한정고장집단의 출하품질 보증을 위한 샘플링검사방식 설계

권영일
청주대학교 산업정보시스템공학과

Abstract

A Bayesian acceptance sampling plan for limited failure populations are developed. We consider a situation where defective products have short lifetimes and non-defective ones never fail during the technological life of the products. An acceptance criterion which guarantees the out going quality of accepted products is derived using the prior information on the quality of lots submitted for inspection. Numerical examples are provided.

1. 서 론

IC(integrated circuits)를 비롯한 많은 전자부품이나 장치의 경우, 제조공정에서 오염된 불량품들은 짧은 수명을 갖는 반면 정상품들은 충분히 수명이 길어 그 제품의 기술적 수명(technological life) 내에 고장날 확률이 사실상 0 인 것으로 알려져 있다. 이와 같은 유형의 집단을 한정고장집단 (limited failure population) 이라 부른다. 이러한 제품집단에 대해 출하 전 샘플링검사 또는 전수선별시험을 실시하여 제품의 출검품질, 또는 신뢰도를 향상시키기 위한 다양한 시험방법들이 연구되어 왔다. 대표적인 선별시험방식들로는 Marcus 와 Blumenthal[1], Leemis 와 Beneke[2], Bai 와 Kwon[3], Mi[4], Chien 과 Kuo[5], 그리고 Kwon[6,7] 등의 연구결과들이 있다.

전수선별 시험방식의 경우 생산된 전 제품에 대해 일정기간 선별시험을 적용하게 되므로 시험 설비나 장치의 제한이나 시간적, 또는 경제적 제약으로 인해 그 적용이 쉽지 않은 경우가 많다. 한편 최근의 경향은 설계단계와 제조단계에서의 충분한 품질 및 신뢰성 확보를 통해 가능한 한 완성품에 대한 검사량을 줄여나가는 추세에 있다.

실제 생산공정에서 정상적으로 관리되는 생산공정으로부터 제조된 제품들은 불량률이 충분히 낮아 그대로 출하해도 좋은 수준의 품질을 유지하는 반면, 생산공정에 이상요인(assignable causes)이 발생한 상태에서 제조된 제품들의 불량률은 상대적으로 높은 경우를 흔히 접할 수 있다. 본 연구에서는 이와 같이 공정불량률이 일정하지 않은 공정으로부터 생산된 한정고장집단에 대한 합격여부를 판정하는 샘플링 검사방식을 설계하였다. 변화하는 공정불량률을 반영하기 위해 혼합

이항분포 (mixed binomial distribution)를 사전분포로 사용하였으며 합격된 제품들의 출하품질, 즉 평균 불량률을 보증하는 베이지안 샘플링 검사방식을 개발하였다.

2. 사전분포 및 수명분포

앞에서 언급한 바와 같이, 실제 생산공정의 불량률은 설비간의 차이, 원자재 공급원에 따른 변화 등에 따라 일정하다기보다는 변화한다고 보는 것이 더 현실적일 것이다. Case 와 Keats[8]는 이러한 상황에서 로트 내 불량품 수의 분포로서 혼합 이항분포가 적합하다고 제안하고 있다. 생산공정이 서로 다른 l 개의 불량률 수준에서 변화하며, 불량률 Pi (i=1,2,...,l) 에서 생산되는 제품의 비율이 w_i일 때, 크기 N의 로트 내에 포함된 불량품 수 D는 다음의 확률질량함수를 갖는 혼합이항분포를 따른다.

$$f(d)=\sum_{i=1}^{l} w_i \binom{N}{d} p_i^{d}(1-p_i)^{N-d}, \quad (1)$$

$$0\le p_i \le 1,\ \sum_{i=1}^{l} w_i=1,$$

$$d=0,1,2,\cdot\cdot\cdot,N.$$

불량품들의 수명분포는 알려져 있고, 정상품들은 그 제품의 기술적 수명 내에 고장날 확률이 0이라고 간주한다. 이러한 제품의 생산공정으로부터 제조된 크기 N의 로트로부터 크기 n의 샘플을 추출, 일정기간 시험하여 관측된 결과에 바탕하여 로트 내 나머지 N-n개 제품에 대한 합격여부를 결정한다. 불량품들의 수명분포함수를 $F(t)$, 크기 n의 샘플에 대한 시험에서 관측된 고장시간들을 관측 순서에 따라 $t_1\le t_2\le\cdot\cdot\cdot\le t_n$라 할 때 다음과 같이 변환된 고장시간

$$y_i=-\ln\{1-F(t_i)\} \quad (2)$$

포로부터의 순서통계량이 된다. 여기서는 모델의 단순화와 일반화를 위해 변환된 고장시 $y_1, y_2, \cdot\cdot\cdot, y_n$ 은 모수가 1인 지수분

활다 y_i를 사용하여 샘플링 검사방식을 설계

3. 샘플링검사의 설계

공정 불량률이 일정한 경우는 크기 n의 샘플 내 불량수와 나머지 로트(N-n개 제품) 내 불량수는 상관관계가 없으나(상관계수=0), 공정 불량률이 변하는 경우, 즉 혼합이항분포를 따르는 경우는 이들 두 수치가 양의 상관관계를 갖는다는 사실이 Case 와 Keats[8] 에 의해 밝혀져 있다. 이 사실은 공정불량률이 혼합이항분포를 따르는 경우 샘플의 시험결과를 활용하여 나머지 로트의 품질에 대한 선별이 가능함을 의미한다. 따라서 본 연구에서는 합격되어 출하되는 제품의 평균불량률을 보증하기 위한 다음과 같은 무고장 합격기준을 적용한 샘플링 검사방식을 설계한다:

크기 N의 로트로부터 크기 n의 샘플을 추출한다. 이들 n개의 제품을 동시에 시험하여 특정 시험시간 t 동안 고장이 없으면 나머지 로트를 합격시키고 그렇지 않으면 불합격시킨다.

먼저 크기 n의 샘플을 t동안 시험하여 관

측된 고장수가 r일 때, 나머지 로트(N-n개 제품) 내 불량수 w에 대한 조건부 확률 $g(w \mid r)$은 다음과 같이 구해진다.

$$g(w \mid r) = \frac{\binom{N-n}{w} \sum_{i=1}^{l} p_i^w q_i^{N-n-w} w_i p_i^r [q_i + p_i e^{-t}]^{n-r}}{\sum_{i=1}^{l} w_i p_i^r [q_i + p_i e^{-t}]^{n-r}},$$

$$\text{단 } q_i = 1 - p_i, \quad w = 0, 1, 2, \cdot\cdot, N-n. \qquad (3)$$

위 확률식을 사용하여 시험시간 t동안 샘플에서 관측된 고장 수가 r일 때 나머지 로트에 대한 평균 불량률 $\overline{p_r}$ 을 구하면

$$\overline{p_r} = E\left[\frac{w}{N-n} \mid r\right]$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{l} w_i p_i^{r+1} [q_i + p_i e^{-t}]^{n-r}}{\sum_{i=1}^{l} w_i p_i^r [q_i + p_i e^{-t}]^{n-r}} \qquad (4)$$

으로서 n, t, r의 함수로 나타남을 볼 수 있다.

여기서 앞에서 언급한 무고장 합격기준 ($r=0$)을 적용할 때의 평균불량률 $\bar{p}$는

$$\bar{p} = \frac{\sum_{i=1}^{l} w_i p_i [q_i + p_i e^{-t}]^n}{\sum_{i=1}^{l} w_i [q_i + p_i e^{-t}]^n} \qquad (5)$$

이 된다.

따라서 합격된 제품들의 평균불량률이 p^* 이하임을 보증하는 샘플링 검사방식의 설계 문제는 샘플크기가 n일 때

$$\bar{p} \le p^* \qquad (6)$$

를 만족하는 최단 시험시간 t^*를 결정하는 문제가 된다. 즉 $\bar{p} = \phi(t)$라 둘 때 $\phi(t) < p^*$인 최소 t가 t^*가 된다. 다음의 정리는 주어진 샘플크기가 n일 때의 합격판정기준을 구하는데 도움이 되는 결과를 제공한다.

정리 1. 주어진 샘플크기 n 에 대해 $\bar{p} \le p^*$를 만족하는 판정기준은 다음과 같다:

i) $\phi(0) = \sum_{i=1}^{l} w_i p_i < p^*$이면 $t^*=0$, 즉 시험 없이 로트를 합격시킨다.

ii) $\phi(\infty) = \frac{\sum_{i=1}^{l} w_i p_i q_i^n}{\sum_{i=1}^{l} w_i q_i^n} \ge p^*$ 면 $\phi(t) < p^*$를 만족하는 t가 존재하지 않는다.

iii) $\phi(\infty) < p^* < \phi(0)$ 면 $\phi(t^*) = p^*$를 만족하는 유일한 t^*가 존재한다. 크기 n의 샘플로 동시에 시험을 시작하여 t^*동안 고장이 없으면 로트를 합격시키고 하나 이상의 고장이 발생하면 로트를 불합격시킨다.

증명. $$\phi(t=0) = \frac{\sum_{i=1}^{l} w_i p_i}{\sum_{i=1}^{l} w_i} = \sum_{i=1}^{l} w_i p_i. \qquad (7)$$

$$\phi(t=\infty) = \frac{\sum_{i=1}^{l} w_i p_i q_i^n}{\sum_{i=1}^{l} w_i q_i^n}, \qquad (8)$$

이고 $\phi(t)$는 t의 단조감소함수이다. 따라서 위의 정리가 성립한다.

정리 1의 내용은 다음과 같다:

i) 먼저 $\phi(0)=\sum_{i=1}^{l} w_i p_i$는 현재 공정의 평균 불량률을 나타낸다. 따라서 공정평균불량률이 p^*보다 작을 경우 검사 없이 모든 로트를 합격시키더라도 합격된 로트의 평균불량률 $\overline{p}$ 역시 $\overline{p} \leq p^*$를 만족한다.

ii) 샘플 크기가 n일 때

$\phi(\infty)=\dfrac{\sum_{i=1}^{l} w_i p_i q_i^n}{\sum_{i=1}^{l} w_i q_i^n} \geq p^*$이면 임의의 시험기간 $0 \leq t < \infty$에 대해 합격된 로트의 평균 불량률은 항상 p^*를 초과하므로 $\phi(t) < p^*$를 만족하는 t가 존재하지 않는다. 이때는 검사 후 평균불량률이 p^* 이하가 되는 조건을 만족시키기 위해 샘플 크기를 증가시키거나 전수선별시험의 적용을 고려할 수 있다.

iii) $\phi(\infty) < p^* < \phi(0)$이면 $\phi(t^*)=p^*$를 만족하는 유일한 t^*가 존재하며, 크기 n의 샘플로 동시에 시험을 시작하여 t^*동안 고장이 없으면 로트를 합격시키고, 하나 이상의 고장이 발생하면 로트를 불합격시킴으로써 검사 후 합격된 로트의 평균불량률이 p^*이하가 되도록 보증할 수 있다.

다음 여기서 구한 샘플링 검사방식을 적용할 경우 로트의 합격확률을 구해보기로 하자. 먼저 크기 n의 샘플로 시험을 시작하여 시간 t 동안의 고장수 R의 확률질량함수 $g_n(r)$은 다음과 같이 구해진다.

$$g_n(r)=\sum_{i=1}^{l} w_i \binom{n}{r} [p_i(1-e^{-t})]^r [q_i+p_i e^{-t}]^{n-r} \quad (9)$$

공정불량률의 사전분포가 혼합이항분포를 따르는 생산공정으로부터 제조된 로트에 대해 제시된 샘플링검사방식을 적용할 때, 합격판정기준은 (9)식에서 $r=0$인 경우에 해당하므로 로트의 합격확률 P_a는

$$P_a=\sum_{i=1}^{l} w_i [q_i+p_i e^{-t}]^n \quad (10)$$

이 된다.

4. 예제

공정불량률이 모수가 $p_1=0.0001$, $p_2=0.01$, $w_1=0.9$, $w_2=0.1$인 혼합이항분포를 따르는 공정으로부터 크기 N=10,000의 로트 단위로 제품이 생산되는 상황을 생각해 보자. 여기서 합격된 로트의 평균 불량률을 $p^*=0.0005$ 이하로 보증하는 샘플링 검사방식을 설계해 보기로 한다.

먼저 검사 전 평균불량률은

$$\phi(0)=\sum_{i=1}^{2} w_i p_i=0.00109$$

로서 보증하고자 하는 평균불량률 $p^*=0.0005$를 초과하고 있다. 따라서 합격된 로트들에 대해 불량률 0.0005를 보증하기 위해서는 불량률이 낮은 로트만을 선별해서 합격시킬 수 있는 샘플링 검사방식이 필요하다. 샘플의 크기는 샘플크기 n과 시험시간 t^*에 따른 총 시험비용을 고려하여 결정하는 방안과 시험장비 수나 시험시간에 대한 제약을 고려하여 결정할 수도 있겠다. 예로서 n=100인 경우에 대해 앞에서 구한 샘플링검사방식을 적용하면 t^*=3.71, Pa=0.93이 얻어진다.

불량품들의 수명이 형태모수가 β=2.0, 척도모수가 θ=100시간인 와이블 분포를 따른다고 할 때, 크기 n=100의 샘플로 시험할 경우 실제 시험시간 T^*는 식 (2)로부터 다음과 같이 구해진다.

먼저 와이블 분포의 분포함수

$$F(t) = e^{-\left(\frac{t}{\theta}\right)^{\beta}} \tag{11}$$

를 식(2)에 대입하면

$$t^{*} = -\ln\{1 - F(T^{*})\} \tag{12}$$

에서

$$T^{*} = \theta\, t^{*\frac{1}{\beta}} = 100(3.71)^{\frac{1}{2.0}} = 192.6\text{시간}$$

이 얻어진다. 즉 로트로 부터 추출된 크기 100의 샘플에 대해 192.6시간 동안 시험하여 고장이 없으면 로트를 합격시키고 1개라도 고장이 발생하면 로트를 불합격시킨다. 이 때 검사를 위해 제출된 전체 로트들의 합격확률은 93%이며, 합격된 로트들의 평균 불량률은 $p^{*}=0.0005$ 이하로 유지된다.

5. 결론

제조공정에서 결함을 지닌 불량품만 조기에 고장을 일으키고 정상 품은 고장 확률이 0인 제품집단에 대한 베이지안 샘플링 검사방식을 개발하였다. 불량품의 수명분포는 알고 있다고 가정하였다. 공정 불량률이 변화하는 경우에 적합한 혼합이항분포를 사전분포로 사용하였으며, 합격된 로트의 평균불량률을 보증하는 샘플링검사방식을 유도하고, 예제를 통해 제시된 샘플링 검사방식에 따른 시험의 설계과정을 보여주었다. 여기서 개발된 샘플링 검사방식은 변환된 고장시간을 사용함으로써 다양한 수명분포에 적용될 수 있다는 장점을 갖는다.

참고문헌

1. Marcus, R., and Blumenthal, S. "A sequential screening procedure", *Technometrics*, 16, 2, pp.229-234, 1974.
2. Leemis, L.M., and Beneke, M. " Burn-in models and methods : A review" , *IIE Trans.*, 22, 2, pp.172-180, 1990.
3. Bai, D.S., and Kwon, Y.I. "An economic sequential screening procedure for limited failure population", *Naval Research Logistics*, 41, pp.523-535, 1994.
4. Mi, J. "Warranty policies and burn-in" , *Naval Research Logistics*, 44, pp.199-209, 1997.
5. Chien, W.K., and Kuo, W. "A nonparametric Bayes Approach to decide system burn-in time", *Naval Research Logistics*, 44, pp.655-671, 1997.
6. Kwon Y.I. "A Bayesian Burn-in Procedure Guaranteeing Outgoing Quality of a Product", *Journal of the Korean Society for Quality Management*, Vol. 28, No. 4, pp.67-74, 2000.
7. Kwon Y.I. "A Reliability Screening Procedure for Zero Defective Quality assurance", *J. Ind. Sci.*, Chongju Univ., Vol. 18, No. 1, 2000.
8. Case, K.E., and Keats, J.B. "On the Selection of a Prior Distribution in Bayesian Acceptance Sampling", *Journal of Quality Technology*, Vol. 14, No. 1, pp.10-18, 1982.