장애 함수를 이용한 신뢰성 기반 최적 설계

이태희*• 최운용**• 이광기**

Reliability Based Design Optimization Using Barrier Function

Woonyong Choi, Tae Hee Lee and Kwangki Lee

Key Words : Reliability Based Design Optimization (신뢰성기반 최적설계), Barrier Function (장애함수), Advanced Mean Value Plus Method (개선된 평균값 플러스 기법), Reliability Index Approach (신뢰도지수접근방법), Performance Measure Approach (목표성능치 접근방법)

Abstract

실제적인 문제에서 신뢰성 기반 최적 설계(RBDO)를 구현하기 위해서는 유한요소 모델을 해석하기 위한 상용 프로그램과 설계한 것에 대한 신뢰성을 산정할 수 있는 프로그램을 통합하고 최적화 알고리듬을 적용하여야 최적화를 수행하여야만 한다. 또한 최적화 과정에서 최적상태에서 제약조건이 비활성 영역에서 놓이게 되는 것을 방지하기 위해서 제약조건 최적화 문제를 비제약 조건 최적화 문제로 바꾸어 주는 장애 함수를 사용하여 최적화를 수행하였다. 그리고 이 방법론을 기존의 신뢰성기반 최적화 방법론, 즉 신뢰도지수 접근방법과 목표성능치 접근방법과의 비교를 하였다.

기호설명

Z : 한계상태식

P_f : 파괴확률

β : 신뢰도지수

$H(\cdot)$: 고차항

g : 표준 정규 분포공간에서 한계상태식

$\mathbf{x}_i$: 정규분포 확률변수

U : 표준 정규분포 확률변수

1. 서 론

기존의 최적설계는 목적함수를 최소화하면서 제약조건을 만족시키는 것으로 설계 값들을 확정한다. 하지만, 설계변수의 임의성(randomness)이나 공정 상의 불확실성과 설계 파라미터(design parameter)의 불확실성 등을 고려하지 않기 때문에 최적 값에 대한 신뢰성이 낮다. 그리고 설계한 구조물의 정확한 거동을 해석하는 데 있어서 일반적으로 이용해 온 방법은 해석에 고려되는 변수들이 일정한 불변의 값을 갖고 있다는 가정에 입각한 결정론적 방법(deterministic approach)이었다. 그러나 확정론적 방법에서도 해석에 이용되는 변수들이 고정된 어떤 값을 갖는 다기보다는 평균적인 의미에서 구조물의 거동을 분석하기위해 각 물성치들이 대표 값을 갖는 경우에 대해 중점적으로 해석을 수행해 왔다. 그러나 구조물에 작용하는 하중이나 구조물의 물성치들은 고정된 어떤 값을 갖는 것이 아니라 평균값을 중심으로 분산특성에 따라 분포되어있다 것은 실험에서 계측되는 값의 통계특성을 살펴보더라도 확인할 수 있다. 하나의 고정된 값만을 대표 값으로 사용하는 기존의 확정론적 방법의 한계가 있음을 알 수 있다.

구조물의 물성치나 작용 하중의 임의성(randomness)을 보다 합리적으로 고려하기 위해 기존의 안전계수 방법보다는 체계적이며 논리적인

* 한양대학교 기계공학부
** 한양대학교 대학원 기계설계학과

확률·통계 이론을 적용하여 구조물의 안정성을 보다 정밀하고 합리적으로 다루는 확률론적 해석방법이 도입되었다. 이러한 확률론적 해석을 신뢰성 해석이라고 하는데, 구조물의 신뢰도를 제약조건으로 놓는 것을 신뢰성기반 최적설계라고 한다. 신뢰성기반 최적 설계는 설계자가 만족하는 신뢰도를 구속 조건으로 사용함으로써 제약조건의 강건화를 구현 할 수 있다. 1990 년대 이후 Wu [1], Chen[2], Choi[3] 등에 의해 연구가 진행되어 왔다. 이렇게 진행되어 온 신뢰성기반 최적설계의 방법들을 소개하고 설계 문제에서 기존의 신뢰성기반 최적설계를 수행하였을 때 신뢰도 구속조건이 비활성화 되는 문제점이 있다. 이런 문제점을 보완하기 위하여 새로운 신뢰성 최적화문제의 정식화가 요구된다. 이러한 필요에 의해 장애함수를 이용한 신뢰성기반 최적화를 수행하였다.

2. 신뢰성 해석 방법론

2.1 한계상태식과 파괴확률

확률적 해석에 대한 기본적인 문제는 구조물에 걸리는 하중과 구조물에 걸린 하중에 대한 저항을 식으로 표현하는 것이다. 전형적인 설계 조건에서 응력과 강도는 같은 선상에서 표현될 수 있다.

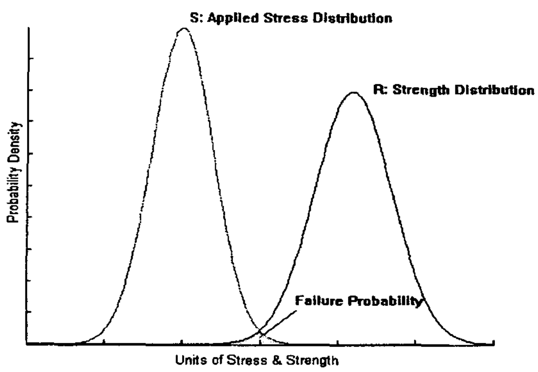

Fig.1 Definition of limit state equation

응력(S)과 강도(R)에 대한 기술적으로 정확한 표현은 수평축을 따라 이동하는 Fig.2 처럼 표현될 수 있다. 그리고 응력과 강도가 같다는 상황을 식으로 표현하면 $Z(\mathrm{R},\mathrm{S})=\mathrm{R}-\mathrm{S}=0$ 으로 표현될 수 있다. 이러한 식을 파괴영역($Z<0$)과 안전영역($Z>0$)으로 나누는 한계 상태식이라고 부른다.

확률밀도함수 $f_R(r)$ 과 $f_S(s)$ 는 R,S 의 통계적 분포를 표현하는데 **Fig.1** 에서 표현한 겹쳐지는 부분, 즉 파괴확률에 대한 정량적인 표현은 다음과 같다.

$$P_f = \iint_{\Omega} f_{R,S}(r,s)drds \tag{1}$$

여기서 $f_{R,S}(r,s)$ 는 결합 확률밀도함수(joint-probability density function)이고, Ω는 파괴 집합(failure set), 즉 $Z(\mathrm{R},\mathrm{S})\le 0$ 에 대한 R 과 S 의 모든 값에 대한 집합이다. 만약 R 과 S 가 통계적으로 독립이라고 가정한다면, 그때는 결합 확률밀도함수는 각각의 확률밀도함수의 곱으로써 표현될 수 있다.

$$f_{R,S}(r,s)=f_R(r)f_S(s) \tag{2}$$

따라서 파괴확률은 다음과 같이 표현될 수 있다

$$P_f = \iint_{\Omega} f_R(r)f_S(s)drds \tag{3}$$

2.2 개선된 평균점 방법 플러스(Advanced Mean Value Plus : AMV+)

한계상태식이 비선형성이 강하다면, MV 의 해는 일반적으로 그렇게 정확하지는 않다. 간단한 문제에서는 정확성을 향상시키기 위해서 더 높은 차수까지 확장하여 사용이 가능하지만, 불명확한 한계상태식을 포함하고 있는 문제라면 확장하는 것은 어렵고 비효율적이게 된다. 이러한 문제를 해결하기 위해 최소한으로 한계상태식의 계산을 추가함으로써 MV 해의 정확성을 향상시키는 것이 개선된 평균점방법(Advanced Mean Value :AMV)이다. 이 방법은 누적분포확률분포를 계산하기 위해 최대파괴가능점(most probable point : MPP)개념과 평균일계이차모멘트방법(Mean Value First Order Second Moment Method: MV FOSM or MV)을 혼합한 방식으로, Taylor 전개 후 생기는 생략오차를 보상하여, MV 의 해를 향상시키는 것이다. 이러한 방법을 기반으로 하는 누적분포확률함수는 잠재적인 수치적 문제를 찾아냄으로써 한계상태식의 비선형성에 대한 정보를 제공한다.

AMV 모형은 다음과 같이 정의된다.

$$Z_{AMV}=Z_{MV}+H(Z_{MV}) \tag{4}$$

다른 z 값에 대한 모든 MPP 을 연결하여 이루어지는 MPP 궤적에서 계산된 Z 의 값과 Z_{MV} 의 값의 차이로 $H(Z_{MV})$ 는 정의된다. 그리고 Z_{MV} 의 MPPL 은 일반적으로 표준정규분포 공간에서는 비선형적인 곡선을 이루고 있다. 복잡한 구조해석에 대해서 Z_{MV} 의 구성은 시간소비가 심할지 모르지만, 그것의 MPPL 은 쉽게 계산될 수 있다. AMV

의 핵심은 Z_{MV} 에 의존하는 간단한 함수 $H(Z_{MV})$ 가 고차항의 역할을 대신함으로써, 생략 오차를 감소시킨다는 것이다. AMV 의 과정은 Z_{MV} 의 MPPL 을 이용하기 때문에 단순화할 수 있다. 근사화된 한계상태식의 MPP 가 일반적으로 정밀한 MPP 에 근접해 있기 때문에 AMV 해는 많은 공학문제에서 좋은 CDF 를 제공한다.

AMV 의 계산과정은 다음과 같다.

1) Z_{MV} 를 기반으로 해서 MPP 를 계산하고, 각각의 CDF 를 계산한다.

2) MPP 를 한계상태식에 넣어, CDF 를 갱신한다.

주어진 MV 모델에서는, 한계상태식 계산에 필요한 횟수는 선택된 CDF 의 수와 같다. 만약 수치적 미분 기술이 Z_{MV} 의 함수를 정의하는데 사용된다면, 한계상태식의 값을 산정하는데 요구되는 횟수는 $(n+m+1)$ 이 된다.

여기서 n 은 확률변수의 수이고, m 은 각 CDF 수준의 수이다. CDF 해의 정확성을 높이는 것은 얼마만큼 정확한 MPP 를 구하느냐에 달려있다.

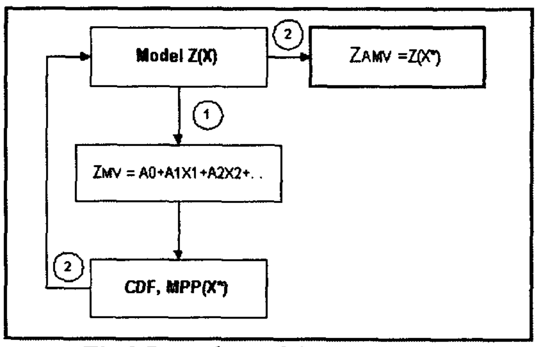

Fig.2 Procedure of the AMV Method

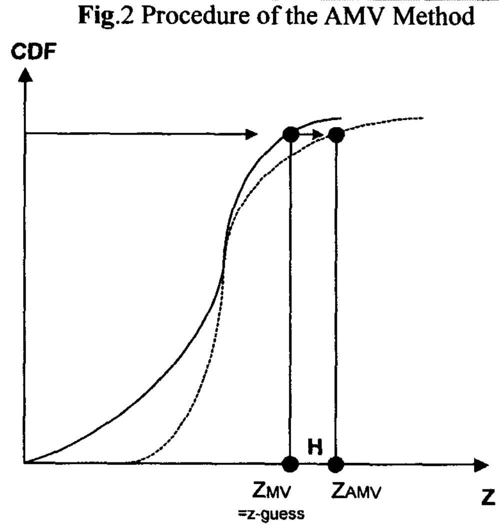

Fig.3 Illustration of the AMV Method

일반적으로 AMV 해는 최적화 과정 또는 반복 과정을 통해서 더욱 향상될 수 있다. 초기 Z_{MV} 를 기반으로 MPPL 을 유지하면서, 초기 한계상태식 $Z=z$ 에 대해서 정확한 MPP 는 AMV+를 이용하여 계산될 수 있다.

AMV+는 AMV 를 결과를 이용하여, CDF 산정을 갱신시키는데, 다음과 같은 과정을 따른다.

1) 처음에 선형의 한계상태식 Z_1 을 구성한다. 그리고 $P[Z_1 < z_0] = p$ 를 만족시키는 z_0 를 찾는다.

2) $Z_1 = z_0$ 의 MPP 를 이용하여 Z 를 다시 계산한다.

3) $Z_1 = z_0$ 의 MPP 를 중심으로 새로운 Z_1 을 구성한다.

4) z_0 가 수렴할 때까지 위의 과정을 반복한다.

일반적으로 Z_1 을 구성하기위해서는 위의 과정이 몇 번 필요하다. 그러므로 광범위한 계산이 요구되는 복잡한 한계상태식의 경우에는 효율적인 민감도 계산 기법이 Z_1 함수를 갱신하는데 더욱 선호되고 있다.

3. 신뢰성기반 최적설계 방법론

신뢰성기반 최적설계(Reliability Based design Optimization: RBDO)는 이와 같은 신뢰성 해석과 최적 설계가 엮여서 이루어진다. 신뢰성기반 최적설계는 다음과 같은 두 가지 방법론을 가지고 있다.

3.1 신뢰도지수 접근방법(reliability index approach : RIA)

신뢰도지수 접근방법을 이용한 신뢰성 기반 최적설계의 문제정식화는 다음과 같다.

$$
\begin{aligned}
&\mathit{Min}\quad F(\mathbf{x}) \\
&\mathit{subject\ to} \\
&\qquad g_i(\mathbf{x}) \le 0 \qquad\qquad (5) \\
&\qquad \beta_j \ge \beta_{j,\text{target}} \\
&\qquad \mathbf{x}_l \le \mathbf{x} \le \mathbf{x}_u
\end{aligned}
$$

목표의 신뢰도지수를 정하고 그것을 제약조건으로 놓아 최적설계를 수행하는 것이다.

그리고 이러한 신뢰도지수를 산정하는 식은 다음과 같다.

$$Min \quad \beta = |U| \qquad (6)$$
$$s.t \quad g(U) = 0$$

이때 신뢰성 해석은 한계상태식이 0 인 등가 제약조건을 갖는 최적화 문제로 표준정규분포의 공간의 원점에서 MPP 점까지의 가장 가까운 거리를 구하는 것으로 신뢰도지수를 정의하고 신뢰도지수를 가지고 구조물의 안전확률 혹은 파괴 확률을 산정을 한다. 이렇게 구한 확률의 값이 설계자가 원하는 목표신뢰성 지수와 비교하여 비등가 제약조건의 위배여부를 판별한 다음, 설계변수에 대한 신뢰도지수의 민감도 정보를 제공함으로써 최적화를 수행하는 것이 신뢰도지수 접근 방법이다.

3.2 목표성능치 접근방법(performance measure approach : PMA)

$$\begin{aligned} &Min \quad F(\mathbf{x}) \\ &subject\ to \\ &\qquad g_i(\mathbf{x}) \le 0 \qquad (7) \\ &\qquad g_{j,\text{target}} \ge 0 \\ &\qquad \mathbf{x}_l \le \mathbf{x} \le \mathbf{x}_u \end{aligned}$$

목표성능치 접근방법은 신뢰성지수 접근방법과는 다르게 한계상태식의 목표 값으로 정의되는 제약조건으로 갖는다. 즉, 신뢰도지수를 정해놓고, 표준 정규 분포의 공간에서 한계상태식이 최소화되는 값을 찾는 것이다.

$$Min \quad g(U) \qquad (8)$$
$$s.t \quad \beta = |U| = \beta_{\text{target}}$$

한계상태식의 값으로 이루어진 제약조건이 설계자가 원하는 목표 비등가 제약조건의 위배를 판별한 다음 최적화를 수행하는데, 이 목표성능치 접근방법의 장점은 항상 설계자가 원하는 신뢰도를 만족시키고 있다는 장점을 가지고 있다.

3.3 장애함수를 이용한 신뢰성기반 최적설계

설계 문제에서 기존의 신뢰도지수 접근방법으로 신뢰성기반 최적설계를 수행하였을 때 신뢰도 구속조건이 비활성화 되는 문제점이 있다. 이런 문제를 보완하기위해 역 장애함수(inverse Barrier function)를 이용할 수 있다.

역 장애함수를 이용하면 우선 구속조건을 만족시키고, 그 다음에 목적함수를 최소화를 수행하게 된다.

역 장애함수의 특징은 오직 부등가 제약조건 문제(inequality constrained problem)에 적용할 수 있고, 항상 가용 범위(feasible region) 내에서 최적 해를 찾기 때문에 수렴한 최적 값은 설계 영역 내에 존재하게 되며, 구해진 최적 값을 활용할 수 있다는 장점이 있다. 장애함수를 이용한 문제정식화는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &Min \quad f = F(\mathbf{x}) + \frac{1}{s}\left(-\sum_{i=1}^{p} \frac{1}{g_i(\mathbf{x})}\right) \\ &subject\ to \quad \mathbf{x}_l \le \mathbf{x} \le \mathbf{x}_u \qquad (9) \\ &where \quad s : \text{scale factor} \\ &\qquad\qquad g_i(\mathbf{x}) : \text{Inequality constraints} \end{aligned}$$

4. 예제

4.1 Torque Arm의 문제정의

유한요소 모델에 대한 신뢰성을 적용하여 최적화를 시키는 예제이다. Fig.17 에서와 같이 구속조건과 하중조건이 주어져 있고, Shell 요소로 이루어져있고, 재료 상수는 $E = 210\,GPa$, $\nu = 0.29$, $thickness = 1cm$ 이다.

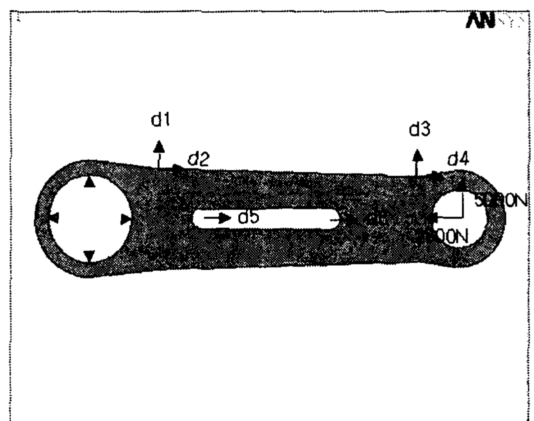

Fig. 4 Geometry and boundary condition of torque arm

이 예제는 설계 변수의 변화에 따라 형상이 변화하게 되는 형상문제로써 유한요소 모델의 부피를 최소화하고, 최대응력에 대한 신뢰도지수 β 가 3 보다 크게 되는 구속조건을 갖는 예제로, 하중조건에 의해서 Torque Arm 에 걸리는 최대항복응력(Maximum Yield Stress)이 400MPa 을 넘지 않아야 한다. β 가 3 이라는 것은 파괴확률이 0.0013, 즉 최대항복응력을 넘지 않을 확률은 0.9987 이 된다는 것을 의미한다. 그리고 각 설계변수를 확률변수로 정의하여 설계변수의 평균과 표준편차는 Table.1 과 같다.

Table.1 Mean and standard deviation for the design variables

	Lower	Mean	Upper	Std. div.
d1	6.5	7.303	8	0.2
d2	4.2	5	6	0.2
d3	35	36	36.8	0.2
d4	2.1	4	5	0.2
d5	11	12	15	0.2
d6	25	26	32	0.2

4.2 Torque Arm 의 신뢰성 기반 최적설계수행

우선 Torque Arm 의 유한요소해석과 신뢰성을 계산하기 위해 상용툴을 사용하였는데, 최대응력을 구하기 위한 유한요소 프로그램으로는 ANSYS 를 사용하였고, 최대응력을 넘지않을 확률을 구하기 위해 신뢰성 프로그램인 NESSUS 를 사용하였으며, 최적화를 수행하기 위해 통합화 및 자동화 프로그램인 ModelCenter 를 사용하였다. 그리고 최적화 툴로는 ModelCenter 에 내장되어 있는 DOT 를 사용하여 최적화를 수행하였다.

Torque Arm 의 문제정식화는 신뢰도지수 접근방법, 목표성능치 접근방법, 그리고 장애함수를 이용한 최적설계방법으로 구현하였다.

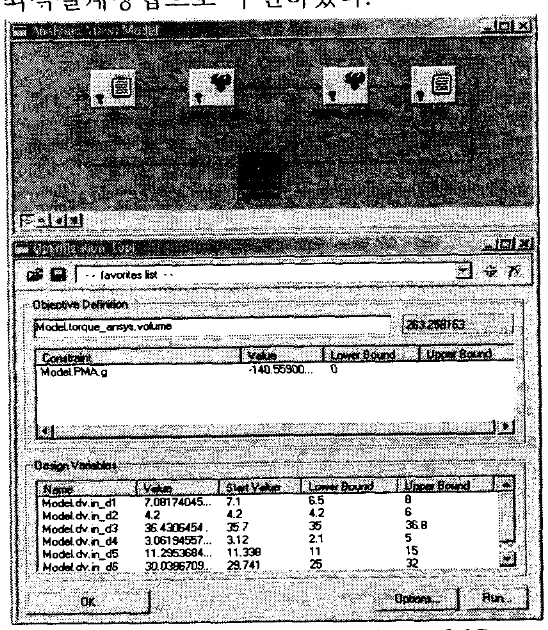

Fig.5 Integration and automation in ModelCenter

Table.2 Results

	Initial	RIA	PMA	Barrier
Volume	366.145	246.4	262.98	269.99
Max.Stress (MPa)	129.79	338.67	318.12	286.89
Probability(%)	100	99.99998	99.87	99.8708

Table.2 에서 알 수 있듯이 신뢰도지수 접근방법의 경우 구속조건이 비활성되는 문제를 가져왔다. 그러나 장애함수를 이용한 신뢰성 기반최적설계의 경우, 설계자가 원하는 신뢰성를 항상 만족시키는 PMA 와 비슷한 결과를 가져왔다. PMA 가 신뢰성을 산정하는 부분에서 신뢰도지수를 정하여 놓은 후 최적화를 수행하는 것에 비해, Barrier 함수를 이용한 신뢰성기반 최적설계는 최적화 과정에서 신뢰성을 만족시킨 후 목적함수를 최소화 시키기 때문에 PMA 와 비슷한 성향을 가진다고 말할 수 있다.

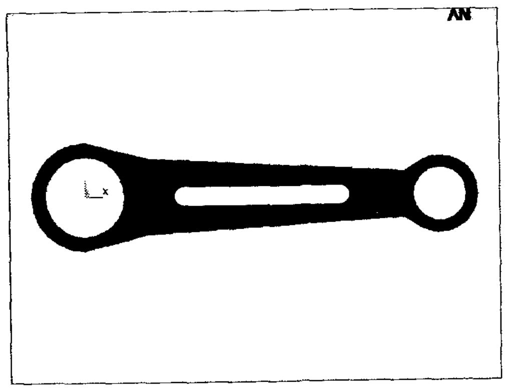

Fig.6 Optimal shape of torque arm

5. 결 론

기존의 신뢰성기반 최적화가 가지고 있는 문제점을 찾고, 이러한 문제를 해결하기 위해 장애함수를 이용한 신뢰성 기반 최적화 방법론을 제안하였다. 그리고 이 방법론을 기존의 방법론들과 예제를 통해 비교함으로써 다음과 같은 결론을 얻었다.

1) 신뢰도지수 접근 방법의 경우, 최적화가 되었지만, 신뢰도 구속조건이 비활성되는 문제점을 안고 있다.
2) 역 장애함수를 이용하여 신뢰성기반 최적화를 수행함으로써, 신뢰도 구속조건이 비활성되는 문제를 해결할 수 있었다.
3) 역 장애함수를 이용한 신뢰성기반 최적화는 목표성능치 접근 방법과 비슷한 결과를 도출할 수 있었다.

후 기

이 연구는 한국과학재단 지정 최적설계신기술 연구센터의 지원에 의하여 수행되었습니다.

참고문헌

(1) Wu, Y.-T. and Wang, W., 1996, A New Method for Efficient Reliability-Based Design Optimization, Probabilistic Mechanics & Structural Reliability: Proceedings of the 7th Special Conference, pp 274-277.

(2) Xiaoping Du and Wei Chen, 2000, A Most Probable Point Based Method For Uncertainty Analysis, ASME 2000 *Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conferenc*e Caltimore, Maryland.

(3) J, Tu, K.K.Choi and Y.H.Park, 1999, A New Study On Reliability Based Design Optimization, *Journal of MECHANICAL DESIGN* Vol.121 .

(4) Wu, Y.-T., Burnside, O.H., and Cruse, T.A., 1989, Probabilistic Methods For Structural Response Analysis, Computational Mechanics of Probabilitstic and Reliability Analysis, edited by W.K. Liu and T.Belytchko, Elmepress International, Chap. 7.

(5) Yang, Young-Soon and Lee, Jae-Ohk, 1999, A Comparative Study Probabilistic Structural Design Optimization, *한국과학재단 특정기초연구*, 1999-2-305-003-3.

(6) Phoenix Integration Inc. 2000, *ModelCenter User's Guide.*

(7) ANSYS Inc. 2000, *ANSYS User's Guide*, Ver.6.1.

(8) Southwest Research institute, *GETTING STARTED MANUAL NESSUS and FPI*, Ver.24.

(9) Achintya Haldar, Sankaran Mahadevan, 2000, Probability, Reliability, and Statistical Methods in Engineering Design, John Wiley & Sons, Inc.

(10)양영순· 서용석·이재옥 1997 ,*구조 신뢰성 공학*, 서울 대학교 출판부.