

# 기지균열의 밀도증가를 예측하기 위한 이론적 모형

이종원\* · 김진원\* · 김응태\* · 안석민\*

## A Theoretical Model for Predicting Matrix Crack Density Growth

Jong-Won Lee\*, Jin-Won Kim\*, Eung Tai Kim\*, Seokmin Ahn\*

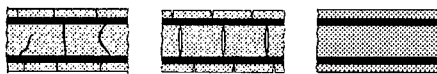
**Key Words:** matrix crack, energy release rate, stiffness, composite, laminate

### Abstract

The present study proposes a theoretical model for predicting the matrix crack density growth of each layer in composite laminates subjected to thermo-mechanical loads. Each layer with matrix cracks is treated as an equivalent continuum of degraded elastic stiffnesses which are functions of the matrix crack density in each slyer. The energy release rate as a function of the degraded elastic stiffnesses is then calculated for each layer as functions of thermo-mechanical loads externally applied to the laminate. The matrix crack densities of each layer in general laminates are predicted as functions of the thermo-mechanical loads applied to a number of laminates. Comparisons of the present study with experimental data in the open literatures are also provided.

### 1. Introduction

적층재 시편 측면의 자유표면에서 관찰할 수 있는 기지균열의 실제 형상과 크기, 균열 사이의 간격은 Fig. 1 (a)에서 보는 바와 같이 불규칙하다. 기지균열을 잘 정의된 경계치 문제로 다루기 위해서는 Fig. 1 (b)와 같이 기지균열의 형상, 크기 및 간격 등이 이상화되어야 한다. 이렇게 이상화 된 기지균열의 경계치 문제를 풀어서 외부 하중과 기지균열 밀도 및 강성저하의 상관관계를 밝혀내면, 기지균열이 있는 각각의 층을 Fig. 1 (c)와 같이 저하된 탄성계수를 갖는 등가 연속체로 다룰 수 있다.



(a) real cracks, (b) idealized cracks  
(c) equivalent continuum

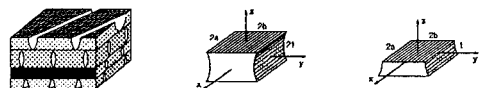
**Fig. 1 Matrix cracks**

Fig. 1 (b)의 경계치 문제를 푸는 경우에는 그 해로부터 각각의 층에서 기지균열에 의한 탄성계수의 저하를 예측할 수 있어야 하며, 기지균열의

밀도와 외부하중 간의 함수관계를 구할 수 있어야 한다. 본 연구에서는 thermo-mechanical 하중을 받는 임의의 적층판 내에서, 각각의 층마다 하중이 증가함에 따라 발생/증가하는 기지균열의 밀도를 예측하는 이론적 모형을 제시하였다.

### 2. Theoretical Model

Hashin[1], Naim[2] 및 Highsmith 등[3]의 방법을 적용하고자 할 경우, 적층순서가 달라지면 그 때마다 새로운 경계치 문제를 풀어야 한다는 단점이 있다. 더욱이, 아주 간단한 적층순서가 아닌 경우이거나 아주 단순한 하중이 아닌 경우에는 이론적 해석이 상당히 복잡해진다. 본 연구에서는 Fig 2 (a)에서와 같이 복잡한 적층순서와 복잡한 외부하중 하에서도 비교적 간단하게 각각의 층마다 기지균열의 밀도증가를 외부에서 가한 하중의 함수로 표현할 수 있는 이론적인 모형을 제시하고자 한다. Fig 2 (a)에서 각각의 층마다 독립적으로 추출한 REV는 그 위치에 따라 Fig 2 (b) 또는 Fig 2(c)가 된다.



(a) laminate (b) inner layers (c) outermost layers  
**Fig. 2 A laminate with matrix cracks**

Fig 2 (b)와 (c)로 나타낸 representing volume

\* 한국항공우주연구원

element(이하 REV)가 외부로부터 하중을 받고 있을 때, 만약 기지균열이 존재하지 않는다면 RVE 내의 응력과 변형률의 관계는 다음과 같다.

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (1)$$

여기서,  $C_{ijkl}$ 은 손상 전의 탄성계수이다.

### 2.1 Matrix Crack Opening and Sliding

외부에서 하중을 가하면 Fig. 2 (b)에서 REV의 좌우면인 기지균열면이 하중이 증가함에 따라 벌어지거나 미끄러지게 되는데, 이 때 발생한 공간을 REV의 부피로 나누면 다음과 같은 무차원의 물리량[4]을 얻는다.

$$I_{ij} = \frac{1}{V} \int_{S_c} u_i^c n_j^c ds \quad (2)$$

여기서,

$V$  = volume of the REV,

$S_c$  = surface area of the matrix crack,

$u_i^c$  = opening or sliding displacement,

$n_j^c$  = unit normal to the matrix crack surface,

$i, j = x, y, \text{ and } z.$

### 2.2 Equivalent Elastic Stiffnesses

Fig 2 (c)에서 나타낸 바와 같이 적층판 최상 하단의 자유면과 한 개의 층간면 및 인접한 두 개의 기지균열면으로 둘러싸인 REV에서도 식(1)과 식(2)는 그대로 적용된다. 기지균열 표면의 미끄럼 마찰계수를 0으로 가정하면, Fig. 2 (b) 또는 Fig. 2 (c)로 나타낸 RVE 내의 평균응력은,

$$\bar{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} (\tilde{\epsilon}_{kl} + e_{kl}) \quad (3)$$

여기서,

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (I_{ij} + I_{ji}) \quad (4)$$

동일한 RVE를 등가 연속체로 가정하면 식(3)은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\bar{\sigma}_{ij} = (C_{ijkl} - \xi_{ijkl}) \tilde{\epsilon}_{kl} \quad (5)$$

식(3)과 식(5)로 주어진 평균응력  $\bar{\sigma}_{ij}$  은 반드시 같아야 하므로, 각각을 같보기 변형률  $\tilde{\epsilon}_{ij}$  로 편미분한 값도 같아야 한다. 따라서,

$$\xi_{ijkl} = -C_{ijkl} \frac{\partial e_{pq}}{\partial \tilde{\epsilon}_{kl}} \quad (6)$$

식(5)로부터  $\xi_{xyxy} = \xi_{yxyx}$ ,  $\xi_{yxyz} = \xi_{zxyx}$ ,  $\xi_{zxxx} = \xi_{xxxx}$  이고, 식(4)로부터  $e_{xy}$ ,  $e_{yy}$ ,  $e_{yz}$  외에는 그 값이 0이므로 식(7)로부터 다음의 관계식을 얻는다.

$$\frac{\partial e_{yy}}{\partial \tilde{\epsilon}_{xx}} = \frac{C_{xxxx}}{C_{yyyy}} \frac{\partial e_{yy}}{\partial \tilde{\epsilon}_{yy}}, \quad \frac{\partial e_{yy}}{\partial \tilde{\epsilon}_{zz}} = \frac{C_{yyzz}}{C_{yyyy}} \frac{\partial e_{yy}}{\partial \tilde{\epsilon}_{yy}} \quad (7)$$

식(7)의 편미분들을 다음과 같이 정의하자.

$$\begin{aligned} \eta &= -\frac{\partial e_{yy}}{\partial \tilde{\epsilon}_{yy}} = -\frac{\partial I_{yy}}{\partial \tilde{\epsilon}_{yy}} \\ \phi &= -\frac{\partial e_{xy}}{\partial \tilde{\epsilon}_{xy}} = -\frac{\partial (I_{xy} + I_{yx})}{\partial \tilde{\gamma}_{xy}} \\ \mu &= -\frac{\partial e_{yz}}{\partial \tilde{\epsilon}_{yz}} = -\frac{\partial (I_{yz} + I_{zy})}{\partial \tilde{\gamma}_{yz}} \end{aligned} \quad (8)$$

식(8)에서  $\eta$  와  $\phi$  및  $\mu$ 는 경계치 문제를 풀어

서 결정해야 하며 기지균열 밀도  $\rho = t/b$  의 함수들이다. 평균응력과 평균변형률 사이의 관계식에 식(7)을 식(8)과 함께 식(5)에 적용하면, Fig. 1 (c)에 나타낸 등가 연속체의 등가 탄성계수가 반드시 식(9)의 형태여야 함을 알 수 있다.

$$\begin{pmatrix} \bar{\sigma}_x \\ \bar{\sigma}_y \\ \bar{\sigma}_z \\ \bar{\tau}_{xy} \\ \bar{\tau}_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{xx} - \frac{\rho C_{xx}^2}{C_{yy}} & C_{xy} - \rho C_{xy} & C_{xz} - \frac{\rho C_{xz}^2}{C_{yy}} & 0 & 0 & 0 \\ C_{xy} - \frac{\rho C_{xy}^2}{C_{yy}} & C_{yy} - \rho C_{yy} & C_{yz} - \frac{\rho C_{yz}^2}{C_{yy}} & 0 & 0 & 0 \\ C_{xz} - \frac{\rho C_{xz}^2}{C_{yy}} & C_{yz} - \rho C_{yz} & C_{zz} - \frac{\rho C_{zz}^2}{C_{yy}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{xy}(1-\mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{yz}(1-\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G_{zz}(1-\mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\epsilon}_x \\ \tilde{\epsilon}_y \\ \tilde{\epsilon}_z \\ \tilde{\gamma}_{xy} \\ \tilde{\gamma}_{yz} \end{pmatrix} \quad (9)$$

고전적층이론에서의 같이 plane stress 조건을 가정하고, Fig. 2의  $yz$ 면에 대하여 각각의 층이 transversely isotropic이면 식 (9)는 각각의 층에 대해서 다음과 같이 단순화된다.

$$\begin{pmatrix} \bar{\sigma}_L \\ \bar{\tau}_T \\ \bar{\tau}_{LT} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_L(1-\nu_T\nu_{LT}) & Q_{LT}(1-\xi) & 0 \\ Q_{LT}(1-\xi) & Q_T(1-\xi) & 0 \\ 0 & 0 & G_{LT}(1-\phi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\epsilon}_L \\ \tilde{\epsilon}_T \\ \tilde{\gamma}_{LT} \end{pmatrix} \quad (10)$$

$$\text{여기서, } \xi = \frac{\eta(1+\nu_T)(1-\nu_T-2\nu_T\nu_{LT})}{(1-\nu_T\nu_{LT})^2 - \eta(\nu_T + \nu_T\nu_{LT})^2} \quad (11)$$

식(10)를 고전적층이론에 대입하면 각 층마다 각각의 기지균열 밀도를 갖는 임의의 적층체에 대해  $A_{ij}$ ,  $B_{ij}$ ,  $D_{ij}$ 를 구할 수 있다. 단, 식 (10)에서  $\bar{\sigma}_T$ 가 인장이 아니라 압축인 경우에는 기지균열이 완전히 닫혀 압축방향으로 원래의 탄성계수를 회복하게 된다. 본 연구에서는 기지균열 표면의 미끄럼 마찰계수를 0으로 가정하였으므로  $\phi$ 는 하중의 방향에 따른 영향을 받지 않는다.

### 2.3 Upper Bounds of Degraded Stiffnesses

식(9)에 등장한  $\eta$  와  $\phi$  및  $\mu$ 는 별도의 경계치 문제를 풀어서 결정하거나, 실험결과를 curve fitting 하여 결정해야 한다. 본 연구에서는 Fig. 3과 같이 적층순서에 무관한 가상의 경계조건을 갖는 REV의 경계치 문제를 풀어서 식(9)에 등장한  $\eta$  와  $\phi$  및  $\mu$ 를 결정하고자 한다. 적층순서에 무관한 가상의 경계조건을 설정하는 방법에는 여러 가지가 있을 수 있겠으나, 저하된 강성계수의 upper bounds를 얻기 위하여 모든 층간 경계면과 모든 최외곽 경계면은 항상 평행으로 유지된다고 가정하였다. 이렇게 얻은 근사해는 별도의 수정없이 Fig. 2(b)와 Fig. 2(c)의 RVE들에 그대로 적용할 수 있다.

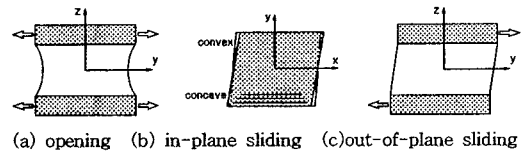


Fig. 3 Matrix crack surface deformation

#### 2.3.1 Opening Mode

$C_{xy} = C_{yx} = C_{LT}$ ,  $C_{yy} = C_{xx} = C_T$ ,  $G_{xz} = G_{yz} = G_{LT}$ ,  $C_T - C_{xx} = 2G_T$  일 때, Fig. 3(a)에서의 변위를 식(12)와 같이 가

정하자.

$$u_x = \tilde{\varepsilon}_x x, u_y = \tilde{\varepsilon}_y y + \sum_{n=1}^{\infty} F_n(y) \cos \beta_n z \quad (12)$$

$$u_z = \tilde{\varepsilon}_z z, \beta_n = \frac{(2n-1)\pi}{2t}$$

식(12)로부터 얻은 변형률과 변분법으로부터 다음과 같은 미분방정식과 부가조건을 얻는다.

$$C_T \frac{d^2 F_n}{dy^2} - G_T \beta_n^2 F_n = 0 \quad (13)$$

$$(C_{LT} \tilde{\varepsilon}_x + C_T \tilde{\varepsilon}_y + C_{yz} \tilde{\varepsilon}_z) \frac{2(-1)^{n+1}}{\beta_n} + C_T t \frac{dF_n}{dy} \Big|_{y=\pm b} = 0$$

$u_x$ 는  $xz$  평면에 대하여 반대칭이라는 조건과 더불어 식(13)을 풀면,

$$F_n(y) = A_n \sinh \sqrt{\frac{G_T}{C_T}} \beta_n y \quad (14)$$

$$A_n = \frac{2(-1)^n (C_{LT} \tilde{\varepsilon}_x + C_T \tilde{\varepsilon}_y + C_{yz} \tilde{\varepsilon}_z)}{C_T \sqrt{\frac{G_T}{C_T}} \beta_n^2 t \cosh \sqrt{\frac{G_T}{C_T}} \beta_n b}$$

식(12)를 식(14)와 더불어 식(8)에 대입하면,

$$\eta = \frac{16}{\pi^3} \sqrt{\frac{C_T}{G_T}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho \tanh \sqrt{\frac{G_T}{C_T}} \frac{(2n-1)\pi}{2\rho}}{(2n-1)^3} \quad (15)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \eta = 0, \lim_{\rho \rightarrow \infty} \eta = 1$$

여기서,  $\rho = t/b$  이다.

### 2.3.2 In-Plane Sliding Mode

Fig. 3(b)에서 변위를 다음과 같이 가정하자.

$$u_x = \tilde{\gamma}_{xy} y + \sum_{n=1}^{\infty} G_n(y) \cos \beta_n z, u_y = u_z = 0 \quad (16)$$

식(16)으로부터 0이 아닌 변형률을 구하고 변분법을 적용하면 다음의 미분방정식과 부가조건을 얻는다.

$$\frac{d^2 G_n}{dy^2} - \beta_n^2 G_n = 0 \quad (17)$$

$$\tilde{\gamma}_{xy} \frac{2(-1)^{n+1}}{\beta_n} + t \frac{dG_n}{dy} \Big|_{y=\pm b} = 0$$

$u_x$ 는  $xz$  평면에 대하여 반대칭이라는 조건과 더불어 식(17)을 풀면,

$$G_n(y) = B_n \sinh \beta_n y, B_n = \frac{2(-1)^n \tilde{\gamma}_{xy}}{\beta_n^2 t \cosh \beta_n b} \quad (18)$$

식(16)을 식(18)과 더불어 식(8)에 대입하면,

$$\phi = \frac{16}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho \tanh \frac{(2n-1)\pi}{2\rho}}{(2n-1)^3}, \lim_{\rho \rightarrow 0} \phi = 0, \lim_{\rho \rightarrow \infty} \phi = 1 \quad (19)$$

### 2.3.3. Out-of-Plane Sliding Mode

Fig. 3(c)에서 변위를 식(20)과 같이 가정하자.

$$u_x = 0, u_y = \tilde{\gamma}_{yz} z, u_z = \sum_{n=1}^{\infty} H_n(y) \cos \beta_n z \quad (21)$$

식(21)으로부터 0이 아닌 변형률을 구하고 변분법을 적용하면 다음의 미분방정식과 부가조건을 얻는다.

$$C_T \frac{d^2 H_n}{dy^2} - C_T \beta_n^2 H_n = 0 \quad (22)$$

$$\tilde{\gamma}_{yz} \frac{2(-1)^{n+1}}{\beta_n} + t \frac{dH_n}{dy} \Big|_{y=\pm b} = 0$$

$u_z$ 는  $xy$  평면에 대하여 반대칭이라는 조건과 더불어 식(22)를 풀면,

$$H_n(y) = C_n \sinh \sqrt{\frac{C_T}{G_T}} \beta_n y \quad (23)$$

$$C_n = \sqrt{\frac{G_T}{C_T}} \times \frac{2(-1)^n \tilde{\gamma}_{yz}}{\beta_n^2 t \cosh \sqrt{C_T} \beta_n b}$$

식(21)을 식(23)과 더불어 식(8)에 대입하면,

$$\mu = \frac{16}{\pi^3} \sqrt{\frac{G_T}{C_T}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho \tanh \sqrt{\frac{C_T}{G_T}} \frac{(2n-1)\pi}{2\rho}}{(2n-1)^3} \quad (24)$$

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \mu = 0, \lim_{\rho \rightarrow \infty} \mu = 1$$

### 2.3.4. Hygrothermal Effects

온도나 습도에 따른 영향을 고려하고자 한다면, RVE 내에서의 온도나 습도의 변화가 공간적으로 일정하다는 가정 하에 식(25)을 적용해야 한다.

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_L &\Rightarrow \tilde{\varepsilon}_L - \alpha_L \Delta T - \beta_L \Delta m \\ \tilde{\varepsilon}_T &\Rightarrow \tilde{\varepsilon}_T - \alpha_T \Delta T - \beta_T \Delta m \end{aligned} \quad (25)$$

### 2.4. Criteria for Matrix Cracking

#### 2.4.1. Without Pre-Existing Microcracks

하나의 균열이 탄성 재료안에 존재할 때, 그 탄성 재료에서 방출되는 에너지는 참고문헌[5]로부터,

$$G = -\frac{1}{2} \frac{d}{dA} \int_V \tilde{\rho} \dot{u}_i \dot{u}_i dV - \frac{d}{dA} \int_V \int_0^{\tilde{\varepsilon}_y} \tilde{\sigma}_{ij}^y d\tilde{\varepsilon}_{ij}^y dV \quad (26)$$

$$+ \int_S T_i \frac{du_i}{dA} dS + \int_V b_i \frac{du_i}{dA} dS$$

식(26)에 대한 물리적 제한은,

$$G_C \geq G \quad (27)$$

시편의  $y$ 방향으로의 전체 길이를  $l$ 이라고 할 때  $A = 2a \times 2l \times t = 2al\rho$  이므로,

$$dA = 2al d\rho \quad (28)$$

따라서, 식 (26)의 개념을 차용하여 Fig. 2 (b)와 Fig. 2(c)의 RVE에 대해 연산을 수행하면 body force와 inertia effect를 무시했을 때 식(29)가 얻어진다.

$$G = t \tilde{\sigma}_{ij} \frac{d \tilde{\varepsilon}_{ij}}{d\rho} - t \frac{d \tilde{\sigma}_{ij}}{d\rho} \tilde{\varepsilon}_{ij} = t \tilde{\varepsilon}_{ij} \tilde{\varepsilon}_{kl} \frac{d \tilde{\sigma}_{ijkl}}{d\rho} \quad (29)$$

고전적층이론에서와 같이 plane stress 조건을 가정하고,  $yz$ 면의 물성치가 transversely isotropic 이면 식 (29)는 각각의 층에 대해서 다음과 같이 단순화된다.

$$G = t \left[ Q_{11}(\nu_{LT} \tilde{\varepsilon}_L(\rho) + \tilde{\varepsilon}_T(\rho))^2 \frac{d\xi}{d\rho} + G_{LT}(\tilde{\gamma}_{LT}(\rho))^2 \frac{d\phi}{d\rho} + G_T(\tilde{\gamma}_T(\rho))^2 \frac{d\mu}{d\rho} \right], \text{ or} \quad (30)$$

$$G = t \left[ \frac{(\tilde{\sigma}_T(\rho))^2}{Q_T(1-\xi)^2} \frac{d\xi}{d\rho} + \frac{(\tilde{\gamma}_{LT}(\rho))^2}{G_{LT}(1-\phi)^2} \frac{d\phi}{d\rho} + \frac{(\tilde{\gamma}_T(\rho))^2}{G_T(1-\mu)^2} \frac{d\mu}{d\rho} \right]$$

여기서  $\xi$  는 식(11)로 정의된다. 식(15), 식(19) 및 식(24)로 주어진  $\eta$ ,  $\phi$  및  $\mu$ 는 적층순서에 무관하므로 별도의 수정없이 고전적층이론에 그대로 대입할 수 있다.

### 2.4.2. Pre-Existing Microcracks

각각의 층 내부에는 다양한 크기의 미세균열들이 이미 존재하고 있을 수 있다. 각각의 층 내부에서 하중이 증가하면 크기가 상대적으로 큰 미세균열들부터 완전한 크기의 기지균열로 성장하게 될 것이다. 따라서 미세균열의 영향을 고려하면 기지균열의 밀도가 증가함에 따라 미세균열들이 큰 것부터 점차 소진되므로, 겉보기  $G_C$ 는 실제의  $G_C$ 보다 상당히 작은 값에서 출발하여 점차 실제의  $G_C$ 값에 접근하게 될 것이다. 겉보기  $G_C$ 를  $G_C^*$ 로 정의하고 식(31)의 형태로 가정하자.

$$G_C^* = G_0 + (G_C - G_0) \tanh \omega \rho \quad (31)$$

여기서,  $G_0$ 와  $G_C$  및  $\omega$ 는 실험으로 결정되는 상수들이다. 식(31)을 식(27)에 적용하면,

$$G_0 + (G_C - G_0) \tanh \omega \rho \geq G \quad (32)$$

### 3. Concluding Remarks

Tranverse 방향으로 가해지는 외력이 같은 방향의 전단변형률에 미치는 영향을 무시한다면, 임의의 적층 순서로  $N$ 개의 층이 겹쳐진 적층재가 일반적인 기계적 하중을 받고 있을 때 각각의 층에 발생하는 기지균열 밀도증가를 예측하기 위해서는 식(33) 및 (34)가 만족되어야 한다.

$$\{G_0 + (G_C - G_0) \tanh \omega \rho\}_{(k)} \geq G_{(k)} \text{ for all layers } k=1, 2, 3 \dots, N, \quad (33)$$

$$G_{(k)} = t_{(k)} \left[ Q_T (\nu_{LT} \bar{\epsilon}_L + \bar{\epsilon}_T)^2 \frac{d\bar{\epsilon}}{d\rho} + G_{LT} (\bar{\gamma}_{LT})^2 \frac{d\bar{\gamma}}{d\rho} \right]_{(k)}, \text{ or} \quad (34)$$

$$G_{(k)} = t_{(k)} \left[ \frac{(\bar{\sigma}_T)^2}{Q_T (1 - \phi)^2} \frac{d\bar{\sigma}}{d\rho} + \frac{(\bar{\tau}_{LT})^2}{G_{LT} (1 - \phi)^2} \frac{d\bar{\tau}}{d\rho} \right]_{(k)}$$

여기서,

$$\bar{\epsilon}_{L(k)} = \bar{\epsilon}_L^0 + \frac{1}{2t_{(k)}} (z_{2a(k)}^2 - z_{2b(k)}^2) \kappa_L^0 - \alpha_L \Delta T - \beta_L \Delta m$$

$$\bar{\epsilon}_{T(k)} = \bar{\epsilon}_T^0 + \frac{1}{2t_{(k)}} (z_{2a(k)}^2 - z_{2b(k)}^2) \kappa_T^0 - \alpha_T \Delta T - \beta_T \Delta m$$

$$\bar{\gamma}_{LT(k)} = \bar{\gamma}_{LT}^0 + \frac{1}{2t_{(k)}} (z_{2a(k)}^2 - z_{2b(k)}^2) \kappa_{LT}^0$$

$$\bar{\sigma}_{T(k)} = Q_{T(k)} (1 - \phi_{(k)}) (\nu_{LT} \bar{\epsilon}_{L(k)} + \bar{\epsilon}_{T(k)}) \quad (35)$$

$$\bar{\tau}_{LT(k)} = G_{LT(k)} (1 - \phi_{(k)}) \bar{\gamma}_{LT(k)}$$

$$\bar{\epsilon}_L^0, \bar{\epsilon}_T^0, \bar{\epsilon}_{LT}^0 = \text{strains of the laminate midplane}$$

$$\kappa_L^0, \kappa_T^0, \kappa_{LT}^0 = \text{curvatures of the laminate midplane}$$

식(33)에서  $\omega = 1$ 로 놓은 예측치를 Fig. 5에 실험치들[6, 7]과 비교하였다.

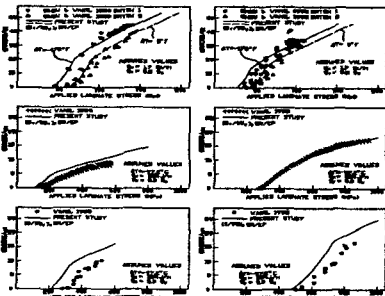


Fig. 5 Stress vs. matrix crack density

Fig. 6에  $[0_2/90_2]_S$  및  $[0_2/+45_-45]_S$  적층판의 유효 Young's modulus를 본 연구의 방법으로 예측하여 기존의 실험치들[3, 8]과 비교하였다.

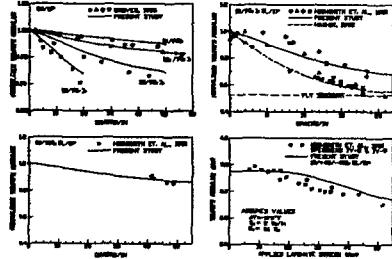


Fig. 6 Effective Young's modulus

Fig. 5 및 Fig. 6에서와 같이 본연구의 예측결과와 기존의 실험치들과 상당히 일치하고 있다. 향후 Fiber 방향의 wavyness 가 주는 영향을 포함시켜서 본 연구의 예측능력을 더욱 향상시킬 예정이다.

### References

- [1] Hashin, Z., "analysis of Cracked Laminates: A Variational Approach," Mechanics of Materials 4, North Holland, pp. 121-136, 1985.
- [2] Nairn, J. A., "The Strain Energy Release Rate of Composite Microcracking: A Variational Approach," J. of Composite Materials, Vol. 23, pp. 1106-1129, Nov. 1989.
- [3] Highsmith, A. L., Stinchomb, W. W., and Reifsnider, K. L., "Stiffness-Reduction Resulting from Transverse Cracking in Fiber-Reinforced Composite Laminates," EAM Dept. Report, VPI & State Univ., 1981.
- [4] Vakulenko, A. A., and Kachanov, M. L., "Continuum Theory of Medium with Cracks," Izv. AN SSSR, Mekhanika Tverdoho Tela, Vol. 6, pp. 159-166, 1971.
- [5] Hellan, Kare, Introduction to Fracture Mechanics, McGraw-Hill Book Co., ISBN 0-07-028048-7, pp. 49-55, 1984.
- [6] Chou, P. C., and Wang, A. S. D., "Cumulative Damage Model for Advanced Composite Materials," Interim Report No. 4 for Air Force Wright Aeronautical Lab., Contract No, F33615-80-C-5039.
- [7] Wang, A. S. D., "FRcture Analysis of Matrix Cracking in Laminated Composites," Final Report for Naval Air Development Center, Contract No. NADC-85118-60, 1985.
- [8] Groves, S. E., "A Study of Damage Mechanics in Continuous Fiber Composite Laminates with Matrix Cracking and Interply Delaminations," Ph. D. Dissertation, Aerospace Engineering Dept., Texas A&M Univ., 1986. Ph. D.