

다수의 탄성지지대 위를 축방향으로 이동하는  
보 구조물의 동특성 해석  
Dynamic Characteristics of the Beam Axially Moving over  
Multiple Elastic Supports

김태형\*      이우식\*\*  
Taehyoung Kim      Usik Lee

---

ABSTRACT

This paper investigates the dynamic characteristics of a beam axially moving over multiple elastic supports. The spectral element matrix is derived first for the axially moving beam element and then it is used to formulate the spectral element matrix for the moving beam element with an interim elastic support. The moving speed dependance of the eigenvalues is numerically investigated by varying the applied axial tension and the stiffness of the elastic supports. Numerical results show that the fundamental eigenvalue vanishes first at the critical moving speed to generate the static instability.

---

1. 서론

축방향으로 이동하는 구조물에는 컨베이어 벨트, 체인, 마그네틱 테이프, 락 등 있다. 이러한 구조물의 이동속도는 구조물의 고유진동수와 동특성에 많은 영향을 미치며 임계이동속도에 이르면 불안정성 현상이 나타날 수 있으므로 이에 대한 연구가 그 동안 많은 연구자들에 의해 이루어져왔다.

축방향으로 이동하는 1차원 구조물의 동특성을 해석하기 위해 현(string)모델 내지는 보(beam)모델이 널리 사용되어 왔다. 축방향으로 이동하는 보에 관해 Simpson [1]은 모우드와 고유진동수, Mote [2]는 Galerkin법으로 안정성을 연구하였고, Wickert와 Mote [3]는 축방향으로 이동하는 현과 보에 관해 Green함수법으로 모달해석과 안정성을 연구하였다. 탄성 지지대 위로 이동하는 구조물의 연구는 Lee와 Mote [4], Riedel과 Tan [5], 그리고 Safed [8]에 의해 이루어졌다. 중간에 스프링-질량-감쇠의 지지대를 갖는 현에 대해서 Lee와 Mote [4]는 현의 진행파(travelling wave)를 이용하여 모달해석을 수행하였고, Riedel과 Tan [5]은 중간에 하나의 스프링을 갖는 현과 보에 관해 전달함수법(transfer function method)을 이용하여 동특성과 안정성을 연구하였으며 Safed [8]는 파동전달행렬(wave transfer matrix)을 이용하여 다수의 스프링으로 지지된 현에 관해 고유진동수를 해석하였다. 장력과 이동속도가 고려되지 않은 경우, 다수의 스프링으로 지지된 보에 관해 Lin [6]은 차분

---

\* 인하대학교 기계공학과

\*\* 인하대학교 기계공학과 교수

방정식을 이용하여 고유진동수를 해석하였고, Bergman [7]은 Green함수법을 이용하여 모달해석을 수행하였다. 그리고 Safed [8]는 파동전달행렬(wave transfer matrix)을 이용하여 모달해석을 수행하였다.

본 논문에서는 탄성지지대와 이동하는 보의 연성을 위해 4극 매개변수법 [9]을 이용하였고, 탄성지지대 위로 이동하는 보-구조물의 정확한 형상함수를 이용하여 이동하는 요소 보의 스펙트럴요소모형을 유도하였다. 기존의 수치예제결과를 본 연구에서 개발한 스펙트럴요소모형을 이용한 결과와 비교하여 스펙트럴요소모형의 정확성을 확인하였다 [6-8]. 또한, 개발된 스펙트럴요소모형으로 탄성지지대 위로 이동하는 보-구조물의 동특성을 해석하였고, 수치해석을 통해 임계이동속도를 구하였으며 임계이동속도와 전후의 동특성을 고찰하였다.

## 2. 탄성지지대가 없는 이동하는 보 요소에 대한 스펙트럴요소 유도

축방향으로 이동하는 오일러보의 운동방정식은 해밀톤의 원리를 이용하여 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$EIw'''' - Nw'' + \rho A(\ddot{w} + 2c\dot{w}' + c^2w') - p(x, t) = 0 \quad (1)$$

여기서,  $w$ 는 굽힘변위,  $w'$ 는 기울기,  $c$ 는 보의 이동속도,  $\rho A$ 는 단위길이당 질량,  $EI$ 는 보의 강성계수,  $N$ 는 단위길이당 작용하는 장력,  $p(x, t)$ 는 균일분포하중이며, 경계조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} w(0) = w|_0 \text{ or } Q(0) = -Q|_0, \quad w'(0) = w'|_0 \text{ or } M(0) = -M|_0 \\ w(L) = w|_L \text{ or } Q(L) = Q|_L, \quad w'(L) = w'|_L \text{ or } M(L) = M|_L \end{aligned} \quad (2)$$

여기서,  $L$ 은 요소 보의 길이이다.

전단력과 굽힘모멘트는 변위의 함수로 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} Q(x) = -EIw'''' - \rho A c(\dot{w} + cw') + Nw' \\ M(x) = EIw'' \end{aligned} \quad (3)$$

이동하는 오일러보의 자유진동인 경우  $p(x, t)$ 는 소거되며 굽힘방향 변위  $w(x, t)$ 를 Fourier 급수로 나타내면 다음과 같다.

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^N \widehat{W}_n(x) e^{i\omega_n t} \quad (4)$$

여기서,  $\omega_n$ 은 주파수이며  $\widehat{W}_n$ 은  $\omega_n$ 에 대한 파동의 크기를 나타내는 스펙트럴 계수이다. 식(4)를 식(1)에 대입하면 다음과 같은 상미분 방정식으로 나타낼 수 있다.

$$EI \widehat{W}'''' - (N - \rho A c^2) \widehat{W}'' + \rho A c \omega_i \widehat{W}' - m \omega^2 = 0 \quad (5)$$

식(5)의 일반해를  $\widehat{W}(x) = A^{-ikx}$ 로 가정하여 대입하면 이동하는 오일러보의 분산관계에 대한 방정식을 유도할 수 있다.

$$k^4 + ak^2 + \beta k - \gamma = 0 \quad (6)$$

여기서,  $k$ 는 파수(wavenumber)이며  $\alpha$ ,  $\beta$ , 그리고  $\gamma$ 는 다음과 같이 각각 정의한다.

$$\alpha = \frac{N - \rho A c^2}{EI}, \quad \beta = \frac{2\rho A c \omega}{EI}, \quad \gamma = \frac{\rho A \omega^2}{EI} \quad (7)$$

식(6)에 의해 구해진 네 근을 이용하여 구한 식(5)의 일반해와 일반해에 의한 기울기를 식(4)와 식(2)에 대입하여 스펙트럴요소에서의 전단력, 그리고 굽힘모멘트를 각각 다음과 같이 유도할 수

있다.

$$\begin{aligned}\widehat{W}(x) &= \sum_{j=1}^4 A_j e^{-ik_j x}, & \widehat{\theta}(x) &= -k_j i \sum_{j=1}^4 A_j e^{-ik_j x} \\ \widehat{Q}(x) &= -b_j \sum_{j=1}^4 A_j e^{-ik_j x}, & \widehat{M}(x) &= c_j \sum_{j=1}^4 A_j e^{-ik_j x}\end{aligned}\quad (8)$$

여기서,  $b_j$ 와  $c_j$ 는 다음과 같이 정의한다

$$b_j = iEI k_j^3 + i(N - \rho A c^2)k_j + i\rho A c \omega, \quad c_j = EI k_j^2 \quad (9)$$

Fig. 1에 의해 스펙트럴요소의 절점에서의 자유도, 전단력, 그리고 굽힘모멘트는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned}\widehat{W}_0 &= \widehat{W}(0), & \widehat{\theta}_0 &= \widehat{\theta}(0), & \widehat{W}_L &= \widehat{W}(L), & \widehat{\theta}_L &= \widehat{\theta}(L) \\ \widehat{Q}_0 &= -\widehat{Q}(0), & \widehat{M}_0 &= -\widehat{M}(0), & \widehat{Q}_L &= -\widehat{Q}(L), & \widehat{M}_L &= \widehat{M}(L)\end{aligned}\quad (10)$$

식(10)에 의해 절점자유도벡터  $\{d\}$ 와 상수벡터  $\{A\}$ 사이의 관계, 그리고 절점에서의 외력벡터  $\{f\}$ 와 상수벡터  $\{A\}$  사이의 관계를 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\{d\} = [N(\omega)]\{A\}, \quad \{f\} = [P(\omega)]\{A\} \quad (11)$$

여기서,

$$\begin{aligned}\{d\} &= \{ \widehat{W}_0 \quad \widehat{\theta}_0 \quad \widehat{W}_L \quad \widehat{\theta}_L \}^T \\ \{A\} &= \{ A_1 \quad A_2 \quad A_3 \quad A_4 \}^T, & \{f\} &= \{ \widehat{Q}_0 \quad \widehat{M}_0 \quad \widehat{Q}_L \quad \widehat{M}_L \}^T \\ [N(\omega)] &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ a_1 e_1 & a_2 e_2 & a_3 e_3 & a_4 e_4 \end{bmatrix}, & [P(\omega)] &= \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ -c_1 & -c_2 & -c_3 & -c_4 \\ b_1 e_1 & b_2 e_2 & b_3 e_3 & b_4 e_4 \\ c_1 e_1 & c_2 e_2 & c_3 e_3 & c_4 e_4 \end{bmatrix} \\ e_j &= e^{-ik_j L}, \quad a_j = -ik_j \quad (j=1,2,3,4)\end{aligned}\quad (12)$$

식(11)에서 상수벡터  $\{A\}$ 를 소거하여 절점 힘과 절점 사이의 변위 관계를 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\{f\} = [P(\omega)][N(\omega)]^{-1}\{d\} = [S(\omega)]\{d\} \quad (13)$$

여기서,  $[S(\omega)]$ 는 이동하는 오일러보의 스펙트럴요소행렬이다.

#### 4. 하나의 탄성지지부를 갖는 보의 스펙트럴요소 유도

Molloy가 처음 제안한 4극 매개변수법 [9]은 복잡하고 이론적으로 모델링이 어려운 구조물을 등가질량, 등가강성, 그리고 등가감쇠의 요소들로 모델링하여 구조물의 동특성을 해석하는 방법이다.

4극 매개변수법을 이용하여 힘과 변위의 관계로 배열하면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} \widehat{Q}_1 \\ \widehat{Q}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \widehat{W}_1 \\ \widehat{W}_2 \end{Bmatrix} \quad (14)$$

스프링을 식(14)의 4극 매개변수들로 나타내면  $z_{11}=k$ ,  $z_{12}=-k$ ,  $z_{21}=k$ ,  $z_{22}=-k$ 이고,  $k$ 는 스프링상수이다.

이동하는 보의 중간에 탄성지지대가 연성되고, 외력  $\widehat{F}$ 가 아래 방향으로 작용할 때, 이동하는 오일러보의 스펙트럴요소를 FEM과 같은 결합기법으로 결합하고, 보와 탄성지지대가 연성되는 절

점2의 전단력은  $\widehat{Q}_2 = \widehat{F} - z_{11} \widehat{W}_2$ 이므로  $z_{11} \widehat{W}_2$  을 이동하는 오일러보의 스펙트럴요소행렬로 이항시키면 중간에 하나의 탄성지지를 갖는 움직이는 요소 보-모델을 위한 스펙트럴요소행렬이 다음과 같이 유도된다.

$$\{f_B\} = [S_B(\omega)]\{d_B\} \quad (15)$$

여기서,

$$\begin{aligned} \{f_B\} &= \{ \widehat{Q}_1 \quad \widehat{M}_1 \quad \widehat{Q}_2 \quad \widehat{M}_2 \quad \widehat{Q}_3 \quad \widehat{M}_3 \}^T \\ \{d_B\} &= \{ \widehat{W}_1 \quad \widehat{\theta}_1 \quad \widehat{W}_2 \quad \widehat{\theta}_2 \quad \widehat{W}_3 \quad \widehat{\theta}_3 \}^T \\ [S_B] &= \begin{bmatrix} s_{11}^1 & s_{12}^1 & & s_{13}^1 & s_{14}^1 & 0 & 0 \\ & s_{22}^1 & & s_{23}^1 & s_{24}^1 & 0 & 0 \\ & & s_{33}^1 + s_{11}^2 + z_{11} & s_{34}^1 + s_{12}^2 & s_{13}^2 & s_{14}^2 \\ & & & s_{44}^1 + s_{22}^2 & s_{23}^2 & s_{24}^2 \\ & \text{symm.} & & & s_{33}^2 & s_{34}^2 \\ & & & & & s_{44}^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (16)$$

고유진동수  $\omega_{NAT}$ 는 다음과 같이 스펙트럴요소행렬의 행렬식이 0이 되도록 하는 조건으로부터 계산할 수 있다.

$$\det[S_B(\omega_{NAT})] = 0 \quad (17)$$

## 5. 수치 예제

Table 1과 같이 Lin [6], Bergman [7], Safed [8], 유한요소법, 그리고 전달행렬법에 의해 계산된 고유진동수를 이동속도와 장력이 없을 때의 스펙트럴요소모델을 이용하여 계산한 고유진동수와 비교하였다. Table 1에서 FEM은 한 스펙에 4개의 요소로 계산된 수치결과다. 수치 예제에 사용한 보는 단순지지된 균등한 보이며 길이  $L=1.2\text{m}$ , 단위길이 당 질량  $\rho A=0.81\text{kg/m}$ , 굽힘강성  $EI=180\text{N}\cdot\text{m}^2$ 의 물성치를 적용하였다. Table 2에서  $\lambda = \sqrt[4]{\rho A L^4 \omega^2 / EI}$ 는 무차원 고유진동수이고,  $s=kL^3/EI$ 는 무차원 강성계수이며  $k$ 는 스프링상수이다. 탄성지지대 위로 이동하는 보-구조물의 임계 이동속도는 정적인 방법에 의해 구했다. 즉,  $\det[S_s(\omega=0)]=0$ 을 만족하는 이동속도가 임계이동속도이고, 본 논문에서는 수치적으로 구했다. 여기서,  $[S_s]$ 는 Fig. 2의 스펙트럴요소행렬이다. Fig. 2와 같이 스프링으로 구성된 탄성지지대의 강성과 장력이 증가하면 Fig. 3과 같이 고유진동수는 증가하고, 임계이동속도가 증가하면 고유진동수는 감소한다. Fig. 4와 같이 보의 이동속도가 첫 번째 임계이동속도에 다르면 첫 번째 고유진동수는 사라지고 정적인 상태로 Fig. 5의 임계이동속도일 때와 같이 발산하게 된다. Fig. 5의 동적응답은 Fig. 2와 같이  $L/3$ 의 절점에서 아래방향으로 10N의 힘을 0초부터 0.003초 동안 가진하였을 때,  $L/2$ 인 절점에서의 동적응답이다.

## 6. 결론

본 논문에서는 일정한 장력과 속도로 이동하는 오일러보의 운동방정식을 유도하였고, 탄성지지부와 이동하는 보의 연성을 위해 4극 매개변수법 [9]을 이용하였으며 정확한 형상함수를 이용하여 스펙트럴요소모델을 유도하고, 기존의 결과와 비교하여 본 논문에서 개발된 스펙트럴요소의 정확

성을 확인하였다. 또한, 장력과 속도가 있을 때 동특성 해석을 수행하고, 임계이동속도를 계산하였으며 다음과 같은 사항을 확인하였다.

- (1) 탄성지지부가 스프링으로 구성된 경우, 스프링상수와 축방향의 장력이 증가함에 따라 임계이동속도와 고유진동수는 증가하고, 이동속도가 증가함에 따라 고유진동수는 감소한다.
- (2) 첫 번째 임계이동속도에 다다른 불안정성 현상이 나타나며 두 번째 임계이동속도에서부터 좁은 영역의 이동속도는 안정성 현상이 나타난다.

Table 1 Eigenvalues ( $\lambda$ )

	Non-dimensional stiffness parameter ( $s=2.16$ )							
	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th	8th
SEM	3.241	6.296	9.429	12.568	15.709	18.850	21.991	25.133
TMM	3.241	6.296	9.429	12.568	15.709	18.850	21.991	25.133
Lin [6]	3.240	6.294	9.426	12.564	15.702	21.990	25.134	28.272
Bergman [7]	3.241	6.296	9.429	12.568	15.709	18.850	21.991	25.133
Safed [8]	3.241	6.296	9.429	12.568	15.709	18.850	21.991	25.133
FEM	3.241	6.296	9.429	12.568	15.710	18.852	21.997	25.143

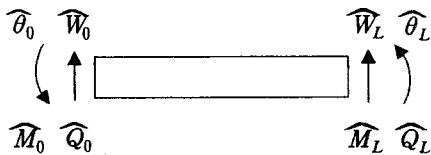


Fig. 1 Sign convention for the finite Bernoulli-Euler beam element

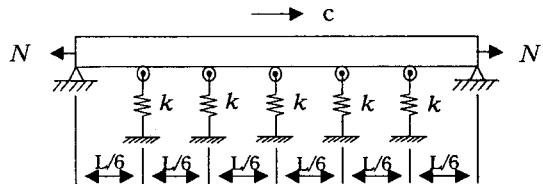


Fig. 2 The beam axially moving over multiple elastic supports

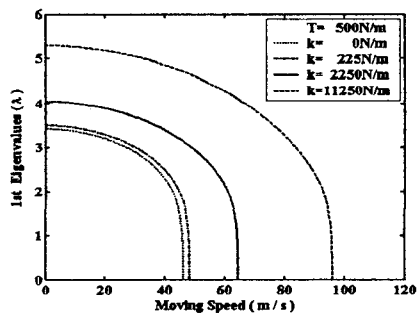
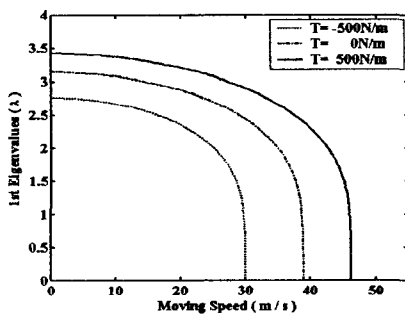


Fig. 3 Eigenvalues vs. moving speed

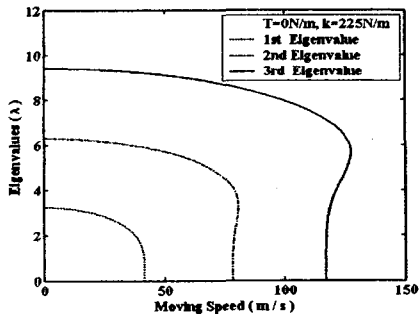


Fig. 4 Eigenvalues vs. moving speed

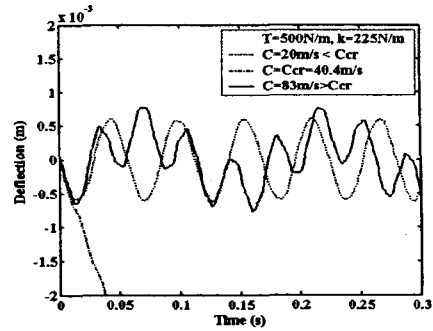


Fig. 5 Dynamic response of an axially moving beam over multiple elastic supports at the center

#### 참고문헌

1. A. Simpson (1973), "Transverse Modes and Frequencies of Beams Translating Between Fixed End Supports," *Journal of Mechanical Engineering Science*, Vol. 15. No. 3, pp. 159-164.
2. C. D. Mote, Jr. (1965), "A Study of Band Saw Vibrations," *Journal of the Franklin Institute*, Vol. 279. No. 6, pp. 430-444.
3. J. A. Wickert and C. D. Mote, Jr. (1990), "Classical Vibration Analysis of Axially Moving Continua," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 57, pp. 738-744.
4. S.-Y. Lee and C. D. Mote, Jr. (1998), "Traveling Wave Dynamics in a Translating String Coupled to Stationary Constraints," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 212. No. 1. pp. 1-22.
5. C. H. Riedel and C. A. Tan (1998), "Dynamic Characteristics and Mode Localization of Elastically Constrained Axially Moving Strings and Beams," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 215. No. 3, pp. 455-473.
6. Y. K. Lin (1962), "Free Vibrations of a Continuous Beam on Elastic Supports," *International Journal of Mechanical Science*, Vol. 4, pp. 409-423.
7. L. A. Bergman and D. M. McFarland (1988), "On the Vibration of a Point-Supported Linear Distributed System," *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reliability in Design*, Vol. 110, pp. 485-492.
8. H. M. Safed and F. Vestroni (1998), "Simulation of Combined Systems by Periodic Structures," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 213. No. 1, pp. 55-73.
9. S. K. Clark (1972), *Dynamics of Continuous Elements*, Prentice-Hall, Inc, Englewood Cliffs, pp. 115-127.