두 불연속면의 교선을 구하는 계산법

임성철, 송승원
(주)한구엔지니어링

1. 서 론

암반사면내 두불연속면에 의해 형성되는 교선(intersection line)의 trend/plunge를 구하는 방법은 (1) 스테레오 투영법, (2) 벡터해법, (3) 도해법이 있으나 본 기술보고서에서는 불연속면의 apparent dip을 이용, 교선의 trend/plunge를 구하는 또 다른 방법을 제시하고자 한다.

2. 관계식 유도

2.1 위경사각(apparent dip) 개념

하나의 불연속면(dip direction / dip : α_1/β_1)에서 임의의 수평성분방향(α_0)에 대한 위경사각(β_0)은 다음과 같은 방법으로 구할 수 있다.

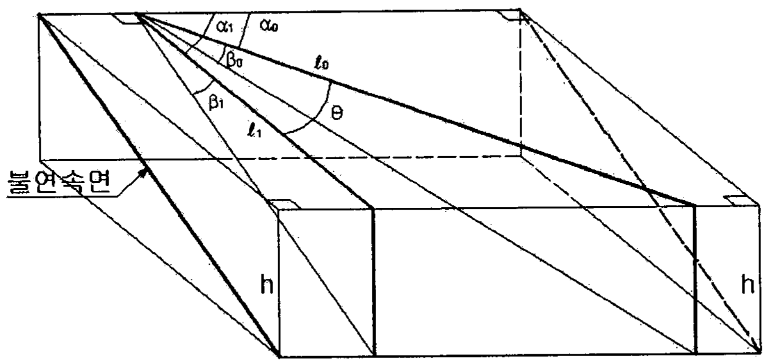

fig1. 불연속면(dip direction /dip : α_1/β_1)과 임의 방향에 대한 apparent dip direction / apparent dip : α_0/β_0의 관계

$$\tan\beta_1 = \frac{h}{\ell_1}, \quad \tan\beta_0 = \frac{h}{\ell_0} = \frac{h \cdot \cos\theta}{\ell_1}$$

apparent dip(β_0)=$\tan^{-1}(\tan\beta_1 \cdot \cos\theta)$ ······································ ①

2.2 두 불연속면의 교선방향(trend : α_0) 계산식 유도

두 불연속면의 dip direction / dip (제1불연속면: α_1/β_1, 제2불연속면: α_2/β_2)과 교선의 trend/plunge(α_0/β_0) 관계는 제1불연속면에서의 α_0 방향에 대한 위경사각, 제2불연속면에서의 α_0 방향에 대한 위경사각이 같은 점을 이용하여 관계식을 유도할 수 있다.

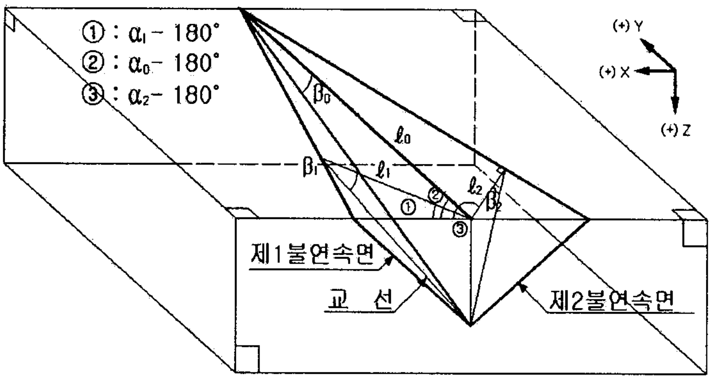

fig2. 2개의 불연속면과 교선의 관계

α_1/β_1 : 제1불연속면의 dip direction/dip

α_2/β_2 : 제2불연속면의 dip direction/dip

α_0/β_0 : 교선의 trend/plunge

$$\tan\beta_0=\tan\beta_1\cos(\alpha_1-\alpha_0) \quad \cdots\cdots ②$$

$$\tan\beta_0=\tan\beta_2\cos(\alpha_2-\alpha_0) \quad \cdots\cdots ③$$

$$\frac{\tan\beta_1}{\tan\beta_2}=\frac{\cos(\alpha_2-\alpha_0)}{\cos(\alpha_1-\alpha_0)} \quad \cdots\cdots ④$$

여기에서 $\dfrac{\tan\beta_1}{\tan\beta_2}=A$ 라 하면

$$\tan\alpha_0=\frac{A\cos\alpha_1-\cos\alpha_2}{\sin\alpha_2-A\sin\alpha_1} \quad \cdots\cdots ⑤$$

$$\alpha_0=\tan^{-1}\left[\frac{A\cos\alpha_1-\cos\alpha_2}{\sin\alpha_2-A\sin\alpha_1}\right] \quad \cdots\cdots ⑥$$

α_0를 0° ~360° 사이값을 갖게 하도록 하기 위하여 식⑤에서 분자항을 U_x, 분모항을 U_y라 하고, U_x 및 U_y의 크기에 따른 보정치를 Q라하면 상기 ⑥식은 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$\alpha_0=\tan^{-1}\left[\frac{\mathrm{A}\cos\alpha_1-\cos\alpha_2}{\sin\alpha_2-\mathrm{A}\sin\alpha_1}\right]+\mathrm{Q} \quad \cdots\cdots ⑦$$

U_x	U_y	Q
≥ 0	≥ 0	0
< 0	≥ 0	180°
< 0	< 0	180°
≥ 0	< 0	360°

2.3 교선의 경사각(plunge : β_0)

식⑥에 $\tan\alpha_0 = \dfrac{A\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2}{\sin\alpha_2 - A\sin\alpha_1}$ 이므로 fig3.과 같이 표현할 수 있다.

$$\sin\alpha_0 = \frac{(A\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)}{\ell_0} \quad \cdots\cdot ⑧,\quad \cos\alpha_0 = \frac{(\sin\alpha_2 - A\sin\alpha_1)}{\ell_0} \quad \cdots\cdots ⑨$$

여기에서 $\ell_0^2 = (A\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)^2 + (\sin\alpha_2 - A\sin\alpha_1)^2$

$$= A^2 + 1 - 2A(\cos(\alpha_2 - \alpha_1))$$

$$\therefore\ \ell_0 = \sqrt{(A^2+1) - 2A\cos(\alpha_2 - \alpha_1)} \quad \cdots\cdots ⑩$$

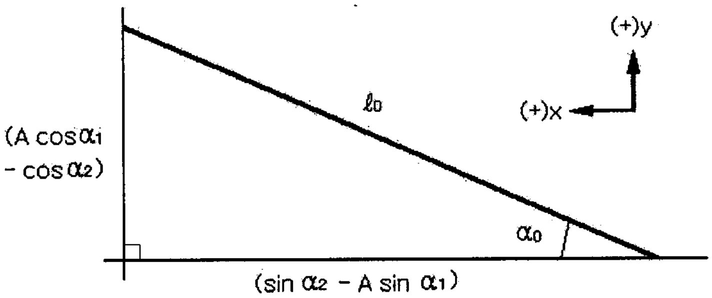

fig3. 교선의 trend(α_0)와 불연속면의 관계

②식에 식⑧,⑨,⑩을 대입하면

$$\tan\beta_0 = \tan\beta_1 \cos(\alpha_1 - \alpha_0)$$

$$= \tan\beta_1 [\cos\alpha_1 \cos\alpha_0 + \sin\alpha_1 \sin\alpha_0]$$

$$= \tan\beta_1 \left[\cos\alpha_1 \frac{\sin\alpha_2 - A\sin\alpha_1}{\ell_0} + \sin\alpha_1 \frac{A\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2}{\ell_0}\right]$$

$$= \frac{\tan\beta_1}{\ell_0} \sin(\alpha_2 - \alpha_1)$$

$$= \tan\beta_1 \frac{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)}{\sqrt{(A^2+1) - 2A\cos(\alpha_2 - \alpha_1)}}$$

$$\beta_0 = \tan^{-1}\left[\tan\beta_1 \frac{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)}{\sqrt{(A^2+1) - 2A\cos(\alpha_2 - \alpha_1)}}\right] \quad \cdots\cdots ⑪$$

상기식과 같이 두 불연속면의 측정자료만을 이용하여 교선의 plunge를 구하게 된다.

※ 여기에서 ℓ_0, $\tan\beta_0$, $\tan\beta_1$이 (+)값이므로 $\sin(\alpha_2 - \alpha_1)$의 값도 (+)의 값이어야 한다.

3. 계산과정 및 계산예

3.1 계산과정

i) $\sin(\alpha_2-\alpha_1)\geq 0$ 의 조건에 맞도록 제1불연속면(α_1/β_1)과 제2불연속면(α_2/β_2) 선택
ii) 식⑦을 활용 교선의 trend(α_0) 결정(보정각도 고려)
iii) 식② 또는 식⑪을 활용하여 교선의 plunge(β_0) 결정

3.2 계산예

3.2.1 교선의 trend가 제1사분면(0~90°)에 존재하는 경우

가정한 두 불연속면의 dip direction/dip은 다음과 같다.

제1불연속면 : 100° /70°	Normal plane에 대한	→	280° /20°
제2불연속면 : 310° /60°	trend / plunge		130° /30°

1) 벡터해법에 의한 교선의 trend/plunge

제1불연속면의 벡터성분 : $(\ell_x,\ \ell_y,\ \ell_z)=(-0.925,\ 0.163,\ 0.342)$

제2불연속면의 벡터성분 : $(m_x,\ m_y,\ m_z)=(0.663,\ -0.557,\ 0.500)$

교선의 벡터성분 : $(i_x,\ i_y,\ i_z)=(0.272,\ 0.690,\ 0.407)$

교선의 trend/plunge(α_i/β_i)는 다음식으로 구한다.

$$\alpha_i=\tan^{-1}\left(\frac{i_x}{i_y}\right)+Q\begin{pmatrix} i_x & i_y & Q \\ \geq 0 & \geq 0 & 0 \\ \geq 0 & <0 & 180 \\ <0 & <0 & 180 \\ <0 & \geq 0 & 360 \end{pmatrix}\qquad \beta_i=\tan^{-1}\left(\frac{i_z}{\sqrt{i_x^2+i_y^2}}\right)$$

$$\therefore \alpha_i/\beta_i = 21.524^\circ\ /28.762^\circ$$

2) 계산법에 의한 교선의 trend/plunge

$\sin(\alpha_2-\alpha_1)\ \geq\ 0$ 이어야 하므로

$\alpha_2/\beta_2=100^\circ\ /70^\circ$, $\alpha_1/\beta_1=310^\circ\ /60^\circ$ 이 된다.

여기서, $A=\dfrac{\tan\beta_1}{\tan\beta_2}=0.630$

$U_x=(A\cdot\cos\alpha_1-\cos\alpha_2)=0.579$

$U_y=(\sin\alpha_2-A\cdot\sin\alpha_1)=1.468$

① 교선의 trend(α_0)는

$$\alpha_0=\tan^{-1}\left[\frac{A\cos\alpha_1-\cos\alpha_2}{\sin\alpha_2-A\sin\alpha_1}\right]+Q \quad (\text{여기서, } U_x\geq 0,\ U_y\geq 0 \text{이므로 } Q=0^\circ\ )$$

$$=21.524^\circ$$

② 교선의 plunge(β_0)는

i) 교선의 trend (α_0)를 사용하여 계산할 경우 (식 ② 이용)

$$\tan\beta_0 = \tan\beta_1 \times \cos(\alpha_1 - \alpha_0)$$

$$\beta_0 = \tan^{-1}\{\tan\beta_1 \times \cos(\alpha_1 - \alpha_0)\} = 28.762°$$

ii) 두 불연속면의 trend (α_1, α_2)를 사용하여 계산할 경우 (식 ⑪ 이용)

$$\beta_0 = \tan^{-1}\left[\tan\beta_1 \cdot \sin(\alpha_2 - \alpha_1) / \sqrt{(A^2+1) - 2A \cdot \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}\right]$$

$$= 28.762°$$

3) 벡터해법과 계산법에 의한 계산결과 대비

구 분	Dip direction/Dip	벡터해법에 의한 교선의 trend/plunge	계산법에 의한 교선의 trend/plunge
제1불연속면	100° /70°	21.524° /28.762°	21.524° /28.762°
제2불연속면	310° /60°		

3.2.2 교선의 trend가 제2사분면(90° ~180°)에 존재하는 경우

가정한 두 불연속면의 dip direction/dip은 다음과 같다.

제1불연속면 : 70° /45° $\xrightarrow[\text{trend / plunge}]{\text{Normal plane에 대한}}$ 250° /45°

제2불연속면 : 200° /70° → 20° /20°

1) 벡터해법에 의한 교선의 trend/plunge

제1불연속면의 벡터성분 : (ℓ_x, ℓ_y, ℓ_z)=(-0.664, -0.242, 0.707)

제2불연속면의 벡터성분 : (m_x, m_y, m_z)=(0.321, 0.883, 0.342)

교선의 벡터성분 : (i_x, i_y, i_z)=(0.707, -0.455, 0.509)

교선의 trend/plunge(α_i/β_i)는 다음식으로 구한다.

$$\alpha_i = \tan^{-1}\left(\frac{i_x}{i_y}\right) + Q\begin{pmatrix} i_x & i_y & Q \\ \geq 0 & \geq 0 & 0 \\ \geq 0 & <0 & 180 \\ <0 & <0 & 180 \\ <0 & \geq 0 & 360 \end{pmatrix} \quad \beta_i = \tan^{-1}\left(\frac{i_z}{\sqrt{i_x^2 + i_y^2}}\right)$$

$$\therefore \alpha_i/\beta_i = 122.732° /31.197°$$

2) 계산법에 의한 교선의 trend/plunge

$\sin(\alpha_2 - \alpha_1) \geq 0$ 이어야 하므로

α_2/β_2= 200° /70° , α_1/β_1= 70° /45° 이 된다.

여기서, $A = \dfrac{\tan\beta_1}{\tan\beta_2} = 0.364$

$$U_x = (A \cdot \cos\alpha_1 - \cos\alpha_2) = 1.064$$

$$U_y = (\sin\alpha_2 - A \cdot \sin\alpha_1) = -0.684$$

① 교선의 trend(α_0)는

$$\alpha_0 = \tan^{-1}\left[\frac{A\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2}{\sin\alpha_2 - A\sin\alpha_1}\right] + Q \quad (\text{ 여기서}, U_x \geq 0, U_y < 0 \text{ 이므로 } Q = 180^\circ \text{)}$$

$$= 122.732^\circ$$

② 교선의 plunge(β_0)는

i) 교선의 trend (α_0)를 사용하여 계산할 경우 (식 ② 이용)

$$\tan\beta_0 = \tan\beta_1 \times \cos(\alpha_1 - \alpha_0)$$

$$\beta_0 = \tan^{-1}\{\tan\beta_1 \times \cos(\alpha_1 - \alpha_0)\} = 31.197^\circ$$

ii) 두 불연속면의 trend (α_1, α_2)를 사용하여 계산할 경우 (식 ⑪ 이용)

$$\beta_0 = \tan^{-1}\left[\tan\beta_1 \cdot \sin(\alpha_2 - \alpha_1) \,/\, \sqrt{(A^2+1) - 2A \cdot \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}\right]$$

$$= 31.197^\circ$$

3) 벡터해법과 계산법에 의한 계산결과 대비

구　　분	Dip direction/Dip	벡터해법에 의한 교선의 trend/plunge	계산법에 의한 교선의 trend/plunge
제1불연속면	70° /45°	122.732° /31.197°	122.732° /31.197°
제2불연속면	200/° 70°		

3.2.3 교선의 trend가 제3사분면(180° ~270°)에 존재하는 경우

가정한 두 불연속면의 dip direction/dip은 다음과 같다.

제1불연속면 : 310° /50°　　Normal plane에 대한 trend / plunge → 130° /40°

제2불연속면 : 160° /45°　　　　　　　　　　　　　　　 340° /45°

1) 벡터해법에 의한 교선의 trend/plunge

제1불연속면의 벡터성분 : (ℓ_x, ℓ_y, ℓ_z)=(0.587, -0.492, 0.643)

제2불연속면의 벡터성분 : (m_x, m_y, m_z)=(-0.242, 0.664, 0.707)

교선의 벡터성분 : (i_x, i_y, i_z)=(0.775, 0.570, -0.271)

교선의 trend/plunge(α_i/β_i)는 다음식으로 구한다.

$$\alpha_i = \tan^{-1}\left(\frac{i_x}{i_y}\right) + Q\begin{pmatrix} i_x & i_y & Q \\ \geq 0 & \geq 0 & 0 \\ \geq 0 & < 0 & 180 \\ < 0 & < 0 & 180 \\ < 0 & \geq 0 & 360 \end{pmatrix} \quad \beta_i = \tan^{-1}\left(\frac{i_z}{\sqrt{i_x^2 + i_y^2}}\right)$$

$$\therefore \alpha_i/\beta_i = 233.657^\circ / 15.716^\circ$$

2) 계산법에 의한 교선의 trend/plunge

$\sin(\alpha_2 - \alpha_1) \geq 0$ 이어야 하므로

$\alpha_2/\beta_2 = 310° /60°$, $\alpha_1/\beta_1 = 160° /45°$ 이 된다.

여기서, $A = \dfrac{\tan\beta_1}{\tan\beta_2} = 0.839$

$U_x = (A \cdot \cos\alpha_1 - \cos\alpha_2) = -1.431$

$U_y = (\sin\alpha_2 - A \cdot \sin\alpha_1) = -1.053$

① 교선의 trend(α_0)는

$$\alpha_0 = \tan^{-1}\left[\frac{A\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2}{\sin\alpha_2 - A\sin\alpha_1}\right] + Q \quad (\text{여기서}, U_x<0, U_y<0 \text{이므로 } Q=180°)$$

$$= 233.657°$$

② 교선의 plunge(β_0)는

i) 교선의 trend (α_0)를 사용하여 계산할 경우 (식 ② 이용)

$$\tan\beta_0 = \tan\beta_1 \times \cos(\alpha_1 - \alpha_0)$$

$$\beta_0 = \tan^{-1}\{\tan\beta_1 \times \cos(\alpha_1 - \alpha_0)\} = 15.716°$$

ii) 두 불연속면의 trend (α_1, α_2)를 사용하여 계산할 경우 (식 ⑪ 이용)

$$\beta_0 = \tan^{-1}\left[\tan\beta_1 \cdot \sin(\alpha_2 - \alpha_1) \;/\; \sqrt{(A^2+1) - 2A \cdot \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}\right]$$

$$= 15.716°$$

3) 벡터해법과 계산법에 의한 계산결과 대비

구　　분	Dip direction/Dip	벡터해법에 의한 교선의 trend/plunge	계산법에 의한 교선의 trend/plunge
제1불연속면	310° /50°	233.657° /15.716°	233.657° /15.716°
제2불연속면	160° /45°		

3.2.4 교선의 trend가 제4사분면(270° ~360°)에 존재하는 경우

가정한 두 불연속면의 dip direction/dip은 다음과 같다.

제1불연속면 : 50° /50° $\xrightarrow[\text{trend / plunge}]{\text{Normal plane에 대한}}$ 230° /40°

제2불연속면 : 250° /40° → 70° /50°

1) 벡터해법에 의한 교선의 trend/plunge

제1불연속면의 벡터성분 : (ℓ_x, ℓ_y, ℓ_z)=(-0.587, -0.492, 0.643)

제2불연속면의 벡터성분 : (m_x, m_y, m_z)=(0.604, 0.220, 0.766)

교선의 벡터성분 : (i_x, i_y, i_z)=(0.519, -0.838, -0.168)

교선의 trend/plunge(α_i/β_i)는 다음식으로 구한다.

$$\alpha_i = \tan^{-1}\left(\frac{i_x}{i_y}\right) + Q \begin{pmatrix} i_x & i_y & Q \\ \geq 0 & \geq 0 & 0 \\ \geq 0 & <0 & 180 \\ <0 & <0 & 180 \\ <0 & \geq 0 & 360 \end{pmatrix} \quad \beta_i = \tan^{-1}\left(\frac{i_z}{\sqrt{i_x^2 + i_y^2}}\right)$$

$$\therefore \alpha_i / \beta_i = 328.246° \ / 9.700°$$

2) 계산법에 의한 교선의 trend/plunge

$\sin(\alpha_2 - \alpha_1) \geq 0$ 이어야 하므로

$\alpha_2/\beta_2 = 50° \ /50°$, $\alpha_1/\beta_1 = 250° \ /40°$ 이 된다.

여기서, $A = \dfrac{\tan\beta_1}{\tan\beta_2} = 0.704$

$U_x = (A \cdot \cos\alpha_1 - \cos\alpha_2) = -0.884$

$U_y = (\sin\alpha_2 - A \cdot \sin\alpha_1) = 1.428$

① 교선의 trend(α_0)는

$$\alpha_0 = \tan^{-1}\left[\frac{A\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2}{\sin\alpha_2 - A\sin\alpha_1}\right] + Q = 328.246°$$

(여기서, $U_x < 0$, $U_y \geq 0$ 이므로 $Q = 360°$)

② 교선의 plunge(β_0)는

i) 교선의 trend (α_0)를 사용하여 계산할 경우 (식 ② 이용)

$$\tan\beta_0 = \tan\beta_1 \times \cos(\alpha_1 - \alpha_0)$$

$$\beta_0 = \tan^{-1}\{\tan\beta_1 \times \cos(\alpha_1 - \alpha_0)\} = 9.700°$$

ii) 두 불연속면의 trend (α_1, α_2)를 사용하여 계산할 경우 (식 ⑪ 이용)

$$\beta_0 = \tan^{-1}\left[\tan\beta_1 \cdot \sin(\alpha_2 - \alpha_1) \ / \ \sqrt{(A^2+1) - 2A \cdot \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}\right]$$

$$= 9.700°$$

3) 벡터해법과 계산법에 의한 계산결과 대비

구 분	Dip direction/Dip	벡터해법에 의한 교선의 trend/plunge	계산법에 의한 교선의 trend/plunge
제1불연속면	50° /50°	328.246° /9.700°	328.246° /9.700°
제2불연속면	250° /40°		

4. 결 론

본 기술보고에서는 스테레오 투영도나 벡터개념을 도입하지 않고서도 단순히 계산식에 두불연속면의 측정값을 대입하여 교선을 알 수 있게 하는 또 다른 방법을 제안하였다.

사용 수식은 다음과 같다.

① 교선의 trend $(\alpha_0) = \tan^{-1}\left[\dfrac{A\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2}{\sin\alpha_2 - A\sin\alpha_1}\right] + Q$

② 교선의 plunge $(\beta_0) = \tan^{-1}\left[\tan\beta_1 \dfrac{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)}{\sqrt{(A^2+1) - 2A\cos(\alpha_2 - \alpha_1)}}\right]$

참 고 문 헌

1. STEPHEN D.PRIEST. 1993. Discontinuity Analysis for Rock Engineering, CHAPMAN & HALL