한국섬유공학회 춘계학술발표회 논문집, 제 35 권 제 1 호

점탄성보에서의 상응원리

정경환, 정관수
서울대학교, 재료공학부

Correspondence Theorem in Viscoelastic Beams

Kyung Hwan Jung and Kwansoo Chung
School of Materials Science and Engineering, College of Engineering, Seoul National University, 56-1, Shinlim-dong, Kwanak-ku, Seoul 151-742, South Korea

1. 서론

점탄성학은 고분자물과 같이 기계적 성질이 시간에 따라 변하는 물질의 응력과 변형해석에 관한 학문이다. 이에 대한 이전의 문헌들은 균일변형시의 조성식에 대한 주제를 주로 다룬 반면, 경계조건 문제(boundary value problem)로서의 불균일 변형해석에 대한 논의가 부족한 편이다. 본 논문에서는 불균일 변형해석에 유용한 상응원리(correspondence theorem)[1]을 보이론(beam theory)에 적용하는 경우, 적용가능조건을 유도하는 한편 상응원리를 적용 예를 들어 설명하였다. 상응원리는 알려진 탄성해를 이용하여 점탄성해를 구해내는 이론으로서 크리프(creep)와 완화(relaxation)를 나누어서 고려하였고, 적용가능조건이 충족되지 않은 경우를 위한 일반상응이론(general correspondence theorem)도 유도하였다.

2. 크리프

2.1. 일정한 P_0가 주어지는 경우

Figure 1.(a)와 같이 외력이 일정한 P_0로 주어지는 경우 보 단면에 작용하는 응력들은 물성과 무관하다. 그러므로 점탄성체의 보 단면에서의 응력분포는 탄성체의 경우와 동일하다. 즉,

$$(M, \sigma)^{ve} = (M, \sigma)^{e} \tag{2.1.1}$$

여기서, M, σ는 각각 보 단면에서의 모멘트, 응력을 나타내며, ve와 e는 각각 점탄성체와 탄성체를 의미한다. 한편 크리프의 경우 구성방정식은 다음과 같이 주어진다.

$$\varepsilon^{ve} = J(t)\,\sigma^{ve} = J(t)\,\sigma^{e} \tag{2.1.2}$$

여기서 ε 와 $J(t)$는 각기 변형률과 크리프 compliance이다. 식 (2.1.2)와 탄성해[2]를 이용하면 처짐 w에 대한 다음 식이 얻어진다.

$$\frac{d^2 w^{ve}}{dx^2} = -\frac{1}{R^{ve}} = -J(t)\frac{E}{R^e} = J(t)E\frac{d^2 w^e}{dx^2} \tag{2.1.3}$$

여기서 R과 E는 곡률 반경과 탄성계수(elastic modulus)이다. 따라서, 점탄성해는 다음과 같으며, 이는 아래에 더 설명되듯이 쉽게 탄성해에서 $\frac{1}{E}$가 $J(t)$로 대체된 형태의 식이 된다.

$$w^{ve} = J(t)Ew^e \tag{2.1.4}$$

2.2. $P(t)$가 주어지는 경우

시간에 대한 일반함수를 $T(t)$라 하면, 외력과 응력은 다음과 같은 형태로 주어진다.

$$P(t) = P_0 T(t) \tag{2.2.1}$$

$$\sigma(t) = \sigma_0 T(t) \tag{2.2.2}$$

Hereditary식에 의해 ε^{ve}는 다음과 같이 계산할 수 있다.

$$\varepsilon^{ve} = J(t)\sigma_0 + \sigma_0 \int_{0^+}^{t} J(t-t')\frac{dT(t')}{dt'}dt' \equiv \sigma_0 T_J(t) \tag{2.2.3}$$

$$\frac{d^2 w^{ve}}{dx^2} = -\frac{1}{R^{ve}} = -\frac{T_J(t)E}{R^e} = T_J(t)E\frac{d^2 w^e}{dx^2} \tag{2.2.4}$$

여기서 식 (2.2.4)을 통해 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$w^{ve} = T_J(t)Ew^e \tag{2.2.5}$$

2.3. 적용 조건

위의 예는 상응원리가 statically determinate 문제에 적용된 경우이지만, 상응원리는 statically indeterminate 문제에도 적용 가능하며 적용가능성은 탄성해 w^e의 형태로부터 판단할 수 있다. 즉, 상응원리를 적용하기 위하여서는 크리프의 경우 식 (2.1.1)을 만족시켜야 하며 아울러 탄성해는 다음의 관계를 만족시킨다.

$$M = -EI\frac{d^2 w}{dx^2} \tag{2.3.1}$$

따라서, 상응원리 적용가능을 위해서는 탄성해가 다음과 같은 형태를 이루어야 한다.

$$w^e = \frac{1}{E}f(x, \mathbf{w}^*, \mathbf{P}_0) \tag{2.3.2}$$

여기서 일반적인 경우를 고려하여 경계조건 $\mathbf{w}^*$와 외력 $\mathbf{P}_0$는 벡터화된 값으로 표현된다.

3. 완화

3.1. 일정한 w_0가 주어지는 경우

Figure 1.(b)는 *Figure* 1.(a)와 짝을 이루는 (conjugate) 완화문제(relaxation problem)로서 일정한 처짐 w_0가 주어지는 경우, w^e는 w_0에 관한 함수로 표현하는 경우 물성에 무관한 형태의 식으로 기술이 된다. 즉,

$$(w, \varepsilon, R)^{ve} = (w, \varepsilon, R)^{e} \tag{3.1.1}$$

한편, 완화문제의 경우 구성방정식은 다음과 같으므로,

$$\sigma^{ve} = Y(t)\,\varepsilon = \frac{Y(t)z}{R} = \frac{Y(t)}{E}\sigma^{e} \tag{3.1.2}$$

모멘트와 외력 P^{ve}의 점탄성해는 다음과 같이 구해질 수 있다.

$$M^{ve} = \int \sigma^{ve} z dA = \frac{Y(t)I}{R} = \frac{Y(t)}{E} M^{e} \tag{3.1.3}$$

$$P^{ve} = -\frac{d^2 M^{ve}}{dx^2} = -\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{Y(t)I}{R}\right) = \frac{Y(t)}{E} P^{e} \tag{3.1.4}$$

여기서 $Y(t)$와 I는 각각 완화계수(relaxation modulus)와 2차 관성모멘트(second moment of area)이다. 한편, 식(3.1.4)에서 구해지는 점탄성해는 아래에서 더 설명되듯이 탄성해의 E가 $Y(t)$로 대체된 형태의 식이다.

3.2. $w(t)$가 주어지는 경우

크리프의 경우와 마찬가지로 시간에 대한 일반적인 함수를 $T(t)$라고 하면, 처짐과 변형률은 다음과 같이 주어진다.

$$w = w(x, w_0 T(t)) = T(t) w(x, w_0) \tag{3.2.1}$$

$$\varepsilon = -z\frac{d^2 w}{dx^2} = T(t)\left(-z\frac{d^2 w(x, w_0)}{dx^2}\right) \equiv T(t)\varepsilon_0 \tag{3.2.2}$$

식 (2.2.3)과 마찬가지로 hereditary식에 의해 σ^{ve}를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\sigma^{ve} = Y(t)\,\varepsilon_0 + \varepsilon_0 \int_{0^+}^{t} Y(t-t')\frac{dT(t')}{dt'}dt' \equiv \varepsilon_0 T_Y(t) \tag{3.2.3}$$

$$P^{ve} = -\frac{d^2 M^{ve}}{dx^2} = -\frac{T_Y(t)}{E}\frac{d^2 M^{e}}{dx^2} = \frac{T_Y(t)}{E} P^{e} \tag{3.2.4}$$

3.3. 적용 조건

완화의 경우에도 크리프의 경우와 마찬가지로 statically indeterminate 문제에서도 적용가능하며, 적용가능성은 탄성해 P^e의 형태로부터 판단할 수 있다. 즉, 완화의 경우 상응원리를 적용하기 위해서는 처짐 w가 w_0의 함수로 표현하는 경우 식 (3.1.1)을 만족하므로, 모멘트는 식 (2.3.1)에 의해 다음과 같은 형태의 식이 된다.

$$M^e = Eg(x, \mathbf{w}^*, \mathbf{w}_0) \tag{3.3.1}$$

따라서, 상응원리가 적용가능하기 위해서는 탄성해 P^e가 다음과 같은 형태의 식이 되어야 한다.

$$P^e = Eh(x, \mathbf{w}^*, \mathbf{w}_0) \tag{3.3.2}$$

완화의 경우에도 크리프의 경우와 마찬가지로 경계조건 $\mathbf{w}^*$와 처짐 $\mathbf{w}_0$는 일반적인 경우를 고려하여 벡터형태로 기술하였다.

4. 일반적인 상응원리

보의 탄성해가 위에서 유도된 상응원리 적용조건을 만족시키지 못하는 경우에는 보다 일반적인 방법으로 점탄성해를 구해야 한다. 점탄성문제의 일반적인 구성방정식은 다음과 같다.

$$p_0\sigma + p_1\dot{\sigma} + \cdots + p_m\sigma^{(m)} = q_0\varepsilon + q_1\dot{\varepsilon} + \cdots + q_n\varepsilon^{(n)} \tag{4.1}$$

$$O_P(\sigma) = O_Q(\varepsilon) \tag{4.2}$$

Operator O_P, O_Q를 사용하면 다음과 같은 식을 얻어낼 수 있다.

$$O_P(M^{ve}) = \int O_P(\sigma^{ve})zdA = O_Q(\frac{1}{R^{ve}})I = O_Q(-\frac{d^2w^{ve}}{dx^2})I \tag{4.3}$$

$$O_P(P^{ve}) = O_Q(\frac{d^4w^{ve}}{dx^4})I \tag{4.4}$$

여기서 $P^{ve} = P(x,t)$이고 $w^{ve} = w(x,t)$이므로, 식 (4.4)은 x와 t에 대한 편미분방정식이 되고, 이 식을 풀기 위해 t에 대한 라플라스 변환을 하면 다음과 같다.

$$(p_0 + p_1s + \cdots + p_ms^m)\overline{P}(x,s) = (q_0 + q_1s + \cdots + q_ns^n)\frac{d^4\overline{w}(x,s)}{dx^4}I \tag{4.5}$$

이 때, $\overline{P}$와 $\overline{w}$는 라플라스 변환한 양이다. 따라서, 식(4.5)는 다음과 같이 전개할 수 있다.

$$\overline{P}(x,s) = \frac{\mathrm{Q(s)}}{\mathrm{P(s)}}\frac{d^4\overline{w}(x,s)}{dx^4}I \tag{4.6}$$

여기서 식 (4.6)을 탄성체에 대한 상미분방정식에서 E가 $\frac{\mathrm{Q(s)}}{\mathrm{P(s)}}$로 대체된 형태의 식이다. 따라서, 탄성해에서 E를 $\frac{\mathrm{Q(s)}}{\mathrm{P(s)}}$로 바꾼 후, 라플라스 역변환을 하여 점탄성해를 구해낼 수 있다.

5. 결론

위에서 알아본 바와 같이 크리프의 경우에는 탄성해가 $w^e = \frac{1}{E}f(x, \mathbf{w}^*, \mathbf{P}_0)$ 형

태의 식이라면, $\frac{1}{E}$를 $J(t)$ 혹은 $T_J(t)$로 대체함으로써 점탄성해를 구할 수 있고, 완화의 경우에는 탄성해가 $P^e = Eh(x, \mathbf{w}^*, \mathbf{w}_0)$의 형태의 식이라면, E를 $Y(t)$ 혹은 $T_Y(t)$로 대체함으로써 점탄성해를 구할 수 있다. 만약 탄성해가 위의 형태를 만족하지 않는 식이라면, 탄성해의 E를 $\frac{Q(s)}{P(s)}$로 대체하는 일반적인 상응원리를 이용하여 점탄성해를 구해낼 수 있다.

감사의 글

본 연구는 과학기술부의 국가 지정 연구실 사업을 통하여 지원되었으며 이에 감사드립니다.

6. 참고문헌

1) Wilhelm Flugge, "Viscoelasticity", Springer-Verlag, Heidelberg, Berlin, 1975
2) Irving H. Shames, "Introduction to Solid Mechanics", Prentice Hall, 1989

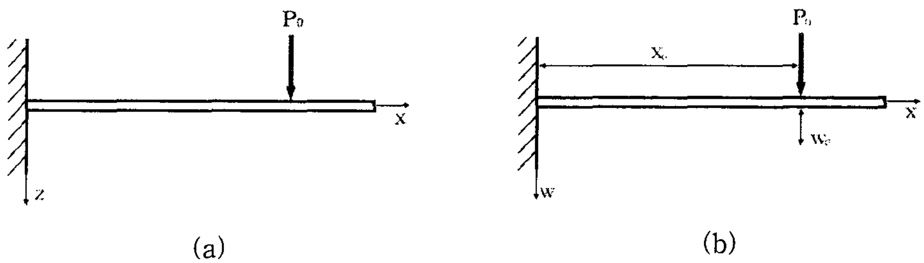

Figure 1. A beam under a point load for (a) creep and (b) relaxation