

# 결합각을 조절하는 결합 발진기 배열에 대한 역학 방정식의 연속 모델

윤정호, 명노훈

한국과학기술원 전자전산학과

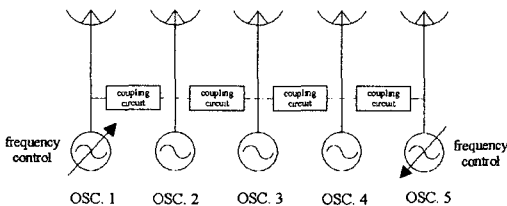
## Continuum Model of Dynamics for the Coupled Oscillator Array with Coupling Angle Adjustment

Jung-Ho Yoon, Noh-Hoon Myung

Dept. of Electrical Eng. & Computer Science, KAIST

### I. 서론

Injection locking이란 발진기 외부에 인가된 신호의 주파수에 발진기의 발진 주파수가 동기(synchronization) 또는 locking이 되는 현상을 얘기한다. 외부에 인가되는 신호와 발진기 간의 결합은 결합회로를 통해 이루어지며, injection locking이 이루어진 후, 얼마간의 시간이 흐른 정상상태에서 이 두 신호 사이에는 두 주파수의 차이에 해당하는 위상차가 발생한다. 이렇게 발생된 위상차를 배열안테나에 연결하여 위상천이기(phase shifter)가 없이도 빔 스캔이 가능하도록 한 기술이 결합 발진기 배열의 한 응용사례이다 [1]-[5].



(그림 1) 결합발진기 배열의 형태

(그림 1)은 결합 발진기 배열의 일반적인 형태를 나타내고 있다. 배열안테나의 빔 스캔은 배열의 양 끝단에 위치한 발진기의 발진 주파수 [4]나 결합회로의 결합각 [5]을 각기 반대 방향으로 일정 비율만

큼 변화시켜서 얻은 각 소자 간의  $\Delta\phi$ 라는 일정한 위상차의 진진 분포(progressive distribution)를 통해서 가능해진다. 그러나 이 위상분포는 결합회로의 특성상 비선형적일 수밖에 없으며, 이러한 배열의 동작은 계산이 어려운 비선형 미분방정식의 해를 통해서만 이해할 수 있었다 [3],[6].

결합 발진기 배열의 비선형 미분방정식은 그 해가 복잡해서 배열의 위상분포에 대해 직관적인 이해를 어렵게 만든다. 하지만, 결합 발진기 사이의 상대적인 위상을 연속적인 함수로 해석한 연속적 역학 모델(continuum model of dynamics)은 시간 영역에서 정상상태에 이르는 과도현상까지 볼 수 있어, 이러한 배열의 동작을 이해하는 데 매우 유용하며, 이는 결합 발진기 배열의 실제 응용에도 도움이 될 것이다 [6]. 또한, 비선형 역학 방정식을 해석하는데 걸리는 시간을 절약할 수 있다. 본 논문에서는 결합각을 조절하는 결합 발진기 배열 [5]을 연속적 역학 모델로 해석하여 그 동작을 이해한다.

### II. 역학 방정식의 연속 모델

결합각  $\phi_{ij}$ 를 포함하는 결합발진기 배열의 역학 방정식은 [3]-[5]로부터

$$\frac{d\theta_i}{dt} = w_i - \sum_{j=-N}^N \Delta w_{lock} \sin(\Phi_{ij} + \theta_i - \theta_j) \quad (1)$$

와 같은 비선형 방정식으로 나타난다. 여기서,  $w_i$ 는  $i$ 번째 발진기의 발진주파수이며,  $\theta_i$ 는  $i$ 번째 발진기의 시변 위상각  $\theta_i = w_{ref}t + \phi_i$ 이다.  $\Delta w_{lock}$ 은 locking 영역 (또는 locking BW)이며 아래와 같다.

$$\Delta w_{lock} = \frac{\epsilon_y w_i A_j}{2Q A_i} \quad (2)$$

위식에서  $Q$ 는 발진기의  $Q$  인자,  $A_i$ 는  $i$ 번째 발진기의 발진 신호의 크기,  $\epsilon_y$ 는  $i$ 번째와  $j$ 번째 발진기 간 결합계수의 크기,  $\Phi_y$ 는 결합계수의 결합각이며 결합회로 (coupling circuit)를 통한 결합계수는  $\epsilon_y e^{j\Phi_y}$  이다.

(그림 1)과 같이 결합 발진기 배열이 1차원 배열이 되도록 결합회로를 구성할 경우 발진기 간의 결합은 인접한 발진기와의 결합 외에는 무시할 수 있으며, 본 논문의 결합각을 조절하는 결합 발진기 배열은 배열 내의 모든 발진기가 같은 주파수에서 발진하므로 ( $w_i = w_{ref}$ ) 식 (1)을 간략하게 쓸 수 있다 [5].

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_i}{dt} &= - \sum_{\substack{j=i-1 \\ j \neq i}}^{j=i+1} \Delta w_{lock} \sin(\Phi_y + \phi_i - \phi_j) \\ &= - \Delta w_{lock} \sin(\Phi_{i,i-1} + \phi_i - \phi_{i-1}) \\ &\quad - \Delta w_{lock} \sin(\Phi_{i,i+1} + \phi_i - \phi_{i+1}) \end{aligned} \quad (3)$$

$\sin$  함수의 인수인 결합각  $\Phi_{i,i\pm 1}$ 과 인접한 발진기간 위상차 ( $\phi_i - \phi_{i\pm 1}$ )의 합이 매우 작다고 가정하면 근사적으로 다음 식 (4)와 같이 쓸 수 있다.

$$-\frac{d\phi_i}{d\tau} = \Phi_{i,i-1} + \Phi_{i,i+1} - (\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}) \quad (4)$$

여기서,  $\Delta w_{lock}t = \tau$ 라 둔다. 중첩의 원리를 적용하여 선택적으로  $\Phi_{i,i-1}$ 를 0으로 두고,  $\Phi_{i,i+1}$ 는 정상상태에서의 발진기 간 위상차를 만들어 내는 여기 항으로 해석한다.

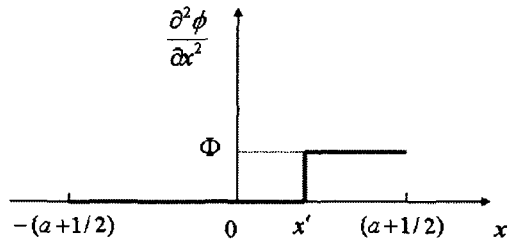
$$(\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}) - \frac{d\phi_i}{d\tau} = \Phi_{i,i+1} \quad (5)$$

색인  $i = -N, -N+1, \dots, 0, 1, 2, \dots, N$ . 여기서, 좌변의 괄호 안에 있는 위상에 대한 식은 색인  $i$ 에 해당하는 공간 변수  $x$ 의 유한 차분 근사 (finite-difference approximation)로 통해  $x$ 의 2차 미분식으로 쓸 수 있다 [6].

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \phi(x, \tau) - \frac{\partial}{\partial \tau} \phi(x, \tau) = \Phi(x, \tau) \quad (6)$$

$x$ 의 범위는  $-a - 1/2 \leq x \leq a + 1/2$ 이다. 식 (6)의 연속 함수  $\phi(x, \tau)$ 는 결합 발진기 배열을 가로지르는 위상을 나타내며,  $x = \pm a$ 는 발진기의 색인  $i = \pm N$ 에 해당한다. 전체 발진기의 수는  $(2N + 1)$ 개로 가정하여 배열의 길이는  $(2a + 1)$ 이 된다.

결합각을 조절하는 결합 발진기 배열은 모든 발진기 간의 위상차  $\Delta\phi$ 가  $2\pi$ 의 정수배인 정상상태에서  $i$ 번째와  $i+1$ 번째 사이의 결합 회로의 결합각 ( $\Phi_{i,i+1}$ )을 조절하여 강제된 위상차를 여기 (excitation)함으로써 일정시간이 흐른 정상상태에서의 위상분포가 형성되므로, 이러한 상황을 연속 방정식으로 모델링 한다면 다음 (그림 2)과 같이  $\tau = 0$  ( $t = 0$ )인 시간에  $x = x'$  지점에서 결합각 조절량인  $\Phi$  만큼의 가중치를 가지는 unit step의 위상차가 강제 여기된 걸로 볼 수 있다.



(그림 2) 위상차의 unit step 여기

이를 수식으로 표현하면,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial \phi}{\partial \tau} = \Phi u(x-x')u(\tau) \quad (7)$$

와 같이 쓸 수 있다. 결국 식 (7)의 2차 미분방정식을 푼다면 결합 발전기 배열 전체의 위상 분포에 대한 시간과 공간 변수를 갖는 연속적인 해  $\phi(x, \tau)$ 를 구할 수 있다.

시간 정수  $\tau$ 에 대해 Laplace 변환을 하면

$$\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial x^2} - s\tilde{\phi} = \frac{\Phi}{s} u(x-x') \quad (8)$$

가 되며 (단,  $\tilde{\phi}(x, x'; s) = \mathcal{L}\{\phi(x, x'; \tau)\}$ ), 정상 상태에서의 위상분포에 대한 직관으로부터  $\pm(a + 1/2)$ 에서의 Neumann 경계 조건을 가정한다면, 식 (8)과 같은 미분방정식은 익히 알려진 Neumann 경계 조건에 대한 Green 함수로부터 어렵지 않게 구할 수 있다. 다음 Green 함수

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} - sG = +\delta(x-x') \quad (9)$$

의 해를

$$G = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\eta_n \cosh(x'\sqrt{s_n}) \cosh(x\sqrt{s_n})}{(2a+1)(s_n-s)} - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2 \sinh(x'\sqrt{s_m}) \sinh(x\sqrt{s_m})}{(2a+1)(s_m-s)} \quad (10)$$

로 쓴다면 (여기서,  $n=0$ 은  $\eta_0=1$ ,  $n \geq 1$ 은  $\eta_n=2$ ), 식 (8)의 해  $\tilde{\phi}(x, x'; s)$ 는

$$\tilde{\phi} = \frac{\Phi}{s} \int_x^{a+\frac{1}{2}} u(p-x') G(p, x; \tau) dp \quad (11)$$

로부터

$$\tilde{\phi} = \left(\frac{x'}{2a+1} - \frac{1}{2}\right) \frac{\Phi}{s^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\Phi}{2a+1} \frac{\cosh(x\sqrt{s_n}) \sinh(x'\sqrt{s_n})}{(s_n-s)s\sqrt{s_n}} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2\Phi}{2a+1} \frac{\sinh(x\sqrt{s_m}) \cosh(x'\sqrt{s_m})}{(s_m-s)s\sqrt{s_m}} \quad (12)$$

가 된다. 고유치  $s_n$ 과  $s_m$ 은 다음과 같다.

$$s_n = -\left(\frac{2n}{2a+1}\pi\right)^2 = -\sigma_n \quad (13)$$

$$s_m = -\left(\frac{2m+1}{2a+1}\pi\right)^2 = -\sigma_m \quad (14)$$

for  $n = 0, 1, 2, \dots$  and  $m = 0, 1, 2, \dots$ .

역 Laplace 변환을 통해 시간 영역에서의 위상 함수  $\phi(x, x'; \tau)$ 를 구할 수 있다.

$$\phi(x, x'; \tau) = \left(\frac{x'}{2a+1} - \frac{1}{2}\right) \Phi \tau + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\Phi}{2a+1} \frac{\cos(x\sqrt{\sigma_n}) \sin(x'\sqrt{\sigma_n})}{\sigma_n \sqrt{\sigma_n}} (1 - e^{-\sigma_n \tau}) - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2\Phi}{2a+1} \frac{\sin(x\sqrt{\sigma_m}) \cos(x'\sqrt{\sigma_m})}{\sigma_m \sqrt{\sigma_m}} (1 - e^{-\sigma_m \tau}) \quad (15)$$

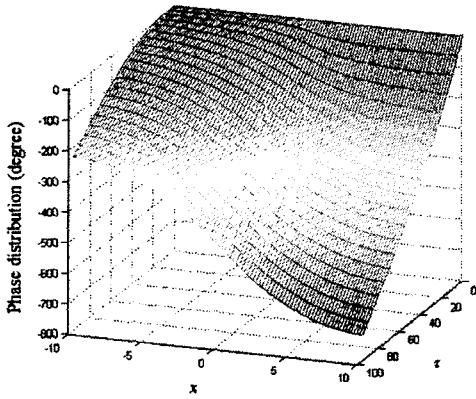
여기서,  $\sqrt{\sigma_n} = \frac{2n}{2a+1}\pi$ ,  $\sqrt{\sigma_m} = \frac{2m+1}{2a+1}\pi$ .

식 (15)를 통해 위상분포는 지수 함수를 따라 정상상태에 이르는 것을 알 수 있다. 따라서 여러 지수항 중에서 가장 늦게 감소하는 항은  $m = 0$ 인 시변 계수  $\sigma_0 = (\pi/(2a+1))^2$ 를 갖는 항이며, 결합각 조절이 있을 후 최소한

$$\tau_0 = \frac{1}{\pi^2} (2a+1)^2 \leftrightarrow t_0 = \frac{1}{\Delta w_{lock} \pi^2} (2a+1)^2 \quad (16)$$

의 시간 (settling time)이 지나야 정상상태에 도달함을 알 수 있다. 이 시간은 배열의 크기의 제곱에 비례하고, locking 영역  $\Delta w_{lock}$ 에 반비례함을 알 수 있다. 또한, 식 (15)의 시간 정수  $\tau$ 에 비례하는 첫 항을 통해 발전기의 위상이 시간에 비례해 계속 전진하고 있음을 알 수 있다.

(그림 3)에  $x' = 0$  지점에서  $\tau = 0$  시간에  $\Phi = \pi/18$  ( $10^\circ$ ) 만큼의 위상차를 여기했을 때, 시간 변수  $\tau$ 에 따라 정상상태까지 이르는 위상 분포의 형성 과정을 보인다.



(그림 3)  $x' = 0$ 에서의 결합각 조절시 위상분포의 시간에 따른 형성 과정 ( $a = 10, n = 50, \Phi = \pi/18$ )

### III. 정상상태 위상분포

정상상태에서의 위상분포를 알아보기 위해 식 (7)에서 시간 변화율에 해당하는 두 번째 항을 0으로 두고, 결합각 조절 후 시간이 충분히 지났다고 가정하여 여기 함수의 시간에 관한 부분  $u(\tau)$ 를 생략한다.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \Phi u(x-x') \quad (17)$$

$\phi$ 를  $x$ 에 관한 2차 다항식으로 해를 가정하여,  $\partial^2 \phi / \partial x^2$ 의 unit step 응답 특성,  $\partial \phi / \partial x, \phi$ 의  $x = x'$ 에서의 연속성과  $x = \pm(a + 1/2)$ 에서의 경계조건을 이용하여  $x$ 에 대한 해를 풀면,

$$\begin{aligned} \phi_{ss}(x, x') = & \frac{\Phi}{2} \frac{x'}{2a+1} x^2 + \frac{\Phi}{6} \frac{x'^3}{2a+1} \\ & + \frac{\Phi}{4} (x-x') |x-x'| \\ & - \frac{\Phi}{2} \left(a + \frac{1}{2}\right) x + \frac{\Phi}{6} \left(a + \frac{1}{2}\right) x' \end{aligned} \quad (18)$$

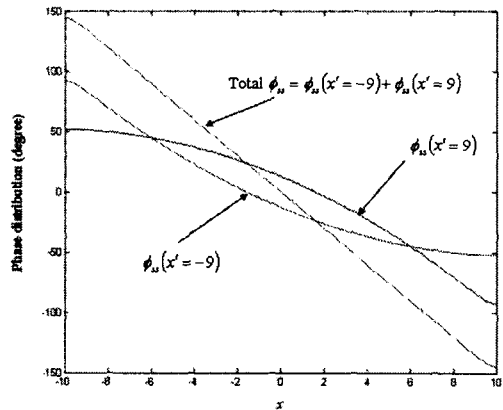
같이 얻을 수 있고, 참고 문헌 [5]와 같이 결합 배열의 양 끝단에 위치한 결합 회로의 결합각을 각기 반대 방향으로 조절했을 경우, 중첩의 원리에 따라 아래와 같이 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{Total } \phi_{ss} &= \phi_{ss}(x, x' = +b) + \phi_{ss}(x, x' = -b) \\ &= -\Phi \left(a + \frac{1}{2}\right) x \\ &+ \frac{\Phi}{4} (x+b) |x+b| \\ &+ \frac{\Phi}{4} (x-b) |x-b| \end{aligned} \quad (19)$$

참고 문헌 [5]의 결합각을 조절하는 결합 발전기 배열은 두 결합각 조절 지점 사이에 위치한 결합 발전기 간 위상차의 선형적인 분포를 빔 스캔에 활용하였으며, 이렇게 실제 선형적인 위상 분포가 이루어지는  $-b \leq x \leq +b$ 의 영역에서는 식 (20)과 같이  $x$ 축을 따라 배열의 크기  $a$ 와 결합각 조절 지점  $b$ 에 비례하는 기울기를 갖는다.

$$\begin{aligned} \text{Total } \phi_{ss} &= -\Phi \left(a + \frac{1}{2} - b\right) x \\ &\text{for } -b \leq x \leq +b \end{aligned} \quad (20)$$

만일,  $a$ 가 10이고 (전체 배열의 개수가 21), 결합각 조절이 양 끝단에 위치한 결합회로에서 이루어질 경우,  $b$ 는 9가 되며, 위 선형 영역에서의 발전기 간 위상차  $\Delta\phi$ 는  $1.5\Phi$ 가 된다.



(그림 4) 양쪽 끝에 위치한 결합회로의 결합각을 조절했을 때 정상상태 위상분포 ( $x' = +9$  and  $-9$ )

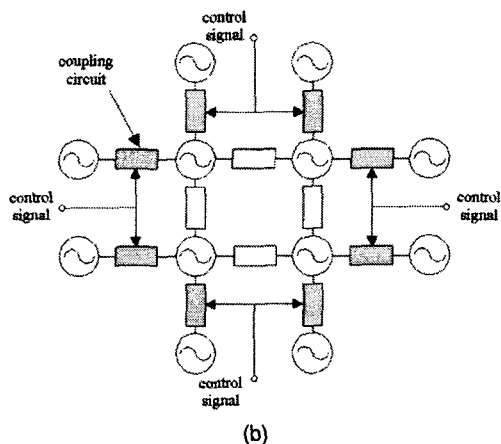
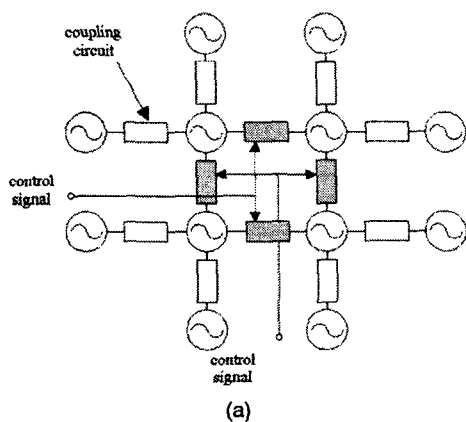
(그림 4)에서는 배열의 크기를 나타내는  $a$ 가 10이며, 양 끝단의 결합각을 조절하는  $b = 9$ 인 경우, 정상상태에서의 위상분포를 보여주고 있다.

## IV. 결론

본 논문에서는 결합각을 조절하는 결합 발진기 배열을 연속적 역학 모델로 그 동작을 해석하였으며, 이는 결합 발진기 배열의 각 발진기의 위상을 배열이 놓인 방향의 1차원 공간과 시간의 연속 함수로 표현한 2차 편미분 방정식의 해를 구함으로써 가능해진다. 해는 지수 함수의 형태를 띠고 있어 결합각 조절이 있은 후 위상 분포가 고정되기 까지 걸리는 settling time을 유도해 낼 수 있다.

위상에 대한 연속적 역학 방정식은 발진기의 색인  $i$ 를 그에 상응하는 배열이 놓인 방향의 공간 변수  $x$ 에 대한 유한 차분 근사 (finite-difference approximation)를 통해 성립된다. 또한, 정상상태에서의 위상분포를  $x$ 에 관한 수식으로 정리하여 결합 발진기 배열의 빔 스캔 원리에 대한 직관적이 이해가 가능하게 함으로써, 결합 발진기 배열이 양 끝단에 위치한 결합회로의 결합각을 조절하여 만들어내는 선형적인 위상분포에 대한 고찰을 할 수 있었다. 정상상태에서의 결합 발진기 간 위상차는 배열의 크기와 결합각 조절 위치에 관계되며, 배열의 중간에 위치한 결합회로의 결합각 조절에 의한 효과도 볼 수 있었다.

본 논문의 결합각을 조절하는 결합 발진기 배열의 연속적 역학 모델은 몇 가지 가정에 바탕에 둔 이론적인 해석 모델이며, 이러한 해석 모델을 앞으로 최종 목표가 될 수 있는 2차원 결합 발진기 배열의 해석 및 설계에 활용하기 위해서는 정상상태에서의 발진기 간 위상차를 측정하는 실험을 통해서 이론적인 유효성이 입증되어야 한다. (그림 5)에 제작 예정인 2D 결합 발진기 배열의 회로를 보인다.



(그림 5) (a) 가운데 위치한 결합회로의 결합각을 조절하는 (b) 양 끝단에 위치한 결합회로의 결합각을 조절하는 2D 결합 발진기 배열

## 참고 문헌

- [1] A. H. Al-Ani, A. L. Cullen, and J. R. Forrest, "A Phase-Locking Method for Beam Steering of Active Array Antennas," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-22, pp. 698-703, June 1974.
- [2] K. D. Stephan, "Inter-Injection-Locked Oscillators for Power-Combining and Phased Array," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-34, pp. 1017-1025, Oct. 1986.
- [3] R. A. York, "Nonlinear analysis of phase relationships in quasi-optical oscillator arrays," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 41, pp. 1810-1815, Oct. 1993.
- [4] P. Liao and R. A. York, "A new phase shifterless beam-scanning technique using arrays of coupled oscillators," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 41, pp. 1810-1815, Oct. 1993.
- [5] J. H. Hwang and N. H. Myung, "A new beam-scanning technique by controlling the coupling angle in a coupled oscillator array," *IEEE Microwave Guided Wave Lett.*, vol. 8, NO. 5, pp. 191-193, MAY 1998.
- [6] R. J. Pogorzelski, P. F. Maccarini, and R. A. York, "A Continuum Model of the Dynamics of Coupled Oscillator Arrays for Phase-Shifterless Beam Scanning," *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. 47, pp. 463-470, APRIL 1999.