

# Buffer와 기계수를 동시에 고려한 생산라인의 생산율에 관한 연구

표정호 · 김경섭

## Study for Production Rate of Flow Line with multi-machines and buffer

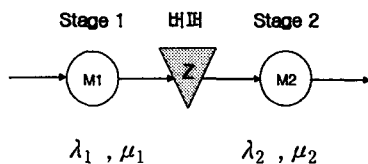
Jeong-Ho Pyo · Kyung Sup Kim

### 요 약

생산라인에서 시스템의 생산율을 높이기 위해서는 각 Stage에 새로운 기계를 추가하거나, 버퍼를 설치할 수 있다. 새로운 기계를 추가하게 되면, 그 Stage의 생산속도를 증가시켜 전체 시스템의 생산율을 높일 수 있고, 버퍼를 설치하게 되면 Starvation과 Blocking을 줄여 생산율을 높일 수 있다. 본 연구에서는 각 Stage에서 고장과 수리가 확률적으로 발생하는 여러 대의 기계가 있고, 유한한 용량의 버퍼가 있을 때, 전체 시스템의 생산율을 구하는 방법을 제안한다.

### 1. 서론

[그림 1] 같이 2단계 동기생산라인에서 각 Stage에 단일 기계가 있는 문제의 경우를 보자. 각 Stage에 있는 기계가 확률적인 값으로 고장과 수리율을 가지고 있고, 각 Stage 사이에는 일정한 용량의 버퍼를 가지고 있다. 이 때, 입력요소로 원자재는 무한히 있는 것으로 가정한다.



[그림 1] 2단계 단일 기계 생산라인

여기서, 수요가 두 배로 증가하여 생산율도 두 배로 증가시켜야 할 경우를 생각해 보자. 생

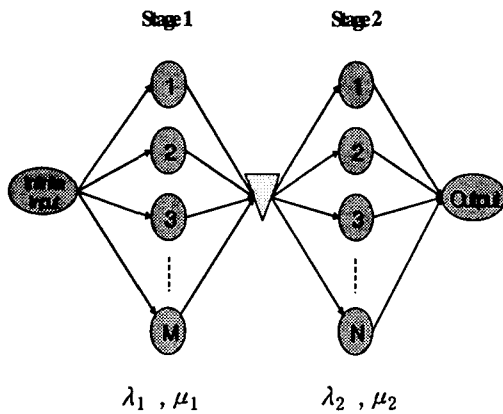
산율을 두 배로 증가시킬 때, 쉽게 생각할 수 있는 대안으로는 현재 생산라인을 똑같이 하나 더 만드는 경우를 생각할 수 있다. 생산라인을 새롭게 하나 더 만들 경우, 생산율은 당연히 두 배로 증가할 것이다.

이 때, 각각의 Stage에 기계를 한 대씩 추가시키고, 버퍼도 두 배로 증가시킬 경우를 생각해 보자. 이렇게 하면 생산라인을 두 배로 증가시킨 경우와 비교할 때, 버퍼의 이용적 측면에서만 차이점이 있다. 즉, 전자의 경우는 개별적인 생산라인에서 개별적인 버퍼를 가지는데, 후자의 경우는 각 Stage에 있는 기계들이 버퍼를 공유한다는 차이점이 있다. 대기이론을 생각하면, 버퍼를 공유하는 쪽이 개별적인 버퍼보다 더 유용하다는 것을 알 수 있는데, 버퍼의 용량이 제한적일 경우 일반적인 대기모델과는 차이가 있다.

경영자 입장에서 볼 때, 생산라인을 하나 더 만드는 경우와 각 Stage에 기계와 버퍼를 추가

\* 연세대학교 산업시스템공학과

시킬 경우, 각각의 제약사항이나 비용적인 측면을 고려할 때, 생산율의 차이를 알면 의사결정의 중요한 판단요소로 작용할 수 있을 것이다. 그래서, 버퍼를 공유했을 때 전체 시스템의 생산율과 버퍼의 평균적인 재고수준을 마아코프 분석을 이용하여 수리적인 식을 세우고 그 수식이 잘 맞는지 시뮬레이션을 통해서 검증하도록 하겠다.



[그림 2] 2단계 멀티기계 생산시스템

### 2.1 마아코프 상태 확률의 정의

마아코프 체인의 상태를  $(i, j, x)$ 라고 하자.

$P(i, j, x)$  = 시스템이 현재의 상태가

$i, j, x$ 가 될 확률

$i$  = 첫 번째 Stage에 가동 중인 기계의 수

$j$  = 두 번째 Stage에 가동 중인 기계의 수

$x$  = 첫 번째 Stage와 두 번째 Stage

사이에 있는 버퍼의 재고수준

$(0 \leq x \leq Z)$

$Z$  = 버퍼의 최대 수용 용량

$n$  = stage,  $n=1,2$

$\lambda_n$  =  $n$ 번 째 Stage에 있는 기계의 고장율

$\mu_n$  =  $n$ 번 째 Stage에 있는 기계의 수리율

$M$  = 첫 번째 Stage에 있는 기계의 수

$N$  = 두 번째 Stage에 있는 기계의 수

### 2.2 마아코프 상태 전이가 가능 여부

마아코프 과정에서 안정상태 확률을 구할 때, 발생할 가능성이 전혀 없는 것에 대해서는 고려를 하지 않기 위해서, 현재의 버퍼의 재고 상태와 각 Stage에 가동 중인 기계의 수를 고려하여 다음의 상태변화가 어떠한 것들이 가능한 것인지 그리고 어떠한 것은 불가능한 것인지 미리 구분하였다.

$$f(i \rightarrow i', j \rightarrow j', x \rightarrow x')$$

= 1, 상태전이 가능할 때

= 0, 상태전이 불가능 일 때 ... (3)

이것을 좀 더 상세히 표시하면 다음과 같다. 다음과 같다.

#### ① Not Blocking, Not Starvation인 경우

if,  $x+i-j=x'$  Then

$$f(i \rightarrow i', j \rightarrow j', x \rightarrow x') = 1$$

Else  $f(i \rightarrow i', j \rightarrow j', x \rightarrow x') = 0$

#### ② Blocking이 일어난 경우

if,  $x+i-j > Z$  and  $x=Z$  Then

$$f(i \rightarrow i', j \rightarrow j', x \rightarrow x') = 1$$

Else  $f(i \rightarrow i', j \rightarrow j', x \rightarrow x') = 0$

#### ③ Starvation이 일어난 경우

if,  $x+i-j < 0$  and  $x=0$  Then

$$f(i \rightarrow i', j \rightarrow j', x \rightarrow x') = 1$$

Else  $f(i \rightarrow i', j \rightarrow j', x \rightarrow x') = 0$

#### ④ 나머지 경우

$$f(i \rightarrow i', j \rightarrow j', x \rightarrow x') = 0$$

### 2.3 마아코프 전이 확률

마아코프 전이 확률은 각 Stage에 있어 초기 상태에서 가동 중인 기계 수와 변화된 상태에서

가동중인 기계 수의 변화를 고려하여 확률 값을 구하고,  $\ell(i \rightarrow i', j \rightarrow j', x \rightarrow x')$ 을 곱하여 나타내었다.

$$\begin{aligned}
 & P(i \rightarrow i', j \rightarrow j', x \rightarrow x') \\
 &= {}_i C_a \lambda_1^a (1 - \lambda_1)^{i-a} \\
 &\times {}_{M-i} C_b \mu_1^b (1 - \mu_1)^{M-i-b} \\
 &\times {}_j C_c \lambda_2^c (1 - \lambda_2)^{j-c} \\
 &\times {}_{N-j} C_d \mu_2^d (1 - \mu_2)^{M-j-d} \\
 &\times \ell(i \rightarrow i', j \rightarrow j', x \rightarrow x') \quad \dots\dots (4)
 \end{aligned}$$

- $a$  : Stage 1에서 고장난 기계의 수
- $b$  : Stage 1에서 수리된 기계의 수
- $c$  : Stage 2에서 고장난 기계의 수
- $d$  : Stage 2에서 수리된 기계의 수

### 2.4 안정상태 방정식

마야코프 전이 확률이 정의되었다. 시스템이 어느 정도 시간이 흐른 뒤, 일반적인 시스템에 대한 상태 확률값은 마야코프 분석과정에서 안정상태 확률을 이용하여 구할 수 있는데, 이것은 안정상태 방정식을 이용하여 구할 수 있다. 안정상태 방정식은 버퍼의 상태에 따라, 다음과 같이 구분하여 표현할 수 있다.

① Starvation이나 Blocking이 일어나지 않은 경우

$$\begin{aligned}
 & P(i', j', x') = \sum_{i=i'-1}^M \sum_{j=j'-1}^N \sum_{x=0}^Z P(i, j, x) \\
 &\times {}_i C_a \lambda_1^a (1 - \lambda_1)^{i-a} \\
 &\times {}_{M-i} C_b \mu_1^b (1 - \mu_1)^{M-i-b} \\
 &\times {}_j C_c \lambda_2^c (1 - \lambda_2)^{j-c} \\
 &\times {}_{N-j} C_d \mu_2^d (1 - \mu_2)^{M-j-d} \\
 &\times \ell(i \rightarrow i', j \rightarrow j', x \rightarrow x') \quad \dots\dots (5)
 \end{aligned}$$

이 때,  $x + i - j = x'$ ,  $0 < x' < Z$

②  $x$ (버퍼의 재고수준) =  $Z$  or Blocking이 일어난 경우

$$\begin{aligned}
 & P(i', j', Z) = \sum_{i=i'-1}^M \sum_{j=j'-1}^N \sum_{x=0}^Z P(i, j, x) \\
 &\times {}_i C_a \lambda_1^a (1 - \lambda_1)^{i-a} \\
 &\times {}_{M-i} C_b \mu_1^b (1 - \mu_1)^{M-i-b} \\
 &\times {}_j C_c \lambda_2^c (1 - \lambda_2)^{j-c} \\
 &\times {}_{N-j} C_d \mu_2^d (1 - \mu_2)^{M-j-d} \\
 &\times \ell(i \rightarrow i', j \rightarrow j', x \rightarrow Z') \quad \dots (6)
 \end{aligned}$$

이 때,  $x + i - j \geq Z$

③  $x = 0$  또는 Starvation이 일어난 경우

$$\begin{aligned}
 & P(i', j', 0) = \sum_{i=i'-1}^M \sum_{j=j'-1}^N \sum_{x=0}^Z P(i, j, x) \\
 &\times {}_i C_a \lambda_1^a (1 - \lambda_1)^{i-a} \\
 &\times {}_{M-i} C_b \mu_1^b (1 - \mu_1)^{M-i-b} \\
 &\times {}_j C_c \lambda_2^c (1 - \lambda_2)^{j-c} \\
 &\times {}_{N-j} C_d \mu_2^d (1 - \mu_2)^{M-j-d} \\
 &\times \ell(i \rightarrow i', j \rightarrow j', x \rightarrow 0') \quad \dots (7)
 \end{aligned}$$

이 때,  $x + i - j \leq 0$

식 (5), (6), (7)에 해당하는 방정식을 연립해서 풀면, 각각의 상태에 대한 안정상태 확률값을 구할 수 있다.

### 3.1 안정상태 생산율

안정상태 생산율은 위에서 구한 안정상태 확률값을 이용해서 통계적인 평균값을 구하는 방법으로 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 & E_z = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \sum_{x=0}^Z n(j) \cdot P(i, j, x) \\
 &+ \sum_{j=1}^N \sum_{x=1}^Z n(j) \cdot P(0, j, x) \quad \dots (8)
 \end{aligned}$$

이 때,  $n(j)$  = 두 번째 Stage에 작업중인 작업물의 개수이다. 그런데, 여기서 두 번째 Stage

에 작업중인 작업물의 개수는 작동중인 기계수와는 다를 수 있기 때문에 그 값을 구하기 위해서는 좀 더 확실적인 계산이 필요하고 복잡하다. 그래서 다음과 같은 수정된 수식을 제안한다.

$$E_z = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \sum_{x=0}^Z MIN[j, x+i] \cdot P(i, j, x) + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N MIN[j, x+i] \cdot P(0, j, x) \quad \dots (9)$$

이 식은 식 (8)의  $n(j)$ 를  $MIN[j, x+i]$ 로 표현하여 나타냈다. 이것은 현재, 두 번째 Stage에서 가공중인 작업물의 수는 초기 상태에서의 첫 번째 Stage과 두 번째 Stage에서 작동중인 기계의 수와 초기상태의 버퍼의 재고 수준에 영향을 받고, 시스템의 상태가 바뀌었을 때 두 번째 Stage에서의 작동중인 기계수와 첫 번째 기계수에 버퍼 재고 수준을 더한 값을 비교하여 작은 값을 나타내도록 한 것이다. 이 값은 실제 모든 경우를 생각하면 수식에 맞지 않는 경우도 있는데, 극히 일부의 경우가 되고, 설령 그런 경우가 발생하더라도 확률값이 아주 작은 값이 되므로 무시하여 표현한 식이다.

### 3.2 버퍼의 평균재고수준

버퍼의 평균재고 수준도 안정상태 확률값을 이용하면 구할 수 있다. 버퍼의 재고 수준에 따라서, 버퍼 용량을 최대로 이용할 경우와 그렇지 않은 경우로 구분하여 평균값을 구하면 다음과 같다.

$$I_z = \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N \sum_{x=0}^Z xP(i, j, x) = \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N \sum_{x=1}^Z xP(i, j, x) + \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N ZP(i, j, Z) \quad \dots (10)$$

### 3.3 기본적인 제약식

각각의 선언한 변수와 확실적인 값들이 가져

야할 공통적인 제약식을 정리하면 다음과 같다.

$$\sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N \sum_{x=0}^Z P(i \rightarrow i', j \rightarrow j', x \rightarrow x') = 1 \quad (\text{for } \forall i, j, x) \quad \dots (10)$$

$$\sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N \sum_{x=0}^Z P(i', j', x') = 1 \quad (\text{for } \forall i', j', x') \quad \dots (11)$$

식 (10)은 초기 상태의 확률값의 합은 1이 되어야 한다는 식이고, (11)은 변화된 상태의 확률값 역시 합이 1이 되어야 한다는 식이다.

$$i - a + b = i' \quad \dots (12)$$

$$j - c + d = j' \quad \dots (13)$$

식 (12)와 식 (13)은 각 Stage에  $i(j)$ 대가 작동중인 상태에서  $a(c)$ 대가 고장이 나고  $b(d)$ 대가 수리가 되었을 때 성립하는 수식이다. 그 밖의 나머지 제약은 다음과 같다.

$$i \leq M, i' \leq M$$

$$j \leq N, j' \leq N$$

$$a, b, c, d, i, j, i', j' \geq 0$$

$$M, N \geq 1$$

$$0 \leq x \leq Z$$

$$Z \geq 0$$

## 4. 수식과 시뮬레이션의 결과비교

지금까지 세운 수식으로 생산율을 구했을 때, 얼마만큼 신뢰할 수 있는지 시뮬레이션을 통해 검증해 보았다. 샘플예제로 2단계 생산라인에서 각각의 Stage에 두 대의 기계가 있고, 가운데 버퍼의 용량을 2로 둔 경우에 대해서 시뮬레이션한 값과 수식을 이용한 값을 비교하였다. 시뮬레이션은 Arena 5.0 교육용 Version을 이용하여 모델링 하였다.

	기계수	고장율	수리율
Stage 1	2	0.01	0.2
Stage 2	2	0.02	0.1
버퍼용량	2		

위 데이터의 경우에 생산율의 비교를 하면 다음과 같다.

수식결과	시뮬레이션 결과
0.8089	0.8124

수식으로 구한 값과 시뮬레이션으로 구한 값이 약 0.003의 차이가 있었다.

기계의 수와 버퍼용량을 그대로 둔 상태로, 고장율과 수리율을 다음과 같이 바꿨을 경우, 수식으로 계산한 값과 시뮬레이션으로 구한 값을 비교해보았다.

n	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\mu_1$	$\mu_2$	생산율	
					수식	시뮬레이션
1	0.01	0.01	0.1	0.1	0.8407	0.8435
2	0.005	0.01	0.2	0.1	0.8940	0.9001
3	0.01	0.005	0.2	0.1	0.9143	0.9134
4	0.05	0.04	0.2	0.2	0.7137	0.7100
5	0.04	0.05	0.1	0.2	0.6258	0.6250

수식으로 구한 값과 시뮬레이션으로 나온 결과값이 어느 정도 비슷하게 나왔다는 것을 눈으로 확인할 수 있다. 그러면 통계적으로 적합한지 알아보자.

$X_1$  : 수식으로 구한 결과

$X_2$  : 시뮬레이션으로 나온 결과값

$$d = X_1 - X_2$$

$$\bar{d} = \sum_{i=1}^5 d_i / 5 = -0.007$$

$$S_D = \sqrt{\sum_{i=1}^5 (d_i - \bar{d})^2 / 4} = 0.0037993$$

귀무가설과 대립가설은 각각

$$H_0 : \delta = 0, H_1 : \delta \neq 0$$

이다. 기각역은 유의수준 5%에서

$$T = \left| \frac{\bar{D} - \delta_0}{S_D / \sqrt{n}} \right| > t \left( 4, \frac{0.025}{2} \right) = 2.766$$

$T = -0.08$  이므로 기각역에 속하지 않는다. 즉, 귀무가설을 채택하여, 수식으로 구한 값과 시뮬레이션으로 구한 값이 유의 수준 5%에서 동일하다고 할 수 있다. 그러나 표본의 수가 작기 때문에, 좀 더 많은 실험을 통해 좀 더 세밀한 적합도 검정이 필요하다고 본다.

## 5. 향후 연구방향

본 연구에서는 2단계 생산라인에서 버퍼와 기계수에 따른 생산율에 관한 연구를 하였다. 향후에는 Stage가 좀 더 많아질 경우

버퍼를 할당할 수 있는 양이 정해져 있을 때, 각 Stage 사이의 최적 버퍼할당 문제로 확장시킬 수 있다. 또한 이번 연구에서 수리율에 대한 값을 일괄적인 데이터로 주어졌을 때, 수리정책에 따른 생산율에 관한 연구도 확장시킬 수 있다.

한편, 현재의 생산율을 기존에 단일 기계에 대한 모델의 경우에 대해, Buzacot이 제안한 수식으로부터 발전된 형태의 수식이 나올 수 있을 것으로 본다. 이에 대한 연구도 진행되어야 될 것이다. 그러기 위해선 버퍼를 공유했을 때와 개별적인 버퍼의 효과보다 얼마만큼의 차이를 보이는지 통계적인 분석을 통해 알아보아야 할 것이다.

## 참고문헌

- 1) Deokhyun SEONG, "AN ALGORITHM FOR BUFFER ALLOCATION WITH LINEAR RESOURCE CONSTRAINTS IN A CONTINUOUS-FLOW UNRELIABLE PRODUCTION LINE" Asia-Pacific Journal of Operational Research Vol. 17, pp

- 169-180, 2000
- 2) Altiook, T. and S. Stidham, Jr., "The allocation of interstage buffer capacities in production lines", IIE Transactions vol 15 (4), pp 292-299, 1983
- 3) Hillier, F. S. and K. C. So, "The effect of the coefficient of variation of operation times on the allocation of storage space in production line system, IIE Transactions vol 17(2), pp 198-206, 1991
- 4) Jafri. M.A. and J. G. Shanthikumar, "Determination of optimal buffer storage capacities and optimal allocation in multistage automatic transfer lines, International Journal of Production Research vol 23(6), pp 1259-1270, 1989