

## 원형평판의 지지조건을 구성하는 양 끝단의 면적변화에 따른 강성도 해석

한근조(동아대 기계공학과), 안찬우(동아대 기계공학과), 김태형(경남정보대 컴퓨터응용기계과),  
안성찬(LG OTIS), 심재준(동아대 대학원 기계공학과), 한동섭\*(동아대 대학원 기계공학과)

### The Stiffness Analysis of Circular Plate Regarding the Area Change of Both Ends Constructing Supporting Conditions

G. J. Han(Dept. of Mech. Eng., DAU), C. W. Aan(Dept. of Mech. Eng., DAU), T. H. Kim(Subd. Mech. Eng., KIT), S. C. Ahn(LG OTIS), J. J. Shim(Dept. of Mech. Eng., DAU), and D. S. Han(Dept. of Mech. Eng., DAU)

#### ABSTRACT

This paper investigates the characteristics of deflection for circular plate that has same supporting condition along the width direction of plate according to the area change of supporting end. For two boundary conditions such as simple supporting and clamping on both ends, this study derives maximum deflection formula of circular plate using differential equation of elastic curve, assuming that a circular plate is a beam with different widths along the longitudinal direction. The deflection formula of circular plate is verified by carrying out finite element analysis with regard to the ratio of length of supporting part to radius of circular plate.

**Key Words :** Circular plate (원형평판), Deflection formula (처짐식), Beam theory (보 이론), Differential equation of elastic curve (탄성곡선의 미분방정식), FEA (유한요소해석)

#### 기호설명

$D_{\max}$  = Maximum deflection of circular plate using beam theory

$Uz_{\max}$  = Maximum deflection of circular plate using FEA

$Uz_{\max,x}$  = Maximum deflection along to x-axis in circular plate

#### 1. 서론

원형평판은 잠수함의 창, 유압실린더의 피스톤, 관에서 사용되는 밸브, 인공심장에 사용되는 판막 등 산업전반에 걸쳐 다양하게 사용되고 있다.<sup>(1)(2)</sup> 그런데 잠수함의 원형 창과 같이 경계조건이 외곽을 따라 균일하게 적용되는 축대칭 원형평판의 처짐식은 오래 전부터 계산되어 사용되고 있으나, 일반적

으로 선박용 엔진에 사용되는 쿄크밸브나 인공심장에 사용되는 판막과 같이 외곽의 경계조건이 축대칭이 아닌 경우에 대해서는 평판의 처짐을 계산하기가 쉽지 않다.

본 연구에서는 이 중에서 폭방향으로 일정한 경계를 갖는 원형평판의 지지부 면적에 따른 처짐 특성을 보이론을 사용하여 살펴보고자 한다. 이를 위해 원형평판을 길이방향을 따라 단면이 변하는 단순지지보, 양단고정보의 형태로 가정하고, 각각의 경계조건에서 지지부 길이  $a$ 에 따른 반지를  $r$ 인 원형평판의 최대 처짐식을 탄성처짐의 미분방정식을 적용하여 계산하였다.

또한 이러한 보이론을 통해서 구해진 최대 처짐식을 겸증하기 위해 0.1에서 0.9까지 9가지의 지지단길이비( $a/r$ )를 설계변수로하여 단순지지형경계와 양단고정형경계 두 가지 경계조건에 대해 유한요소해석을 수행하여 이론식의 결과와 비교하였다.

## 2. 원형평판의 경계조건에 따른 처짐공식

Fig. 1과 같이 두께가  $t$ 인 원형평판의 최대처짐은 길이  $x$ 에 따라 단면의 폭이 변하는 보로 가정하여 식(1)에 나타낸 탄성곡선의 미분방정식을 사용함으로써 얻을 수 있다.<sup>(3)</sup>

$$E \frac{d^2z}{dx^2} = -\frac{M_x}{I_x} \quad (1)$$

원형평판에서 폭  $b_x = 2\sqrt{r^2 - x^2}$ 이므로 압력  $p_0$ 가 작용할 때 길이  $x$ 에 따른 분포하중은 압력과 폭의 곱으로써  $w_x = p_0 b_x$ 가 되고 단면 2차모멘트  $I_x = b_x t^3 / 12$ 가 된다.

본 연구에서는 지지단 길이가  $a$ 인 원형평판의 최대처짐식을 구하기 위해 2가지 경계조건을 사용하였다. Fig. 2는 2가지 경계조건에 대한 원형평판 양단의 지지조건을 각각 나타내었다.

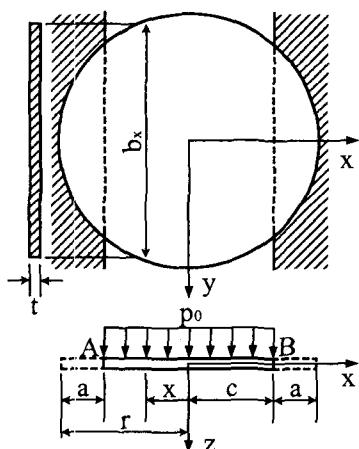


Fig. 1 Dimensions of the circular plate



Fig. 2 Supporting conditions of circular plate for two boundary conditions: (a) simple supporting, (b) clamping on both ends

### 2.1 단순지지경계의 최대처짐식

지지단의 길이  $a$ 인 단순지지경계의 원형평판에 압력  $p_0$ 가 작용할 때 임의의 지점  $x$ 에서 모멘트는

$$M_x = R_a(x + c) - P_x(x - x_c) \quad (2)$$

이다. 여기서

$$R_a = \int_{-c}^0 w_x dx$$

$$P_x = \int_{-c}^x w_x dx$$

$$x_c = \int_{-c}^x x \cdot w_x dx / \int_{-c}^x w_x dx$$

이고,  $c$ 는 중심에서 지지단까지의 길이( $c=r-a$ )이다. 식(1)에 모멘트  $M_x$ 와 단면 2차모멘트  $I_x$ 를 대입하여 적분하면

$$E \frac{dz}{dx} = \frac{2p_0}{3t^3} [15r^2x + x^3 - 3(c^2\sqrt{r^2 - c^2} \\ r^2(2\sqrt{r^2 - c^2} + 3\sqrt{r^2 - x^2}) + 3cr^2 \\ \tan^{-1}\frac{c}{r^2 - c^2} \tan^{-1}\frac{c}{r^2 - x^2}] + C_1 \quad (3)$$

$$Ez = \frac{p_0}{6t^3} [39r^2x^2 + x^4 - 12c^2\sqrt{r^2 - c^2} \\ \sqrt{r^2 - x^2} - 24r^2\sqrt{r^2 - c^2}\sqrt{r^2 - x^2} \\ - 6x\{2c^2\sqrt{r^2 - c^2} + r^2(4\sqrt{r^2 - c^2} \\ + 3\sqrt{r^2 - x^2})\} \tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}} - 9r^4 \\ \tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)^2 - 36cr^2\tan^{-1} \\ \frac{c}{\sqrt{r^2 - c^2}}\left(\sqrt{r^2 - x^2} + x\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}\right)] \\ + C_1x + C_2 \quad (4)$$

이다. 단순지지경계의 경계조건

$$z = 0 \quad (x = -c, x = c) \quad (5)$$

을 식(3)과 (4)에 대입하여 적분상수  $C_1, C_2$ 를 계산하면

$$C_1 = 0 \quad (6)$$

$$C_2 = -\frac{p_0}{6t^3} \{13c^4 + 51c^2r^2 - 24r^4 - 6c \\ \sqrt{r^2 - c^2}(2c^2 + 13r^2)\tan^{-1}\frac{c}{\sqrt{r^2 - c^2}} \\ - 9(4c^2r^2 + r^4)\tan^{-1}\left(\frac{c}{\sqrt{r^2 - c^2}}\right)^2\} \quad (7)$$

이다. 식(6)과 (7)을 식(4)에 대입하여 길이  $x$ 에 관한 원형평판의 처짐식을 구한다.

처짐은 대칭형태이므로 최대처짐은  $x=0$ 에서

나타난다. 평판의 중심에서 지지단까지의 길이가  $c$ 인 단순지지경계를 갖는 원형평판의 최대처짐식은

$$D_{\max} = \frac{p_0}{6Et^3} \left\{ 13c^4 + 3c^2(17r^2 + 4\sqrt{r^2 - c^2}) - 24(r^4 - r^3\sqrt{r^2 - c^2}) + 6c(6r^3 - 2c^2\sqrt{r^2 - c^2} - 13r^2\sqrt{r^2 - c^2}) \right. \\ \left. \tan^{-1}\frac{c}{\sqrt{r^2 - c^2}} - 9(4c^2r^2 + r^4) \right. \\ \left. \tan^{-1}\left(\frac{c}{\sqrt{r^2 - c^2}}\right)^2 \right\} \quad (8)$$

이 된다.

## 2.2 양단고정경계의 최대처짐식

지지단의 길이  $a$ 인 양단고정경계의 원형평판에 압력  $p_0$ 가 작용할 때 임의의 지점  $x$ 에서 모멘트는

$$M_x = R_a(x + c) - P_x(x - x_c) \quad (9)$$

이다. 2.1절에서와 같은 방법으로 계산하면 최대처짐은 평판의 중심  $x=0$ 에서 나타나며 크기는

$$D_{\max} = \frac{p_0}{6Et^3} \left[ 4c^2(c^2 + 15r^2)(c^2 - r^2 + \sqrt{r^2 - c^2}) \right. \\ \left. - c\{-32c^2r^3 + 3c^4\sqrt{r^2 - c^2} + 53cr^2 \right. \\ \left. \sqrt{r^2 - c^2} + 96r^4(r - \sqrt{r^2 - c^2})\tan^{-1} \right. \\ \left. \frac{c}{\sqrt{r^2 - c^2}} + r^2(-15c^4 + 75c^2r^2 - 36r^4 \right. \\ \left. + 36r^3\sqrt{r^2 - c^2})\tan^{-1}\left(\frac{c}{\sqrt{r^2 - c^2}}\right)^2 - \right. \\ \left. 27cr^4\sqrt{r^2 - c^2}\tan^{-1}\left(\frac{c}{\sqrt{r^2 - c^2}}\right)^3 + 9r^6 \right. \\ \left. \tan^{-1}\left(\frac{c}{\sqrt{r^2 - c^2}}\right)^4 \right] \div \left\{ \tan^{-1}\frac{c}{\sqrt{r^2 - c^2}} \right. \\ \left. \left( -c\sqrt{r^2 - c^2} + r^2\tan^{-1}\frac{c}{\sqrt{r^2 - c^2}} \right) \right\} \quad (10)$$

이 된다.

## 3. 원형평판의 유한요소해석

해석을 위해 사용된 재료는 연강으로써 기계적 성질은 Table 1과 같다. 보 이론을 적용하여 유도된 최대 처짐식의 결과와 비교하기 위하여 각부분의 치

수를 Table 2와 같이 설정하였고, 하중은 재료의 허용응력범위 내에서 변위를 가시화하기 위해 0.1 MPa의 면압을 원형평판의 상부에 작용시켰다.<sup>(4),(5)</sup>

Table 1 Mechanical properties of mild steel

Items	Symbol	Value
Elastic modulus	E	$2.1 \times 10^5$ MPa
Poisson's ratio	v	0.29
Yield strength	$\sigma_y$	206 MPa
Tensile strength	$\sigma_t$	519 MPa

Table 2 Dimensions of circular plate used for analysis

Items	Symbol	Value
Thickness of plate	t	10 mm
Radius of circular plate	r	100 mm
Length of supporting part	a	$0.1r \sim 0.9r$

## 4. 해석결과 및 고찰

### 4.1 단순지지경계의 최대처짐

단순지지경계에 대하여  $x$ 축에 따라 단면이 변하는 보로 해석한 이론식과  $x, y$  평면을 갖는 원형평판에 대한 유한요소해석결과를 비교하여 Table 3에 나타내었다.

Table 3 Comparison of maximum deflections from theory and FEA for circular plate simply supported with respect to the length of supporting part [mm]

a / r	Beam theory		FEA of circular plate
	$D_{\max}$	$Uz_{\max,x}$	$Uz_{\max}$
0.1	0.0759	0.0784	0.1099
0.2	0.0477	0.0464	0.0630
0.3	0.0281	0.0266	0.0354
0.4	0.0152	0.0143	0.0186
0.5	0.0074	0.0070	0.0089
0.6	0.0030	0.0029	0.0037
0.7	0.0010	0.0010	0.0012
0.8	0.0002	0.0002	0.0003
0.9	0.0000	0.0000	0.0004

단순지지경계에서 최대 처짐을 나타낸 Table 3을 살펴보면 유한요소해석을 수행한 결과  $y=0$ 인 길이방향인  $x$ 축을 따른 최대 처짐  $Uz_{\max,x}$ 는 보 이론을 적용한 최대 처짐  $D_{\max}$ 와 0.113%의 편차를 보여 거의 일치함을 알 수 있다.

그러나 보 이론에서는 폭방향인  $y$ 축을 따라서 균일한 처짐이 일어난다고 가정하여  $x$ 축에 대해서만 살펴보았으나 실제로 원형평판은  $p_0$ 의 압력을 받을 경우  $D_{\max,x}$ 가 최대인  $x=0$ 에서  $y$ 축을 따라 2차 곡선

의 형태로 처짐이 변하게 되어 Fig. 3과 같이 말안장 형태를 띄게 된다. 따라서 원형평판의 최대 처짐은  $x=0$ 이고  $y=-r$  또는  $r$ 인 지점에서 나타나며 최대 처짐  $U_{Z_{max}}$ 는  $x$ 축을 따른 최대 처짐  $U_{Z_{max,x}}$ 에 비해 최고 40% 증가하였으며 지지부 길이  $a$ 가 10%씩 증가할 수록 최대 처짐  $U_{Z_{max}}$ 는 0.1099mm에서 약 1/2씩 감소하였으며 감소폭은 점점 증가하였다.

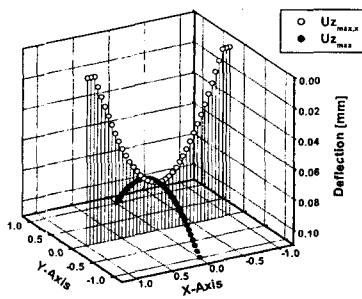


Fig. 3 Maximum deflection,  $U_{Z_{max,x}}$ , along  $x$ -axis and Maximum deflection,  $U_{Z_{max}}$ , along  $y$ -axis of the circular plate simply supported when length of supporting part(a) is 0.1r

#### 4.2 양단고정경계의 최대처짐

양단고정경계에 대하여  $x$ 축에 따라 단면이 변하는 보로 해석한 이론식과  $x$ ,  $y$  평면을 갖는 원형평판에 대한 유한요소해석결과를 비교하여 Table 4에 나타내었다.

Table 4 Comparison of maximum deflections from theory and FEA for circular plate clamped on both ends with respect to the length of supporting part [mm]

a / r	Beam theory		FEA of circular plate
	$D_{max}$	$U_{Z_{max,x}}$	$U_{Z_{max}}$
0.1	0.0201	0.0197	0.0410
0.2	0.0115	0.0101	0.0205
0.3	0.0064	0.0055	0.0103
0.4	0.0033	0.0030	0.0050
0.5	0.0016	0.0015	0.0022
0.6	0.0006	0.0006	0.0009
0.7	0.0002	0.0002	0.0003
0.8	0.0000	0.0001	0.0001
0.9	0.0000	0.0000	0.0000

양단고정경계에서 최대 처짐을 나타낸 Table 4를 살펴보면 유한요소해석을 수행한 결과  $y=0$ 인 길이방향인  $x$ 축을 따른 최대 처짐  $U_{Z_{max,x}}$ 는 보이론을 적용한 최대 처짐  $D_{max}$ 와 0.043%의 편차를 보였다.

최대 처짐  $U_{Z_{max}}$ 는  $x$ 축을 따른 최대 처짐  $U_{Z_{max,x}}$

에 비해 최고 108% 증가하였으며 4.1절과 마찬가지로 지지부 길이  $a$ 가 10%씩 증가할수록 최대 처짐  $U_{Z_{max}}$ 는 0.0410mm에서 약 1/2씩 감소하였으며 감소폭은 점점 증가하였다.

#### 5. 결론

단순지지경계와 양단고정경계의 두 가지 경계조건에서 지지부 면적변화에 따른 원형평판의 최대 처짐값을 보이론과 유한요소해석을 비교하여 계산한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. 보의 적분이론을 사용하여 원형평판을 단면이 변하는 보로 가정하고 중적분법으로써 두 가지 경계조건에서 지지부 길이  $a$ 에 따른 반지름  $r$ 인 원형평판의 최대 처짐식을 각각 구하였다.

2. 보의 적분이론을 통해 얻은 최대 처짐  $D_{max}$ 는  $y=0$ 인  $x$ 축(길이방향)을 따른 원형평판의 최대 처짐  $U_{Z_{max,x}}$ 과 0.113% 이하의 편차를 보였다. 그러나 보이론은 폭방향을 따라서 균일한 처짐을 갖는다고 가정하나 실제 원형평판의 처짐은  $y$ 축(폭방향)을 따라 2차식의 형태로 변하게 되어  $x=0$ ,  $y=-r$ ,  $r$ 에서 최대 처짐이 단순지지경계는 최대 40%, 양단고정경계는 최대 108% 증가함을 알 수 있다.

3. 지지부 길이  $a$ 에 따른 영향을 살펴보면, 두 가지 경계조건에서 모두 지지부 길이  $a$ 가 원형평판의 반지름  $r$ 을 기준으로 10%씩 증가할 때 약 50%씩 감소하였으며, 감소폭은 지지부 길이가 클수록 점점 더 크게 나타났다.

#### 참고문현

1. 한근조, 오세욱, 김광영, 안성찬, 전형용, "Index Machine의 Jig Body 강도 및 변위해석," 2001년 한국정밀공학회 춘계학술대회 논문집, pp. 748-751, 2001.
2. 한근조, 안성찬, 심재준, 김성윤, "지지대 형상에 따른 단엽식 고분자 판막의 비선형 해석,"
3. 오세욱, "재료역학," 동명사, pp. 223-266, 1992.
4. J. Hoffman, "Numerical methods for engineers," McGraw-Hill, Co., Singapore, 1992.
5. A. C. Ugural, "Stresses in Plates and Shells," McGraw-Hill Co., pp. 106-139, 1981.