

# 직선배치 긴장재를 갖는 PSC 휨 부재의 시간종속적 지배미분방정식

## Time-Dependent Differential Equation of PSC Flexural Member with Constant Eccentricity

강병수\*

김택중\*

조용덕\*

이용학\*\*

Kang, Byung Soo

Kim, Taek Jung

Cho, Yong Duck

Lee, Yong Hak

### ABSTRACT

A governing differential equation (GDE) of PSC flexural member with constant eccentricity considering the long-term losses including concrete creep, shrinkage, and PS steel relaxation is derived based on the two approaches. The first approach utilizes the force and moment equilibrium equations derived based on the geometry of strains of the uniform and curvature strains while the second one utilizes the principle of minimum total potential energy formulation. The identity of the two GDE's is verified by comparing the coefficients consisting of the GDE's. The boundary conditions resulting from the functional analysis of the variational calculus are investigated. Rayleigh-Ritz method provides a way to get the explicit form of the continuous deflection function in which the total potential energy is minimized with respect to the unknown coefficients consisting of the trial functions. As a closure, the analytically calculated results are compared with the experiments and show good agreements.

### 1. 서론

직선배치된 PS 긴장재를 갖는 PSC 휨 부재의 지배미분방정식을 힘 및 모멘트 평형방정식과 총 포텐셜 에너지에 대한 변분법(variational calculus)의 적용을 이용하는 두 방법에 의해 유도한다. 첫 번째 접근방법은 콘크리트, 철근 및 PS 강재로 구성되는 PSC 보의 단면에서 각각의 장기손실 요인에 대한 변형된 단면의 기하학적 관계로부터 변형률 관계식을 결정하고, 힘의 평형 및 모멘트 평형조건을 적용하여 유도된 일정변형률과 곡률의 관계식으로부터 지배미분방정식을 유도한다. 두 번째 접근방법은 내적 변형에너지와 외적 작용에너지로 구성되는 총 포텐셜 에너지 관계식의 functional 식에 변분법을 적용하므로써 시간종속적 지배미분방정식과 저차수 및 고차수 경계조건을 유도한다. 힘 및 모멘트 평형조건관계식으로부터 도출된 평형방정식은 총 포텐셜 에너지에 대한 변분법 적용으로 구한 고차수 경계조건과 동일함을 규명한다. 수치해석에서 Rayleigh - Ritz 법에 의한 결과치와 지배미분방정식에 의한 결과치를 비교하고 Rayleigh - Ritz 법의 적용성을 제시한다.

\* 정회원, 건국대학교 토목공학과

\*\* 정회원, 건국대학교 토목공학과 조교수

## 2. 평형방정식에 의한 지배미분방정식

### 2.1 평형방정식

그림 1은 PSC 단면상에 작용된 콘크리트 크리프 변형률의 기하학적 관계를 나타내며, 그림 2는 PSC 단면상의 PS 강선 릴랙세이션에 의한 변형률의 기하학적 관계를 나타낸다. 시간 종속적 각 손실원인으로 발생하는 변형률을 평균변형률  $\epsilon_o$ 과 곡률  $\Phi$ 로 구분하고, 그림 1과 2의 변형률의 기하학적 관계로부터 결정된 힘 및 모멘트 평형조건 관계식은 다음과 같다.

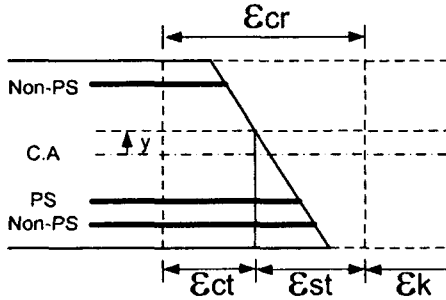


그림 1 콘크리트 크리프 변형률

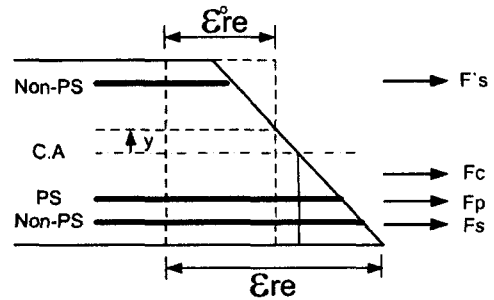


그림 2 PS강재 릴랙세이션에 의한 변형률

#### 콘크리트 크리프

$$\text{힘의 평형 ; } [E_c A + \Sigma A_{si} E_s + \Sigma A_{pi} E_p] \epsilon_{st}^o + [\Sigma A_{si} E_s y_{si} + \Sigma A_{pi} E_p y_{pi}] \Phi_{st} = E_c A (C_t(t) C_u) \epsilon_k^o \quad (1)$$

$$\text{모멘트 평형 ; } [\Sigma A_{si} E_s y_{si} + \Sigma A_{pi} E_p y_{pi}] \epsilon_{st}^o + [\Sigma A_{si} E_s y_{si}^2 + \Sigma A_{pi} E_p y_{pi}^2 + E_c I] \Phi_{st} = EI \Phi_{cr}^k \quad (2)$$

#### 콘크리트 건조수축

$$\text{힘의 평형 ; } [E_c A + \Sigma A_{si} E_s + \Sigma A_{pi} E_p] \epsilon_{sh}^o + [\Sigma A_{si} E_s y_{si} + \Sigma A_{pi} E_p y_{pi}] \Phi_{sh} = E_c A \epsilon_{sh} \quad (3)$$

$$\text{모멘트 평형 ; } [\Sigma A_{si} E_s y_{si} + \Sigma A_{pi} E_p y_{pi}] \epsilon_{sh}^o + [\Sigma A_{si} E_s y_{si}^2 + \Sigma A_{pi} E_p y_{pi}^2 + E_c I] \Phi_{sh} = 0 \quad (4)$$

#### PS 강재 릴랙세이션

$$\text{힘의 평형 ; } [E_c A + \Sigma A_{si} E_s + \Sigma A_{pi} E_p] \epsilon_{re}^o + [\Sigma A_{si} E_s y_{si} + \Sigma A_{pi} E_p y_{pi}] \Phi_{re} = -\Sigma \Delta f_{pi} A_{pi} \quad (5)$$

$$\text{모멘트 평형 ; } [\Sigma A_{si} E_s y_{si} + \Sigma A_{pi} E_p y_{pi}] \epsilon_{re}^o + [\Sigma A_{si} E_s y_{si}^2 + \Sigma A_{pi} E_p y_{pi}^2 + E_c I] \Phi_{re} = -\Sigma \Delta f_{pi} A_{pi} y_{pi} \quad (6)$$

#### 하중작용

$$\text{힘의 평형 ; } [E_c A + \Sigma A_{si} E_s + \Sigma A_x E_p] \epsilon_{ld}^o + [\Sigma A_{si} E_s y_{si} + \Sigma A_x E_p y_{pi}] \Phi_{ld} = P_i \quad (7)$$

$$\text{모멘트 평형 ; } [\Sigma A_{si} E_s y_{si} + \Sigma A_x E_p y_{pi}] \epsilon_{ld}^o + [\Sigma A_{si} E_s y_{si}^2 + \Sigma A_x E_p y_{pi}^2 + E_c I] \Phi_{ld} = P_i y_{pi} + M_{ext} \quad (8)$$

세 장기손실 및 하중작용에 의해 단면 기준축으로부터 임의 높이(y)에서 발생하는 총 변형률( $\epsilon$ )는 식 (1)부터 (8)의 힘의 평형 및 모멘트 평형 조건 관계식을 중첩함으로써 식 (9)으로부터 계산한다.

$$\begin{bmatrix} \epsilon_o \\ \Phi \end{bmatrix} = \frac{1}{A^*} \begin{bmatrix} C & -B \\ -B & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ M \end{bmatrix} \quad (9)$$

여기서,  $A = E_c A + \Sigma A_{si} E_s + \Sigma A_{pi} E_p$ ,  $B = \Sigma A_{si} E_s y_{si} + \Sigma A_{pi} E_p y_{pi}$ ,  $C = \Sigma A_{si} E_s y_{si}^2 + \Sigma A_{pi} E_p y_{pi}^2 + E_c I$

$$P = \Sigma P_i + E_c A C_t(t) C_u \epsilon_k^o + E_c A \epsilon_{sh} - \Sigma \Delta f_{pi} A_{pi}, \quad M = \Sigma P_i y_{pi} + M_{ext} + EI \Phi_{cr}^k - \Sigma \Delta f_{pi} A_{pi} y_{pi}, \quad A^* = AC - B^2$$

### 2.2 지배미분방정식

힘 및 모멘트 평형관계로부터 처짐에 관한 지배 미분방정식을 유도하기 위해 식 (9)를 곡률( $\phi$ )에 관한 관계식으로 변환하면 다음과 같다.

$$A^* \phi = AM - BP \quad (10)$$

하향으로 작용하는 등분포 하중( $q_i$ )이 작용할 때 식 (10)을 미분하면 시간종속적 처짐에 관한 지배 미분방정식이 유도되고, 경계조건을 적용하여 미분방정식을 풀 때 처짐에 관한 방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$\phi = \frac{1}{2}(A/A^*) q_i(Lx - x^2) + \left(\frac{A}{A^*} M^* - \frac{B}{A^*} P\right) \quad (11)$$

$$w = -\frac{1}{24}(A/A^*) q_i(x^4 - 2Lx^3 + L^3x) - \frac{1}{2}\left(\frac{A}{A^*} M^* - \frac{B}{A^*} P\right)(Lx - x^2) \quad (12)$$

$$\text{여기서, } M^* = E_c I \phi_{cr}^k + P_i y_{pi} - \Sigma \Delta f_{pi} A_{pi} y_{pi}$$

### 3. 변분법에 의한 지배미분방정식

#### 3.1 총 포텐셜 에너지

보의 기준축으로부터 상향의 수직 변위는  $w$ 로, 축방향 변위는  $u_o$ 로 정의할 때, 축방향 변위  $u$ 는 다음과 같다.

$$u = u_o - \frac{dw}{dx} y \quad (13)$$

$$\epsilon = \frac{du}{dx} = \frac{du_o}{dx} - \frac{d^2w}{dx^2} y \quad (14)$$

콘크리트 크리프와 건조수축, PS 강재 릴랙세이션 및 하중작용에 의해 발생하는 총 변형률에 근거하여 내적 변형에너지  $U$ 를 계산하고, 하향의 수직 등분포 하중 및 PS 강재의 릴랙세이션을 고려하여 외적 작용에너지  $W$ 를 계산하면 다음과 같다.

$$U = \frac{1}{2} \int_v \sigma \epsilon dv = \frac{1}{2} \int_v \{E (\epsilon_{cr} + \epsilon_{sh} + \epsilon_{re} + \epsilon_{kl})^2\} dv$$

$$W = (P_i - \Sigma \Delta f_{pi} A_{pi})(u_o(x=0) + u_o(x=L)) - \int_0^L q_i w dx - (P_i - \Sigma \Delta f_{pi} A_{pi}) y_{pi} (\theta_{(x=0)} + \theta_{(x=L)}) \quad (15)$$

변형률의 기하학적 관계를 식(15)에 적용하여 포텐셜 에너지  $V$ 의 functional 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$V = U - W = \int_0^L F(u_o, u_{o,x}, w, w_{,xx}) dx + \bar{F}(u_o, w_x) \quad (16)$$

$$F = \left\{ \frac{E_c A_e}{2} \left(\frac{du_o}{dx}\right)^2 + \frac{E_c I_e}{2} \left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2 - (E_s \Sigma A'_s y'_s + E_s \Sigma A_{si} y_{si} + E_p \Sigma A_{pi} y_{pi}) \left(\frac{du_o}{dx}\right) \left(\frac{d^2w}{dx^2}\right) \right. \\ \left. - C_t(t) C_u E_c A \left(\frac{du_o}{dx}\right)_k \left(\frac{du_o}{dx}\right) - C_t(t) C_u E_c I \left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)_k \left(\frac{d^2w}{dx^2}\right) - E_c A \left(\frac{du_o}{dx}\right)_{sh} \left(\frac{du_o}{dx}\right) \right. \\ \left. + q_i w + \frac{E_c I}{2} (C_t(t) C_u \left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)_k^2) + \frac{E_c A}{2} (C_t(t) C_u \left(\frac{du_o}{dx}\right)_k + \left(\frac{du_o}{dx}\right)_{sh})^2 \right\} \quad (17)$$

식(16)에 변분법을 적용하여 포텐셜 에너지를 극소화하므로써 결과되는 Euler-Lagrange 방정식과 경계조건을 유도하기 위해 functional  $F$ 는 식(17)과 같이 표현되고, 식(15)에서 외적 작용 에너지  $W$ 를  $\bar{F}$ 로 정의하면  $\bar{F} = \bar{F}(u_o, w_x)$ 의 형태가 된다.

### 3.2 축 변형률의 지배미분방정식

$\partial F/\partial u_o - (\partial/\partial x)(\partial F/\partial u_{o,x}) = 0$ 의 Euler-Lagrange 방정식으로부터 축 변형률에 관한 지배미분방정식은 다음과 같다.

$$-E_c A_e(u_{ox}) + (E_s \Sigma A' y'_s + E_s \Sigma A_{si} y_{si} + E_p \Sigma A_{pi} y_{pi}) \left( \frac{d^3 w}{dx^3} \right) = 0 \quad (18)$$

Euler-Lagrange 방정식의 경계조건은  $\left\{ \frac{\partial \bar{F}}{\partial u_o} + \frac{\partial F}{\partial u_{o,x}} \right\} \eta \Big|_0^L + \frac{\partial F}{\partial u_{ox}} \eta_{,x} \Big|_0^L = 0$ 이 되며 이 경계조건 구성하는 각 항을 대입하면  $\eta$  및  $\eta_{,x}$ 는 저차수 경계조건이 되고, 고차수 경계조건은 다음과 같다.

$$E_c A_e \epsilon^o - (E_s \Sigma A' y'_s + E_s \Sigma A_{si} y_{si} + E_p \Sigma A_{pi} y_{pi}) \frac{d^2 w}{dx^2} = \Sigma \Delta f_{pi} A_{pi} - \Sigma P_i + C_i(t) C_u E_c A \epsilon_k^o - E_c A \epsilon_{sh} \quad (19)$$

식(19)는 식(9)에서 축변형률  $\epsilon^o$ 과 일치한다. 이러한 일치되는 관계는 임의단면에서 힘의 평형관계를 정의하는 식(9)가 경계단에서도 역시 만족되어야하므로 식(9)는 변분법에 의해 유도된 식(19)의 경계조건과 일치되어야하는 물리적 특성을 갖기 때문이다.

### 3.3 처짐의 지배미분방정식

$\partial F/\partial w + \partial^2/\partial x^2(\partial F/\partial w_{,xx}) = 0$ 의 Euler-Lagrange 방정식으로부터 처짐에 관한 지배미분방정식은 다음과 같다.

$$E_c I_e \left( \frac{d^4 w}{dx^4} \right) - (E_s \Sigma A' y'_s + E_s \Sigma A_{si} y_{si} + E_p \Sigma A_{pi} y_{pi}) \left( \frac{d^3 u_o}{dx^3} \right) = -q_i \quad (20)$$

Euler-Lagrange 방정식의 경계조건은  $\left\{ -\frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial F}{\partial w_{,xx}} \right) \right\} \eta \Big|_0^L + \left( \frac{\partial \bar{F}}{\partial w_{,x}} + \frac{\partial F}{\partial w_{,xx}} \right) \eta_{,x} \Big|_0^L = 0$ 이 되며 이 경계조건을 구성하는 각 항을 대입하면  $\eta$  및  $\eta_{,x}$ 는 저차수 경계조건이 되고, 고차수 경계조건은 다음과 같다.

$$E_c I_e \frac{d^3 w}{dx^3} - (E_s \Sigma A' y'_s + E_s \Sigma A_{si} y_{si} + E_p \Sigma A_{pi} y_{pi}) \epsilon^o = (\Sigma P_i - \Sigma \Delta f_{pi} A_{pi}) y_{pi} + C_i(t) C_u E_c I_e \left( \frac{d^2 w}{dx^2} \right)_k \quad (21)$$

식(21)는 식(9)에서 곡률  $\Phi$ 와 일치한다. 이러한 일치되는 관계는 임의단면에서 힘의 평형관계를 정의하는 식(9)가 경계단에서도 역시 만족되어야하므로 식(9)는 변분법에 의해 유도된 식(21)의 경계조건과 일치되어야하는 물리적 특성을 갖기 때문이다.

식 (19)과 (21)의 고차수 경계조건 관계식을 행렬 관계식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \epsilon_o \\ w'' \end{bmatrix} = \frac{1}{A^*} \begin{bmatrix} C & B \\ B & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ M \end{bmatrix} \quad (22)$$

여기서,  $A = E_c A_e$ ,  $B = \Sigma A_{si} E y_{si} + \Sigma A'_{si} E y'_{si} + \Sigma A_{pi} E y_{pi}$ ,  $C = E_c I_e$ ,  $A^* = AC - B^2$

$$P = -\Sigma P_i + \Sigma \Delta f_{pi} A_{pi} + E_c A (C_i C_u) \epsilon_k^o - E_c A \epsilon_{sh}, \quad M = \Sigma P_i y_{pi} - \Sigma \Delta f_{pi} A_{pi} y_{pi} + M_{ext} + E_c I_e \Phi_{cr}^k$$

하향 등분포 하중  $q_i$ 이 작용할 때 유도된 저차수 및 고차수 경계조건을 식(20)의 처짐에 관한 지배미분방정식에 적용하여 풀면 다음과 같다.

$$w = \frac{1}{24} (A/A^*) q_i (x^4 - 2Lx^3 + L^3x) - \frac{1}{2} \left( \frac{A}{A^*} M^* + \frac{B}{A^*} P \right) (Lx - x^2) \quad (23)$$

여기서,  $M = (E_c I_e \Phi_{cr}^k + \Sigma P_i y_{pi} - \Sigma \Delta f_{pi} A_{pi} y_{pi})$ ,  $P = E_c A C_i C_u \epsilon_k^o - E_c A \epsilon_{sh} - \Sigma P_i + \Sigma \Delta f_{pi} A_{pi}$

#### 4. Rayleigh-Ritz 방법

식(17)의 functional에서 측변위와 처짐을 각각 다항식과 삼각함수로 가정하면 다음과 같다.

$$u_o(x) = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

$$w(x) = b_1(Lx - x^2) + b_2\sin\left(\frac{\pi}{l}x\right) + b_3\sin\left(\frac{3\pi}{l}x\right) + b_4\sin\left(\frac{5\pi}{l}x\right) \quad (24)$$

식(24)의 처짐에 관한 형상함수에서  $b_1(Lx - x^2)$ 은 양단 편심모멘트에 대한 곡률을 고려하기 위한 결과이다. 식(24)를 식(17)에 대입하여 미지의 계수  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, b_4$ 에 관하여 식(16)을 극소화하므로써 계수를 계산한다.

#### 5. 수치해석

지배미분방정식에 의한 해석적 방법과 Rayleigh-Ritz 법을 이용하여 그림 3의 실험체에 대한 장기 처짐해석을 수행하였다. 실험체의 재료물성치는 표 1과 같다. 실험체는 재하시의 재령, 프리스트레스트력 및 재하하중의 유무와 기본적인 크리프조건에 관한 모사에 따라 SB03B, SB13B, SB13C, SB17B, SB13F, SB17F로 분류되는 7개의 실험체(Chiu 등,1996) 중 가장 기본적 실험체인 SB03B에 대한 수치해석을 수행하였으며, 해석 대상 실험체의 매개변수는 표 2와 같다.

표 1 실험체의 재료물성치

표 2 실험체의 매개변수(SB03B)

콘크리트			PS 강재			Initial prestress (kgf)	Age (day)	Loading (kgf)	Factors	
$w$ ( $tf/m^3$ )	$f_{ck}$ ( $kgf/cm^2$ )	$E_c$ ( $kgf/cm^2$ )	$A_{ps}$ ( $mm^2$ )	$f_{py}$ ( $kgf/cm^2$ )	$E_p$ ( $kgf/cm^2$ )				Creep	Shrinkage
2.5	466	240,000	100.27	17,688	2,000,000	-	3	-	Yes	Yes

그림 4는 해석적 방법과 Rayleigh-Ritz 법의 시간종속적 해석과 실험에 의한 처짐-시간 관계를 나타내고 있다. 해석적 방법과 Rayleigh-Ritz법의 결과는 거의 일치하는 것을 알 수 있다. 또한 실험에 의한 결과와 잘 일치한다.

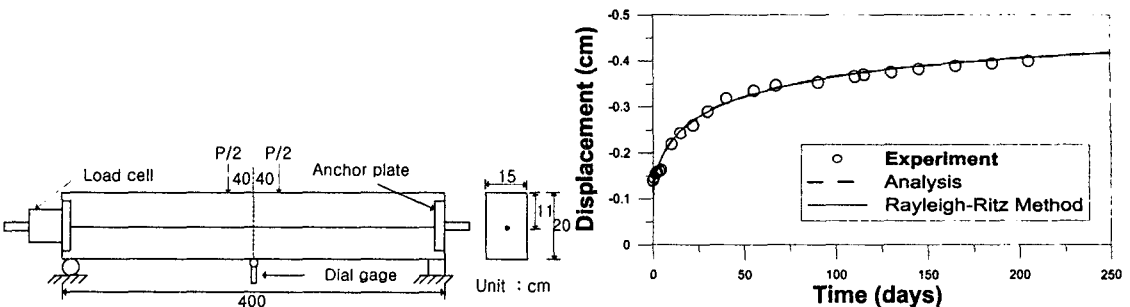


그림 3 휨 실험체

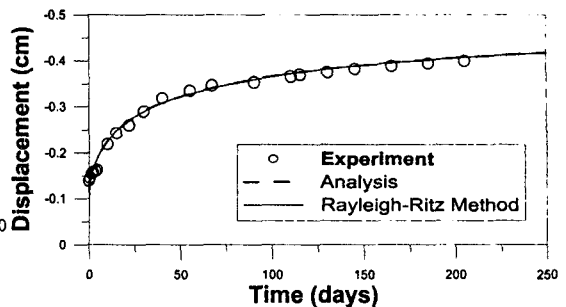


그림 4 시간에 따른 중앙부에서의 처짐

그림 5와 같은 단면형상을 갖는 길이가 12.2 m 인 PSC 부재에 초기긴장력76,600 kgf과 자중이 하중으로 작용하는 경우에 대한 해석을 수행하였다. 표 3은 해석 구조물의 재료물성치를 나타낸다. 그림 6은 해석적 방법과 Rayleigh-Ritz 법에 의해 예측된 0일, 1일, 30일, 180일, 360일에 대한 결과를 비교한다. 그림에서 Rayleigh-Ritz 법은 식(24)의 형상함수를 1,2,3항으로 취하는 각 경우에 대한 해석결과를 보여준다.

표 3 재료물성치

콘 크 리 트					PS 강 재		
$w (tf/m^3)$	$f_{ck} (kgf/cm^2)$	$E_c (kgf/cm^2)$	$C_u$	$\epsilon_{ehu}$	$A_{ps} (cm^2)$	$f_{py} (kgf/cm^2)$	$E_p (kgf/cm^2)$
2.5	350	280000	2.35	0.0008	6.23	17688	2000000

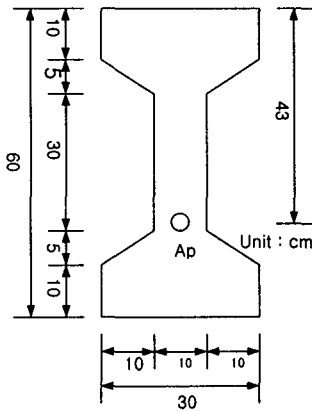


그림 5 단면형상

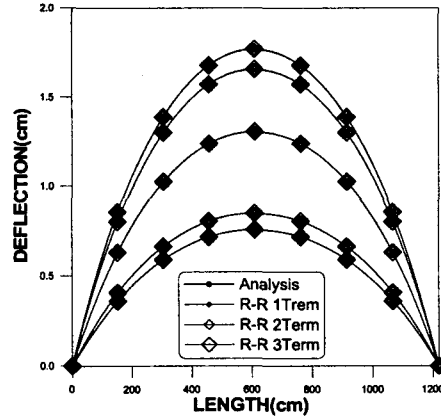


그림 6 시간적 변화에 따른 처짐

## 6. 결론

본 연구에서는 직선배치된 PSC 휨 부재의 시간중속적 지배미분방정식을 힘 및 모멘트평형방정식과 총 포텐셜 에너지에 대한 변분법으로 유도하여 해석적 방법과 Rayleigh-Ritz 법으로 수행한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

- 1) 힘의 평형 및 모멘트 평형조건을 적용하여 유도되는 일정변형률과 곡률에 관한 관계식으로부터 지배미분방정식을 유도하였다.
- 2) 힘 및 모멘트 평형조건관계식으로부터 도출된 평형방정식은 총 포텐셜 에너지에 대한 변분법 적용으로 구한 고차수 경계조건과 동일하였다.
- 3) 해석적 방법과 Rayleigh - Ritz 법의 적용성 검토를 위해 PS 긴장재가 직선배치된 PSC 휨 부재의 시간중속적 해석을 수행하였으며, 실험에 의한 결과와 잘 일치하는 것을 볼 수 있다.

## 참고문헌

1. 이준자 “ 프리스트레스 콘크리트 구조물의 장기거동 및 신뢰도 해석,” 건국대학교 토목공학과 박사 논문 2001.
2. Ghali, A, “A Unified Approach for Serviceability Design of Prestressed and Nonprestressed Reinforced Concrete Structures,” PCI Journal, Vol 31, No. 2, 1986, pp 118-137.
3. Bazant, Z. P, “Prediction of Concrete Creep Effects Using Age-Adjusted Effective Modulus Method,” ACI Journal, Vol. 69, No. 4, 1972, pp. 212-217.
4. Chiu, H. S., Chern, J. C., and Chang, K. C., “Long-Term Deflection Control in Cantilever Prestressed Concrete Bridges. II: Experimental Verification,” Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol. 122, No. 6, 1996, pp. 495-501.