

대용량 3차원 구조의 정전용량 계산을 위한 Fast Algorithm

김 한, 안 창 회
 영남대학교 전자정보공학부
 E-mail : chahn@yu.ac.kr

Fast Algorithm for the Capacitance Extraction of Large Three Dimensional Object

Han Kim, Chang Hoi Ahn
 School of EECS, Yeungnam University

Abstract

본 논문에서는 수 만개이상의 미지수를 필요로 하는 복잡한 3차원 구조에서의 정전용량 추출을 위한 고속화 알고리즘(Fast mutilpole method)과 결합한 효과적인 적응 삼각요소 분할법(Adaptive triangular mesh refinement algorithm)을 제안하였다. 요소세분화과정은 초기요소로 전하의 분포를 구하고, 전하밀도가 높은 영역에서의 요소세분화를 수행하여 이루어진다. 제안된 방법을 이용하여 많은 미지수를 필요로 하는 IC packaging 구조에서의 정전용량을 추출하였다.

I. 서론

최근에 수요가 급증하고 있는 RFIC의 사용주파수가 증가하고 소형화됨에 따라 IC package의 설계를 위한 정전용량의 추출에 많은 관심이 모아지고 있다. 임의의 3차원구조에서의 정전용량의 계산에 있어서 널리 사용되고 있는 수치해석 방법들은 모멘트법(MOM), 유한요소법(FEM), 그리고 경계요소법(BEM)과 같은 방법들이 사용되어졌다. 특히, 많은 미지수를 요구하는 복잡한 3차원 구조에서의 정전용량 계산에서는 모멘트법의 고속화 알고리즘(FMM)이 효과적으로 적용되어 왔다[1~3].

고속화 알고리즘에 의한 정전용량의 계산시간은 이전의 다른 방법들에 비해 효율적임에도 불구하고 평범한 균일 요소 분할로는 구조에 비례하여 기하급수적으로 늘어가는 수많은 미지수들로 인하여 컴퓨터의 계산시간이나 메모리의 한계를 고려한다면 실제적으로 복잡한 3차원 구조의 정전용량의 계산을 개인용 컴퓨터에서 수행하기는 어렵다.

따라서, 요소들의 최적화 분포를 통한 미지수를 줄이는 노력이 필요한데 이를 위한 적응요소분할법과 결합된 고속화 알고리즘의 적용 예는 그 필요성에 비해 드물게 발표되고 있다[4,5]

본 논문에서는 고속화 알고리즘과 결합에 적합한, 과다한 컴퓨터 추가 계산을 요구하지 않는 효율적인 적응 표면요소 분할법을 제안하였다. 또한 이 알고리즘을 이용하여 도체에서의 실제적인 전하의 물리적 분포에 적합한 요소를 생성함으로써 복잡한 3차원 구조에서의 효율적인 정전용량 계산을 행하였다.

II. 계산이론 및 Fast algorithm

먼저, 자유공간 내에서의 n 개의 도체를 생각해보자. 이들 도체에 대하여 만족하는 식은

$$\hat{q} = C\hat{p}, \quad (1)$$

이다. 여기서, C 는 정전용량행렬이며, \hat{q} 와 \hat{p} 는 각각 m 개의 도체에서의 각 도체당 총 전하량과 포텐셜 값을 나타내는 벡터이다.

정전용량 행렬에서의 j 번째 열을 계산하기 위하여 j 번째 도체에만 1[V]를 인가하고 나머지 모든 도체는 0[V]로 둔 상태에서 각 도체당 총 전하량을 구하면 그것이 바로 정전용량 행렬의 j 번째 열이 된다. 주어진 포텐셜에 대하여 각 도체당 전하량 분포를 구하기 위한 식은

$$\phi(x) = \int_{\text{surface}} G(x, x') \sigma(x') da \quad (2)$$

이다. 여기서, σ 는 도체표면에서의 전하밀도이며, x, x' 는 3차원 공간의 점이다. 그리고, G 는 $1/4\pi\epsilon_0 \|x-x'\|$ 로 정의되는 자유공간에서의 그린함수이며, ϕ 는 아는 값으로서 도체표면에서의 포텐셜값을 나타낸다. i 번째 도체에서의 총 전하량은 면전하밀도 σ 에 관한 식으로 나타낼 수 있다.

$$Q_i = \int_{i \text{ th conductor's surface}} \sigma(x') da' \quad (3)$$

식 (2)을 풀기 위한 여러 가지 방법들이 있는데 본 연구에서는 도체표면을 요소로 분할하고, 고속화 알고리즘을 이용하여 풀었다. 이 경우, 전하는 전체 해석영역이 아니라 도체의 표면에서만 존재한다고 가정한다. 따라서, 그린함수의 적분도 도체표면에서의 전하량과 포텐셜의 관계에 의한 것이다.

각 도체의 면을 각각 작은 요소로 분할하여 전체 요소의 수를 n 개로 만든 후 각 요소 k 에서의 포텐셜은 전체 요소에서의 전하분포에 의한 영향의 합으로서 정의한다. 여기서, 임의의 요소 k 에서의 포텐셜 ϕ_k 는

$$\phi_k = \sum_i \int_{\text{element}} \frac{\sigma_i(x')}{4\pi\epsilon_0 \|x'-x_k\|} da' \quad (4)$$

이다. x_k 는 요소 k 의 중점이며, x' 는 요소 i 표면에서의 위치를 나타낸다. 또한, 요소 k 에서의 포텐셜 ϕ_k 는 중점에서의 값을 나타내며, $\sigma_i(x')$ 는 요소 i 표면에서의 면전하밀도를 나타낸다. 요소 k 에서의 포텐셜 ϕ_k 의 계산을 위해 1차 Collocation Method를 이용할 경우, 요소위에서의 면전하밀도는 상수값을 가진다고 가정하므로 식 (4)는

$$\phi_k = \sum_i \frac{q_i}{a_i} \int_{\text{element}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \|x'-x_k\|} da' \quad (5)$$

와 같이 된다. 여기서 a_i 는 요소 i 에서의 면적을 나타내고, 모든 요소 n 에 대하여 확장하여 생각할 때, 다음과 같은 선형 행렬식을 얻을 수 있다.

$$Pq = p \quad (6)$$

위의 식에서, $P \in R^{n \times n}$, $q \in R^n$ 그리고 $p \in R^n$ 로 정의할 수 있으며,

$$p_M = \frac{1}{a_i} \int_{\text{element}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 \|x'-x_k\|} da \quad (7)$$

이다. 식 (6)에 언급한 q 와 p 는 도체에서의 전하와 포텐셜이 아니라 요소에서의 전하와 포텐셜을

의미하며, 식 (6)의 행렬 방정식을 풀어서 구한 q 값으로 정전용량 행렬의 값을 구할 수 있다. 정전용량 행렬의 j 번째 항은

$$C_{ij} = \sum_{k \in \text{conductor}_j} q_k \quad (8)$$

가 된다.

복잡한 3차원 구조에서의 정전용량의 계산을 위해 요구되어지는 요소의 수가 매우 많다면 식(6)의 선형 행렬식을 풀기 위해서는 고속화 알고리즘의 적용이 필요하다. 고속화 알고리즘의 주요개념은 멀리 떨어져 있는 요소끼리의 상호작용의 세기는 서로 가까이 있는 요소끼리의 상호작용의 세기에 비해 작다라는 것을 바탕으로 하고 있다. 일반적으로 상호작용의 세기는 두 요소사이의 거리에 반비례한다. 멀리 떨어져 있는 요소들을 그룹으로 만들어 계층적으로 구성함으로써 상호작용의 수를 줄이는 방법을 사용하는 것이다.

고속화 알고리즘을 간략히 설명하면 다음과 같다. d 개의 요소그룹에서의 전하에 의한 멀리 떨어져 있는 i 번째 요소의 중점 (r_i, θ_i, ϕ_i) 에서의 포텐셜은 다음과 같은 truncated multipole expansion에 의해서 표현되어 진다.

$$\phi(r_i, \theta_i, \phi_i) \approx \sum_{n=0}^l \sum_{m=-n}^n \frac{M_n^m}{r_i^{n+1}} Y_n^m(\theta_i, \phi_i) \quad (9)$$

여기서, $Y_n^m(\theta_i, \phi_i)$ 는 surface spherical harmonics이다. M_n^m 는 d 개의 요소들의 전하에 의한 multipole 계수이다. l 은 expansion order이다. Multipole 계수 M_n^m 은

$$M_n^m = \sum_j^d q_j \rho_j^n Y_n^m(\alpha_j, \dots) \quad (10)$$

이다. 여기서, ρ_j, α_j, \dots 는 j 번째 전하의 구좌표이다. 이렇게 구해진 multipole 계수는 다른 요소들의 포텐셜 계산에도 쓰여진다. Local expansion은 multipole expansion과 일반적으로 매우 유사하게 표현되어 진다[5]. 이들 multipole expansion과 local expansion을 이용하여 n 개 요소의 전하로부터 n 개 요소의 포텐셜을 구하기 위한 고속화 알고리즘을 적용하여 식(6)의 선형 행렬식을 계산한다.

III. 적용 삼각요소 분할법

모멘트법에 의한 임의의 3차원 도체에서의 정전

용량 계산에 있어서 일반적으로 사용되어지는 평범한 균일 요소로는 전하의 실제적인 물리적 분포에 적합한 계산을 수행하기 어렵고 계산시간과 메모리 면에서 매우 비효율적이다. 따라서, 요소들의 최적화 분포를 통한 미지수를 줄이는 노력이 필요한데, 본 논문에서는 이를 위한 고속화 알고리즘과 결합된 효과적인 적용요소분할법을 제안한다.

먼저, 제안된 알고리즘의 개략적인 과정은 다음과 같다. 초기 격자의 분할이 이루어진 후에 고속 알고리즘에 의한 전하밀도 계산이 수행되고, 정전용량이 구해진다. 그 후에 전하밀도가 상대적으로 높은 영역에서의 Delaunay 분할법에 의해서 요소가 세분화되고, 요소 질 개선에 의한 부드러운 요소분포가 형성된다. 다시 정전용량의 계산되며, 이와 같은 과정이 반복된다.

전하분포에 따른 적용요소분할법의 설명을 위해 그림 1의 Air-bridge line의 정전용량 계산의 경우를 예로서 살펴보자. 영역1은 전압이 인가된 1번 도체에서의 모서리 부분에 전하가 집중됨을 나타내고 있고, 영역2와 영역3은 1번 도체와 인접한 도체의 부분에서 전하가 집중됨을 보여준다. 따라서, 이들 전하가 집중되는 부분에 요소세분화가 수행되어야 한다. 또한, 여러 도체에서의 정전용량 행렬을 모두 구하기 위해서는 각 도체에 번갈아 1[V]의 전압을 인가될 때마다 나타나는 전하분포에 적합한 요소세분화가 수행되어야 한다.

그림 2는 선택된 영역에서의 요소세분화과정을 나타낸다. 요소 A가 요소세분화를 위하여 선택되었다면 삼각요소의 세 변의 중점을 새로운 노드로 하여 요소세분화가 이루어진다. 또한, 요소 질의 개선을 통한 요소 A 주위 영역의 세분화로 이어진다.

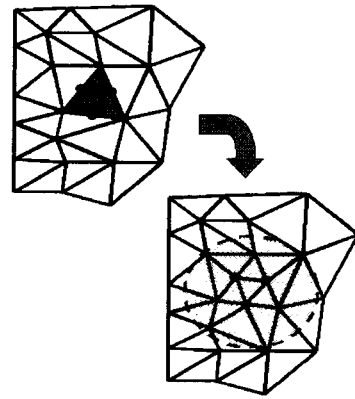


그림 2 선택된 영역에서의 Delaunay 분할법에 의한 요소세분화

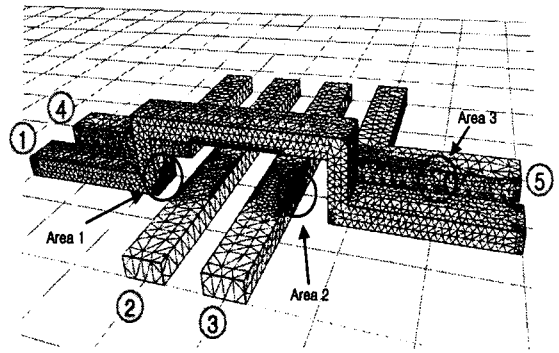


그림 3 Air-bridge line에서의 적용요소분포

그림 3은 그림 1의 Air-bridge line의 전하밀도 분포에 적합한 개선된 표면요소의 분할된 모습을 보여주고 있다.

V. 계산결과 및 결론

본 논문에서 제안한 방법을 평가하기 위해 많은 미지수를 필요로 하는 그림 4와 같은 68-pin cerquad package의 각 pin에서의 정전용량을 구하여 보았다.

그림 4는 전체 pin에서의 전하밀도의 분포를 나타낸 것이며, 아래의 그림은 전압이 인가된 pin주위에서의 전하밀도분포를 확대하여 나타낸 것이다. A번 pin에 1[V]가 인가되었을 때의 B번과 C번 pin에서의 전하의 집중을 보여주고 있으며, 이들 pin 내부에서는 모서리부분에서 전하가 조밀하게 분포된

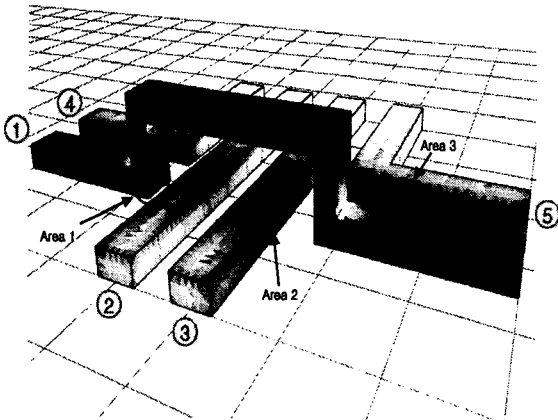


그림 1 Air-bridge line에서의 전하밀도분포

것을 알 수 있다. 그림 5는 전체 pin에서의 요소분포를 나타낸 것이며, 아래쪽 그림은 전압이 인가된 pin 주위에서의 요소분포를 확대하여 나타낸 것이다. 앞서 계산한 전하분포에 적합한 적용요소가 생성된 것을 보여준다.

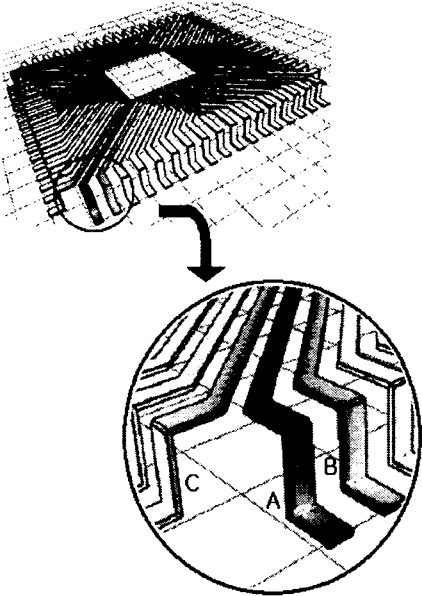


그림 4 68-pin cerquad package에서의 전하밀도분포

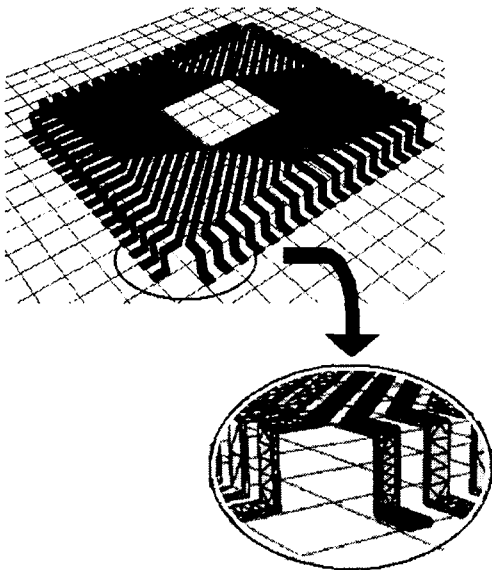


그림 5 68-pin cerquad package에서의 적용요소분포

그림 6은 1번 pin에 1[V]를 인가하여 구한 상호정전용량을 나타낸 것이다. pin의 번호는 A번 pin을 1번으로 하여 반시계 방향으로 번호를 정의하였다. 그림 7은 8번 pin에 1[V]를 인가하여 구한 상호정전용량 값이다. 그림 8은 균일한 요소분할의 경우와 적용요소분할의 경우에서의 A번 pin과 B번 pin 사이의 상호정전용량의 수렴을 비교하였다. 적용요소분할에 의해 정전용량을 계산한 경우, 약 50%정도의 요소수로도 같은 결과 값을 얻을 수 있었다.

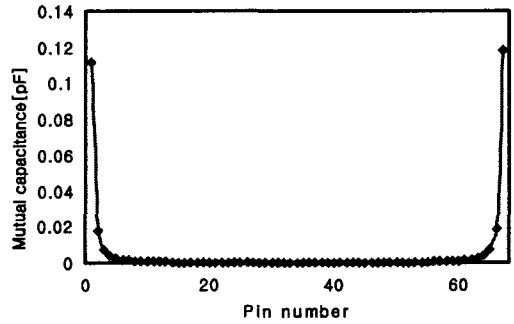


그림 6 Pin당 상호정전용량

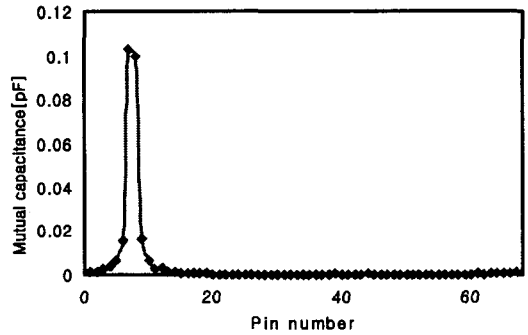


그림 7 Pin당 상호정전용량

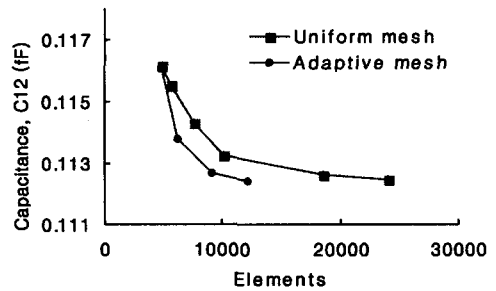


그림 8 상호정전용량의 수렴도

	Uniform Mesh	Adaptive Mesh
C12 [pF]	0.11245	0.11247
Elements	24104	12164
CPU times[sec] (on P-III 800MHz)	4236.6	95

표 1 CPU times

표 1은 균일한 요소분할의 경우와 적응요소분할의 경우에서의 컴퓨터 계산시간을 비교하였다. 균일한 요소에 의한 정전용량 계산시간에 비하여 적응요소분할에 의한 경우가 훨씬 빠름을 알 수 있다.

본 논문에서는 대용량 3차원 구조에서의 정전용량 계산을 위한 고속화 알고리즘과 결합한 적응 삼각요소 분할법을 제안하였고, 제안된 방법을 이용하여 68-pin cerquad package와 같이 복잡한 3차원 구조에서의 전하분포와 정전용량을 계산하여 빠른 수렴을 얻었다. 따라서, 제안된 적응요소분할법과 Fast algorithm을 이용하면 보다 복잡한 구조의 정전용량 계산도 소규모 개인용 컴퓨터에서 수행할 수 있다.

Reference

- [1] K. Nabors, S. M. Kim, and J. White, "Fast capacitance extraction of general three-dimensional structures," *IEEE Trans. on MTT*, Vol.40, pp.1496-1506, July 1992.
- [2] J. Dull, K. Gllivan, J. M. Song and W. C. Chew, "Parallel fast multipole capacitance solver," *IEEE Trans. on Antennas and propagation society international symposium 1998*, *IEEE*, Vol.3, pp. 1766-1769, Feb. 1998.
- [3] Y. C. Pan and W. C. Chew, "A fast multipole- method-based calculation of the capacitance matrix for multiple conductors above stratified dielectric media," *IEEE Trans. on MTT*, Vol.49, pp.480-490, March 2001.
- [4] J. Tausch and J. White, "Mesh refinement strategies for capacitance extraction based on residual errors," *Electrical Performance of Electronic Packaging, IEEE 5th Topical Meeting*, 1996.
- [5] H. Kim and C. H. Ahn, "MLFMA for capacitance extraction using adaptive triangular mesh," *JKEES*, vol. 1, no. 1, May 2001.