 무요소 개념으로도 사용할 있다는 것이다. 초기 연구에서는 Daubechies계열의 직교성을 갖는 웨이블릿을 사용하였는데 (Cohen and Masson (1999), Dahmen (2001) 등), 이러한 웨이블릿로는 경계조건을 처리하기 어렵고 강성/질량 행렬 구성에 필요한 적분도 간단하지 않다. 따라서 이러한 문제점을 해결하기 위해서 최근에는 보간웨이블릿을 이용한 웨이블릿-갤러킨이 제안되었다. (Christon and Roach, 2000; Kim and Jang, 2002, Kim, et al. 2001). 그리고 이 방법을 무요소 개념으로 사용하려고 하면 소위 가상영역법을 활용하면 된다.

그림 8(a)에 있는 응력집중 현상이 발생하는 2차원 평면문제에 보간웨이블릿 기반 멀티스케일 갤러킨 방법을 적용하는 경우를 살펴보자(Kim et al., 2001). 해석 방법은 큰 스케일로 구성된 낮은 해상도 모델을 이용하여 문제를 해석한 후, 그 때 얻어지는 웨이블릿 계수의 크기를 본다. 웨이블릿 계수의 크기가 어떤 특정값보다 높으면, 그 계수가 보간하는 절점 주위에 보다 정밀한 해석이 요구된다는 것을 뜻하므로 다음의 정밀도를 갖는 해석 단계에서는 그 절점 주위에 더 작은 스케일을 갖는 웨이블릿을 추가해야 한다. 이러한 간단한 판단으로 적응해석을 쉽게 할 수 있다는 것이 웨이블릿-갤러킨 방법의 큰 장점이며, 이것이 가능한 이유는 웨이블릿이 해의 국부적 특성 변화를 나타내기 때문이다. 그림 8(b,c)는 웨이블릿-갤러킨 방법으로 해석하였을 때, 최종적으로 사용되는 절점의 위치를 보여준다. 전통적인 유한

요소해석에서의 적응해석법과는 달리, 수평변위와 수직변위 각각에 대해 필요한 정밀도의 절점이 사용된다는 것을 알 수 있다. 최근에는 형상최적화에서도 보간웨이블릿-갤러킨 방법이 매우 유용하다는 사실이 제시되고 있다. (Jang, et al, 2002)

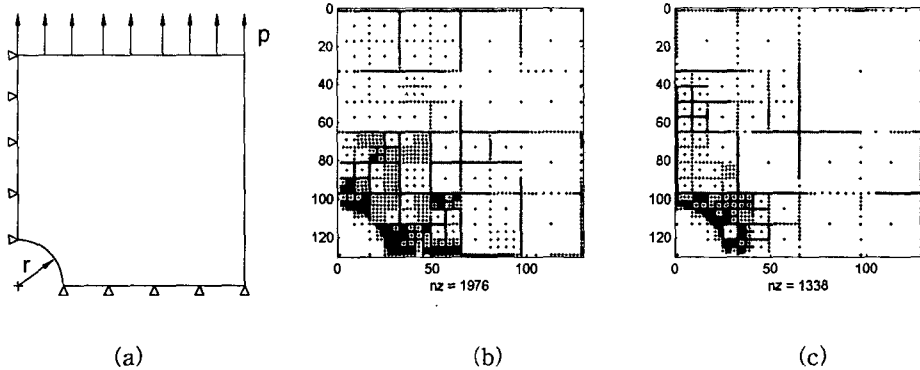


그림 8 (a) 인장을 받는 원형 구멍을 지닌 평판 문제, (b) (c) 최종 해상도(해의 수렴조건이 만족될 때까지 해상도와 절점 위치가 적응적으로 결정됨)를 갖는 모델에서 수평변위와 수직변위를 표현하기 위해 사용된 웨이블릿의 절점 위치

4.4 최적 설계

최근 최적설계분야에서도 멀티스케일 개념이 매우 유용하다는 사실이 제시된 바 있다. (Kim and Yoon, 2000). 예를 들어 밀도기반 위상최적설계의 경우, 설계영역을 이산화하는 각각의 유한요소 0과 1사이의 상대 밀도변수를 부여한다. 사용된 유한요소의 크기가 모두 같은 경우, 전통적인 방법에서는 단일 스케일을 갖는 밀도값 그 자체가 설계변수로 사용되는데 반해, 멀티스케일 설계(Kim and Yoon, 2000)에서는 각각의 요소에 부여된 밀도를 Haar 웨이블릿을 이용하여 멀티스케일로 변환한 멀티스케일 설계변수를 사용하게 된다. 설계변수를 이와 같이 멀티스케일로 표현하게 되면 설계의 해상도를 높여 가는 점진적인 (보다 정확하게 표현하면 Dyadic division) 설계를 수행할 수 있다. 이 경우 설계의 해상도가 높아갈 때마다, 전 단계에서 얻어지는 근사 설계가 다음 단계의 해상도의 초기 설계로 사용할 수 있게 된다. 그런데 이 설계기술이 갖는 가장 큰 장점은 이것은 자연스럽게 강건한 설계를 준다는 것이다. 또한 설계시간도 대폭 단축할 수 있게 해 준다.

최근에는 본 연구팀에서 멀티스케일 개념 기반의 유전 알고리즘(GA)을 새로 개발하여, 벤치마크 문제인 음의 포와송비를 갖는 재료의 미세구조 설계 최적화에 적용해 본 결과, 점진적인 멀티스케일 공간에서의 해의 탐색으로 극히 향상된 수렴속도로 제작이 용이한 강건

한 해를 얻을 수 있었다. 그림 9(a)는 음의 포와송비를 갖는 재료의 거동에 대한 정의이며 그림 9(b)는 단일스케일에 의한 재료의 설계 결과이며 그림 9(c)는 멀티스케일 유전 알고리즘을 적용하여 그러한 재료를 점진적으로 설계한 예를 보인 것이다. 이 이외에도 멀티스케일 개념을 이용하면 미케니즘의 위상 최적설계에서 큰 골치거리인 현지 문제도 해결할 수 있다는 것이 최근 연구되었다 (Yoon et al., 2002). 또한 형상최적설계에서도 설계속도장을 멀티스케일로 표현하면 형상설계를 매우 효율적으로 할 있다는 사실이 제시되고 있다 (Kim, et al., 2002).

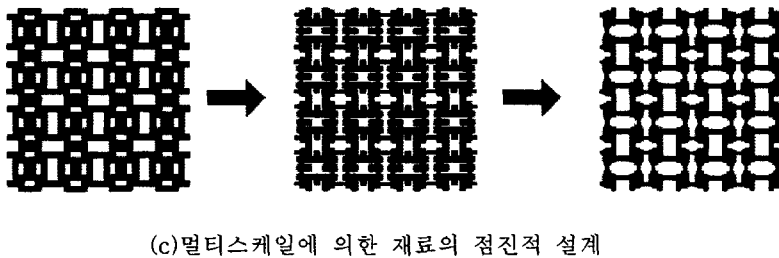
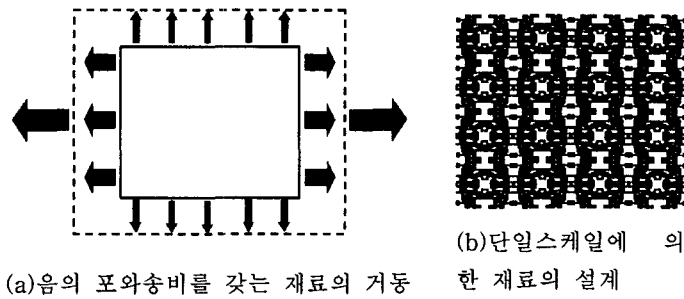


그림 9 음의 포와송비를 갖는 미세구조의 설계

후기

2002년도 춘계학술대회에서 한국소음진동공학회 학술상 수상자 특별강연을 기획해주신 관계자 여러분께 감사드립니다. 본 강연 자료준비에는 서울대학교 IDEALAB의 김재은, 윤길호, 장강원, 홍진철 연구원이 많은 도움을 주었습니다.

5. 참고문헌

- Christon, M. A. and Roach, D. W., 2000, The numerical performance of wavelets for PDEs: the multi-scale finite element. *Comput. Mech.* 25, pp. 230~244.
- Cohen, A., Daubechies, I., and Feauveau, J.-C., 1992, Biorthogonal bases of compactly supported wavelets, *Commun. on Pure and Appl. Math.* 45, pp. 485~560.
- Cohen, A., Masson, R., 1999. Wavelet methods for second order elliptic problems - preconditioning and Adaptivity. *SIAM J. Sci. Comp.* 21, 1006~1026.
- Coifman, R. R., Wickerhauser, M. V., 1992, "Entropy-Based Algorithm for Best Basis Selection", *IEEE Transactions on information Theory*, 38(2), pp. 713~718.
- Dahmen, W., 2001, Wavelet methods for P.D.E.s - some recent developments, *J. Comp. Appl. Math.* 128, 2001, pp. 133~185
- Daubechies, I., 1992, Ten Lectures on Wavelets, SIAM, Philadelphia.
- Donoho, D. and Johnstone, I., 1994, Ideal Spatial Adaptation by Wavelet Shrinkage, *Biometrika*, 81, pp. 425~455.
- Donoho, D. and Johnstone, I., 1995, Adapting to Unknown Smoothness via Wavelet Shrinkage, *J. Amer. Statist. Assoc.*, 90, pp. 1200~1224.
- Hubbard, B. B., 1996, The World According to Wavelets, A. K. Peters, Wellesley, MA.
- Jang, G. W., Kim, Y. Y. and Choi, K. K., 2002, Shape Optimization using the Wavelet-Galerkin Method, to be submitted.
- Kim, Y. Y. and Jang, G. W., 2002, Hat Interpolation Wavelet-Based Multi-Scale Galerkin Method for Thin-Walled Box Beam Analysis, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 53, 2002, 1575~1592.
- Kim, Y. Y., Jang, G. W., and Kim, J. E., 2001, Multiscale Wavelet-Galerkin Method for Meshless Analysis of Plane Elasticity Problems, in Computational Mechanics, *New Frontiers for the New Millennium*, Edited by S. Valliappan and N. Khalili, pp. 959~964, Elsevier, Amsterdam.
- Kim, J. E., Kim, Y. Y., Choi, K. K. 2002, Shape optimization using multiscaled design velocity fields, to be submitted.
- Kim, Y. Y., Yoon, G. H., 2000. Multi-resolution multi-scale topology optimization a new paradigm. *Int. J. Solids and Struct.* 37, 5529~5559.
- Kim, Y. Y., Hong, J.-C., Lee, N.-Y., 2001, Frequency Response Function Estimation via a Robust Wavelet De-noising Method, *J. Sound Vibr.*, 244(4), pp. 635~649.
- Mallat, S., 1998, A Wavelet Tour of Signal Processing, Academic Press.
- Yen, G. G., Lin, K.-C., 2000, Wavelet Packet Feature Extraction for Vibration Monitoring, *IEEE Trans. Indust. Electr.*, 47(3), pp. 650~667.
- Yoon, G. H., Kim, Y. Y., M. Bendsoe, O. Sigmund, 2002, Hinge-free topology optimization with embedded translation-invariant differentiable wavelet shrinkage, submitted to *Struct. Multidispl. Optimization*