

룰드서피스 듀얼곡률이론을 이용한 로봇경로계획

박상민*(전주공업대 기계계열), 송문상(전북대 대학원),
김재희(전북대 대학원), 유범상(전북대 기계공학부)

A Robot Trajectory Planning based on the Dual Curvature Theory of a Ruled Surface

S. M. Park*(Mech. Eng. Dept., JTC),
M. S. Song, J. H. Kim, B. S. Ryuh(Chonbuk National University)

ABSTRACT

This paper presents a robot trajectory generation method based on the dual curvature theory of ruled surfaces. Robot trajectory can be represented as a ruled surface generated by the TCP(Tool Center Point) and any unit vector among the tool frame. Dual curvature theory of ruled surfaces provides the robot control algorithm with the motion property parameters. With the differential properties of the ruled surface, the linear and angular motion properties of the robot end effector can be utilized in the robot trajectory planning.

Key Words : Ruled surface (룰드서피스), Dual curvature theory (듀얼곡률이론), Robot trajectory planning(로봇경로계획)

1. 서론

로봇경로계획은 로봇연구에서 가장 중요한 분야 중 하나이다. 현재 사용되는 로봇경로의 제어는 PTP와 CP방식이 대부분인데, 이는 보간법이라는 근사법에 근거하는 한계를 지니고 있다. 따라서, 정밀한 제어가 필요하거나 자유곡면 또는 해석곡면으로 주어진 경로를 추적하여 하는 경우에는 교시방식에 의한 프로그래밍을 하거나, 경로상에 필요한 수만큼 데이터(점)를 잡고 보간법을 수행하여 로봇의 위치와 자세(방위) 값들을 구하여야 한다. 이 때, 추적 정밀도는 경로상의 데이터 개수에 비례한다고 할 수 있다.

로봇경로의 생성과 제어에서 가장 중요한 것은 로봇 방위의 연속적 표현이다. 3차원 공간에서 방위를 표현하는데 사용되는 방법으로는 동차변환행렬, Quaternion, 오일러 각 등이 있는데⁽¹⁾, 이 방법들은 표현방법상 높은 잉여도(High redundancy)를 가지고, 근본적으로 연속성을 제공할 수 없다는 것이다.

본 연구에서는 로봇의 엔드이펙터(End-effector) 방위를 나타내는 단위 벡터가 생성하는 궤적이 룰드서피스(Ruled surface)를 이룬다는 점에 착안한다. 룰

드서피스란 직선선분이 공간상에서 그리는 궤적을 말한다. 따라서, 로봇의 공구점(TCP)에서 정의되는 공구 좌표계중의 한 벡터가 주어진 경로를 따라 움직이면 룰드서피스를 생성하게 되므로, 로봇경로에 룰드서피스 곡률이론을 적용하면 기존 Joint interpolation이나 Cartesian interpolation⁽²⁾ 등 보간법에 의하지 않고 엄밀한 수학적 방법에 의하여 로봇 운동의 미분적 성질들(속도, 가속도, 각속도, 각각속도 등)을 구할 수 있게 된다. 이는 로봇의 정밀제어를 위한 방법을 제공할 뿐 아니라 추적할 곡면이 해석곡면이나 자유곡면인 경우에 보간법을 거치지 않고 주어진 곡면에서 직접 로봇 운동계수들을 구할 수 있다.

룰드서피스 곡률이론에 대한 공헌을 알아보면 다음과 같다. McCarthy 등⁽³⁾이 기구학 분야에서 선 궤적의 이론적 연구를 목적으로 다루었으며, Ryuh와 Pennock^(4,5,6)은 룰드서피스 곡률이론⁽³⁾과 DoCarmo의 해석기하학적 이론⁽⁷⁾을 로봇 엔드이펙터 운동연구에 응용하였다. Veldkamp⁽⁸⁾는 선 곡률이론의 듀얼공식을 상세하게 나타내었으며, Kirson⁽⁹⁾은 룰드서피스의 고차 경로 곡률이론을 얻기 위한 듀얼 공식을 일반화하였다.

본 논문에서는 로봇경로를 룰드서피스 미분기학(Differential geometry)을 이용하여 3차원 듀얼벡터로 나타내고자 한다. 이는 기존 스칼라곡률이론에 비하여 표현이 간결해지고 계산량을 감소시킬 수 있다.

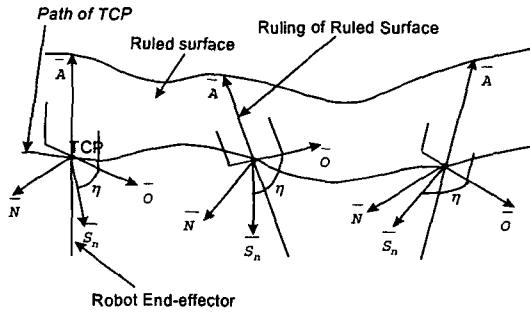


Fig. 1 Ruled surface and spin angle

2. 룰드서피스를 이용한 로봇경로의 표현

로봇의 경로는 공구점과 엔드이펙터 자세각으로 나타낼 수 있다. Fig. 1에서 자세각은 공구점에 부착된 세 개의 직교단위벡터($\bar{O}, \bar{A}, \bar{N}$)로 표시되는데, 이를 공구 좌표계의 단위벡터 \bar{A} 가 생성하는 룰드서피스를 보여 주고 있다. 이 때, 공구점의 경로를 디렉트릭스(Directrix)라고 하며, 벡터 \bar{A} 를 룰드서피스의 룰링(Ruling)이라고 한다. 이렇게 하여 공간 6자유도중 5개 변수를 표현할 수 있으며, 나머지 한 자유도를 표현하기 위하여 스픈각(Spin angle)이라는 변수를 정의한다. 스픈각은 Fig. 1에서 η 로 표시되는데, 이는 공구점상의 단위법선벡터 \bar{S}_n 에서 \bar{O} 까지의 각이다.

이 때, 룰드서피스는 다음과 같이 정의된다.

$$\bar{X}(\psi) = \bar{a}(\psi) + \nu \bar{r}(\psi) \quad (1)$$

여기에서 ν 는 임의의 실수, ψ 는 독립변수, $\bar{a}(\psi)$ 는 디렉트릭스, $\bar{r}(\psi)$ 는 룰링이다. 공구좌표계의 단위벡터중 어떤 것이 룰링으로 사용되어도 일반성을 잃지 않는다. 스픈각 η 는 다음과 같이 표시될 수 있다.

$$\eta = \eta(\psi) \quad (2)$$

룰드서피스와 스픈각으로 로봇 엔드이펙터의 운동을 완전하게 나타낼 수 있으므로 룰드서피스를 해석적인 함수로 기술할 수 있다면 로봇경로계획에 사용될 수 있으며, 룰드서피스가 완전한 함수로 표현될 수 없는 경우에는 별도의 곡선생성기법을 이용하여 룰드서피스를 표현할 수 있다.⁽⁶⁾

3. 룰드서피스의 스칼라곡률이론

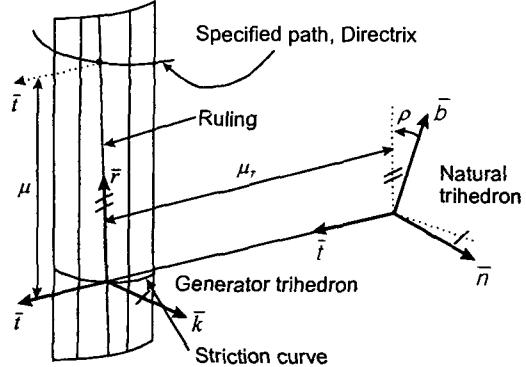


Fig. 2 Frames of reference

로봇경로제어를 위해서는 엔드이펙터의 위치와 자세뿐만 아니라 속도, 가속도, 각속도, 각각속도 등에 대한 정보가 필요한데, 이는 룰드서피스 곡률이론을 통하여 구할 수 있다.

룰드서피스는 Fig. 2와 같이 Generator trihedron과 Natural trihedron이라는 고유 좌표계가 존재한다. Generator trihedron은 Generator 벡터 \bar{r} , Central normal 벡터 \bar{t} , Central tangent 벡터 \bar{k} 등 세 개의 단위직교벡터로 정의된다.

$$\bar{r}, \bar{t} = \frac{\frac{d\bar{r}}{d\psi}}{|\frac{d\bar{r}}{d\psi}|}, \bar{k} = \bar{r} \times \bar{t} \quad (3)$$

식 (1)에서 룰드서피스에 대한 독립변수로 임의의 실수 ψ 가 사용되었는데, 이 식을 간략하고 표준화하기 위하여 ψ 대신 정규화된 새로운 파라미터를 도입한다. 이 표준화된 파라미터로 룰링 $\bar{r}(\psi)$ 의 호길이(Arc length)를 사용하면 편리한데, 호길이 파라미터 s 는 다음과 같이 정의된다.

$$s(\psi) = \int_0^\psi |\frac{d\bar{r}(\phi)}{d\phi}| d\phi \quad (4)$$

여기서, 적분변수 $|\frac{d\bar{r}}{d\phi}|$ 를 룰링 $\bar{r}(\psi)$ 의 각속도(Angular speed)라고 하며, δ 로 표시한다. 만약, $\delta \neq 0$ 이면 식 (4)는 $\bar{r}(s) = \bar{r}(s)$ 의 정의가 가능케 하는 $\psi(s)$ 를 생성하도록 역변환될 수 있다. 또한, 정규화기법을 사용하면 식 (3)의 Central normal 벡터 \bar{t} 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\bar{t} = \bar{r}' \quad (5)$$

여기에서 ' $'$ 은 호의 길이 s 에 대한 미분을 표시한다. Generator trihedron의 원점은 룰드서피스의 Striction point이고, 이 층적을 Striction곡선이라고 하는데, 이는 다음과 같이 정의된다.

$$\bar{\beta}(s) = \bar{a}(s) - \mu(s)\bar{r}(s) \quad (6)$$

여기서 계수 $\mu(s)$ 는 룰드서피스 Striction point로부터

터 공구점의 위치를 나타내는데 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\mu(s) = \bar{\alpha}' \cdot \bar{r} \quad (7)$$

Generator trihedron의 1차 각운동 계수는 다음과 같이 구할 수 있다.⁽⁹⁾

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} \bar{r} \\ \bar{t} \\ \bar{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \gamma \\ 0 & -\gamma & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{r} \\ \bar{t} \\ \bar{k} \end{bmatrix} = \bar{u}_r \times \begin{bmatrix} \bar{r} \\ \bar{t} \\ \bar{k} \end{bmatrix} \quad (8)$$

\bar{u}_r 을 Generator trihedron의 다부(Darboux) 벡터라고 정의하는데, 룰드서피스의 일차 각운동을 설명할 수 있다

$$\bar{u}_r = \bar{\gamma} \bar{r} + \bar{k} \quad (9)$$

γ 는 측지곡률(Geodesic curvature)라고 하며 다음과 같이 정의한다.

$$\gamma = \cot \rho = \bar{r}'' \cdot (\bar{r} \times \bar{r}') \quad (10)$$

룰드서피스의 Striction point의 1차 위치미분값 $\bar{\beta}'$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\bar{\beta}' = \Gamma \bar{r} + \Delta \bar{k} \quad (11)$$

여기에서 Γ 와 Δ 는 다음과 같이 구해진다.

$$\Gamma = \bar{\alpha}' \cdot \bar{r} - \mu', \quad \Delta = \bar{\alpha}' \cdot (\bar{r} \times \bar{r}') \quad (12)$$

식(10)과 (12)에서 정의된 γ, Γ, Δ 를 룰드서피스의 곡률함수(Curvature function)라고 한다.⁽³⁾

Fig. 2에서 Generator trihedron이 Striction곡선을 따라 움직일 때, Central normal 벡터 \bar{t} 는 Central normal surface 또는 Normalia라고 하는 새로운 룰드서피스를 생성한다.⁽¹⁰⁾ Central normal surface는 다음과 같이 정의된다.

$$\bar{X}_T(s, \nu) = \bar{\beta}(s) + \nu \bar{t}(s) \quad (13)$$

Normalia의 위치와 자세를 연구하기 위해 사용되는 Natural trihedron은 Central normal 벡터 \bar{t} , Principal normal 벡터 \bar{n} , Binormal 벡터 \bar{b} 등 세 개의 단위직교벡터로 다음과 같이 정의된다.

$$\bar{t} = \bar{r}', \quad \bar{n} = \frac{1}{x} \bar{t}', \quad \bar{b} = \bar{t} \times \bar{n} \quad (14)$$

여기에서 x 는 룰드서피스의 곡률을 의미하며 다음과 같이 구할 수 있다.

$$x = |\bar{t}'| \quad (15)$$

Natural trihedron 원점은 Normalia의 Striction point이고, 그 궤적은 Normalia의 Striction곡선이라고 하며, 다음과 같이 정의된다.

$$\bar{\beta}_T(s) = \bar{\beta}(s) - \mu_T(s) \bar{t}(s) \quad (16)$$

여기에서

$$\mu_T(s) = \frac{\bar{\beta}' \cdot \bar{t}'}{\bar{t}' \cdot \bar{t}'} \quad (17)$$

식(17)은 Central normal 벡터방향으로 Normalia의 Striction point에서 룰드서피스의 Striction point까지의 거리를 나타낸다. 식(8)과 (11)을 식(17)에 대입하면 μ_T 를 구할 수 있다.

$$\mu_T = \frac{-\Gamma + \Delta \gamma}{1 + \gamma^2} \quad (18)$$

Natural trihedron의 1차 각운동 계수는 다음과 같이 구할 수 있다.⁽⁹⁾

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} \bar{t} \\ \bar{n} \\ \bar{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & x & 0 \\ -x & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{t} \\ \bar{n} \\ \bar{b} \end{bmatrix} = \bar{u}_r \times \begin{bmatrix} \bar{t} \\ \bar{n} \\ \bar{b} \end{bmatrix} \quad (19)$$

\bar{u}_r 을 Natural trihedron의 다부(Darboux) 벡터라고 정의한다.

$$\bar{u}_r = \tau \bar{t} + x \bar{b} \quad (20)$$

룰링의 곡률 x 와 Torsion τ 는 다음과 같이 구해진다.

$$x = \operatorname{cosec} \rho, \quad \tau = -\rho' \quad (21)$$

Normalia의 Striction point의 1차 위치미분값은 다음과 같이 표현된다.

$$\bar{\beta}_T = \Gamma \bar{t} + \Delta \bar{b} \quad (22)$$

여기에서 Γ_T 와 Δ_T 는 다음과 같이 구해진다.

$$\Gamma_T = -\mu_T', \quad \Delta_T = \frac{x \Gamma + \Delta}{x} \quad (23)$$

식(21), (23)에서 정의된 $x, \tau, \Gamma_T, \Delta_T$ 를 Normalia의 곡률함수(Curvature function)라고 한다.⁽³⁾

4. 룰드서피스의 듀얼곡률이론

본 절에서는 룰드서피스 미분기하학을 3차원 듀얼벡터이론을 이용하여 나타내고자 한다. 이 결과는 룰드서피스를 특성 짓는 듀얼 함수의 집합으로 나타난다.

듀얼벡터이론은 선 \bar{X} 의 Plucker 벡터 \bar{r} 과 $\bar{\alpha} \times \bar{r}$ (\bar{r} 은 선 \bar{X} 의 방향을 나타내고, $\bar{\alpha}$ 는 선 \bar{X} 상의 임의의 점이다)를 듀얼벡터 $\bar{r} = \bar{r} + \epsilon \bar{\alpha} \times \bar{r}$ 로 묶어준다. 심볼 ϵ 은 듀얼단위(Dual unit)라고 하는데, ϵ 을 이용한 연산은 $\epsilon^2 = 0$ 라는 성질을 제외하고는 실수에서의 연산과 동일하다. 모든 벡터대수학의 연산은 듀얼벡터의 조작에 사용될 수 있는데, 이 사실은 공간상에서 선을 나타내는데 간단한 벡터연산을 가능하게 하여 계산량을 감소시킬 수 있다는 장점이 있다.

룰드서피스를 나타내는 식 (1)은 다음과 같이 듀얼벡터함수로 나타낼 수 있다.

$$\bar{r}(\psi) = \bar{r}(\psi) + \epsilon \bar{\alpha}(\psi) \times \bar{r}(\psi) \quad (24)$$

Generator trihedron은 Dual generator 벡터 \bar{r} , Dual central normal 벡터 \bar{t} , Dual central tangent 벡터 \bar{k} 등 세 개의 듀얼단위직교벡터로 정의된다.

$$\bar{r}, \quad \bar{t} = \frac{\frac{dr}{d\psi}}{|\frac{dr}{d\psi}|}, \quad \bar{k} = \bar{r} \times \bar{t} \quad (25)$$

룰드서피스 $\hat{\gamma}(\psi)$ 의 둘연 호길이(Dual arc length)는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\hat{s}(\psi) = \int_0^\psi \left| \frac{d\hat{r}}{d\psi} \right| d\psi \quad (26)$$

이 식의 적분항 $|d\hat{r}/d\psi|$ 을 $\hat{\gamma}(\psi)$ 의 둘연속도(Dual velocity) $\hat{\delta}$ 라고 정의하는데, 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\hat{\delta} = \left| \frac{d\hat{r}}{d\psi} \right| = \left| \frac{d\bar{r}}{d\psi} \right| \{1 + \varepsilon \hat{\alpha}' \cdot (\bar{r} \times \bar{r}')\}$$

이 식의 우변 둘연항이 식 (12)에서 정의한 Δ 와 동일하므로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\hat{\delta} = \delta [1 + \varepsilon \Delta] \quad (27)$$

또한 식 (4)와 (26)에서 각각 정의한 s , \hat{s} 사이에는 다음과 같은 관계가 성립된다.

$$\frac{d}{ds} = \frac{1}{(1 + \varepsilon \Delta)} \frac{d}{d\hat{s}} \quad (28)$$

만약, $\hat{\delta} \neq 0$ 이면 식 (24)는 $\hat{\gamma}(\psi(s)) = \hat{\gamma}(s)$ 의 정의가 가능케 하는 $\psi(s)$ 를 생성하도록 역변환될 수 있다. 또한, 정규화기법을 사용하면 식 (25)의 Dual central normal 벡터 \hat{t} 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\hat{t} = \frac{d\hat{r}}{d\hat{s}} \quad (29)$$

룰드서피스 Generator trihedron의 1차 둘연 각미분값은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} \hat{r} \\ \hat{t} \\ \hat{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \hat{\gamma} \\ 0 & -\hat{\gamma} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{r} \\ \hat{t} \\ \hat{k} \end{bmatrix} = \hat{u}_r \times \begin{bmatrix} \hat{r} \\ \hat{t} \\ \hat{k} \end{bmatrix} \quad (30)$$

둘연벡터 \hat{u}_r 을 Generator trihedron의 Dual Darboux vector라고 정의한다.

$$\hat{u}_r = \hat{\gamma} \hat{r} + \hat{k} \quad (31)$$

$\hat{\gamma}$ 는 둘연축지곡률(dual geodesic curvature)라고 하며 다음과 같이 정의한다.

$$\hat{\gamma} = \frac{dt}{ds} \cdot \hat{k} \quad (32)$$

Fig. 3은 둘연 기준좌표계 $\hat{r}, \hat{t}, \hat{k}$ 와 $\hat{t}, \hat{n}, \hat{b}$ 사이의 관계를 나타내고 있다. 둘연좌표계 \hat{k}, \hat{r} 은 둘연좌표계 \hat{n}, \hat{b} 를 둘연축 \hat{t} 를 기준으로 $\hat{\rho}$ 만큼 회

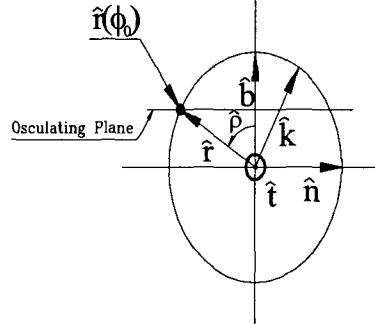


Fig. 3 Relation between $\hat{r}, \hat{t}, \hat{k}$ and $\hat{t}, \hat{n}, \hat{b}$

전시킨 것과 같다. 이 때, 둘연각(Dual angle) $\hat{\rho}$ 는 $\sin \hat{\rho} = 1/\hat{x}$ 의 관계에서 다음과 같이 구해진다.

$$\hat{\rho} = \arcsin \left(\frac{1}{\hat{x}} \right) \quad (33)$$

Natural trihedron의 1차 각미분값은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{d}{ds} \begin{bmatrix} \hat{t} \\ \hat{n} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \hat{x} & 0 \\ -\hat{x} & 0 & \hat{\tau} \\ 0 & -\hat{\tau} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{t} \\ \hat{n} \\ \hat{b} \end{bmatrix} = \hat{u}_r \times \begin{bmatrix} \hat{t} \\ \hat{n} \\ \hat{b} \end{bmatrix} \quad (34)$$

둘연벡터 \hat{u}_r 를 Natural trihedron의 Dual darboux vector라고 정의한다.

$$\hat{u}_r = \hat{\tau} \hat{t} + \hat{x} \hat{b} \quad (35)$$

\hat{x} 를 룰드서피스의 둘연곡률(Dual curvature), $\hat{\tau}$ 를 둘연 비틀림률(Dual torsion)이라고 하며, 다음과 같이 정의한다.

$$\hat{x} = \sqrt{1 + \hat{\gamma}^2} \quad (36)$$

$$\hat{\tau} = - \frac{d\rho}{ds} = \frac{\frac{dx}{ds}}{\hat{x}^2} \quad (37)$$

5. 스칼라 및 둘연곡률이론의 합성

앞에서 룰드서피스 스칼라곡률이론과 둘연곡률이론에 대하여 알아보았다. 이 중 둘연 곡률이론은 둘연 구곡선(Dual spherical curve) 형태인 룰드서피스를 해석하는데 편리한 도구로서 구상에 있는 곡선의 미분기하학에서 얻어지는 것과 동일한 공식들을 생성한다. 이 도구는 매우 효과적이어서 striction curve, Distili axis, 분배 변수(Distribution parameter), 곡률(Durvature) 함수 등 중요한 기하학적 개념을 함축시킨다. 본 절에서는 룰드서피스 스칼라곡률이론과 둘연곡률이론 사이의 관계에 대하여 고찰하고, 둘연곡률함수 $\hat{\gamma}$, \hat{x} , $\hat{\tau}$ 를 스칼라 곡률함수 γ , Δ , Γ 와 Δ_T , ρ , μ_T 등을 이용하여 구하는 방법에 대하여 알아보도록 한다.

식 (29)에서 얻은 뉴얼벡터 \hat{t} 는 $\hat{\gamma}$ 의 Central normal vector로 다음과 같이 표시된다.

$$\hat{t} = \bar{t} + \epsilon \bar{\beta} \times \bar{t} \quad (38)$$

이 식을 \hat{s} 에 대하여 미분하면

$$\frac{dt}{ds} = -\hat{\gamma} + \frac{(\gamma + \epsilon \Gamma)}{1 + \epsilon \Delta} \hat{k}$$

이 식과 식 (30)을 비교하면 뉴얼측지곡률 $\hat{\gamma}$ 와 측지곡률 γ 사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$\hat{\gamma} = \frac{\gamma + \epsilon \Gamma}{1 + \epsilon \Delta} = \gamma + \epsilon (\Gamma - \gamma \Delta) \quad (39)$$

식 (38)을 \hat{s} 에 대하여 미분하면 다음과 같이 표시될 수도 있다.

$$\frac{dt}{ds} = \frac{x + \epsilon \Delta_T}{1 + \epsilon \Delta} \hat{n}$$

이 식과 식 (34)를 비교하면 뉴얼곡률 \hat{x} 와 곡률 x 사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$\hat{x} = \frac{x + \epsilon \Delta_T}{1 + \epsilon \Delta} = x + \epsilon (\Delta_T - x \Delta) \quad (40)$$

또한, 뉴얼 비틀림율 $\hat{\tau}$ 과 비틀림율 τ 사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$\hat{\tau} = \frac{\tau + \epsilon \Gamma_T}{1 + \epsilon \Delta} = \tau + \epsilon (\Gamma_T - \tau \Delta) \quad (41)$$

이밖에 뉴얼각 $\hat{\rho}$ 와 회전각 ρ , μ_T 사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\hat{x}} &= \frac{1}{x} + \epsilon \frac{\gamma}{x} \mu_T \\ \frac{\hat{\gamma}}{\hat{x}} &= \frac{\gamma}{x} - \epsilon \frac{1}{x} \mu_T \\ \hat{\rho} &= \rho + \epsilon \mu_T \end{aligned} \quad (42) \quad (43)$$

앞에서 룰드서피스에 대한 미분기하학의 스칼라 곡률이론과 뉴얼곡률이론의 통합에 대하여 알아보았다. 또한, 룰드서피스가 어떻게 표시되더라도 곡률 함수 γ , Δ , Γ 또는 이와 동등한 집합 x , Δ_T , ρ , μ_T 는 룰드서피스의 형상을 묘사하는 기본 기하정보를 갖는다고 할 수 있다.

6. 로봇경로계획

본 절에서는 로봇경로제어를 위한 정보, 즉 공구점의 선운동계수와 공구좌표계의 각운동계수를 구하는 방법에 관하여 알아본다. 선 및 각운동계수는 3차 이상 고차항까지도 구할 수 있으나 현재의 로봇제어기술수준을 고려하여 2차항까지 구하는 것으로 한다. 이를 위하여 즉 공구점의 선운동계수와 공구좌표계의 각운동계수를 디렉트릭스 \bar{a} 와 룰링 \bar{r} , 그리고 그 미분계수들로써 표현한다.

먼저, Generator trihedron의 Central normal 벡터 \bar{t} , Central tangent 벡터 \bar{k} 는 식 (3), (5)에서 다음과 같이

표현된다.

$$\bar{t} = \bar{r}', \quad \bar{k} = \bar{r} \times \bar{t}' \quad (44)$$

공구점의 1, 2차 위치 미분값은 Generator trihedron 좌표계에서 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \bar{a}' &= (\Gamma + \mu') \bar{r} + \mu \bar{t} + \Delta \bar{k} \\ \bar{a}'' &= (\Gamma' + \mu'' - \underline{\mu}) \bar{r} + (\Gamma + 2\mu' - \Delta \gamma) \bar{t} \\ &\quad + (\Delta' + \mu \gamma) \bar{k} \end{aligned} \quad (45)$$

각 계수는 다음과 같이 구하여 진다.

$$\begin{aligned} \mu &= \bar{a}' \cdot \bar{r}' \\ \mu' &= \bar{a}'' \cdot \bar{r}' + \bar{a}' \cdot \bar{r}'' \\ \mu'' &= \bar{a}''' \cdot \bar{r}' + 2\bar{a}'' \cdot \bar{r}'' + \bar{a}' \cdot \bar{r}''' \end{aligned} \quad (46)$$

$$\begin{aligned} \Gamma &= \bar{a}' \cdot \bar{r} - \mu' \\ \Gamma' &= \bar{a}'' \cdot \bar{r} + \mu - \mu'' \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \Delta &= \bar{a}' \cdot (\bar{r} \times \bar{r}') \\ \Delta' &= \bar{a}'' \cdot (\bar{r} \times \bar{r}') + \bar{a}' \cdot (\bar{r} \times \bar{r}'') \\ \gamma &= \bar{r} \cdot (\bar{r}' \times \bar{r}'') \end{aligned} \quad (48)$$

공구좌표계의 1, 2차 각도 미분값은 Generator trihedron 좌표계에서 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \bar{u}_0 &= \underline{\Omega} \bar{r} + \bar{k}, \\ \bar{u}_0' &= \underline{\Omega} \bar{r} + (\eta' + \sigma') \bar{t} \end{aligned} \quad (49)$$

각 계수는 다음과 같이 구하여 진다.

$$\begin{aligned} \underline{\Omega} &= \eta' + \sigma' + \gamma \\ \underline{\Omega}' &= \eta'' + \sigma'' + \gamma' \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} \sigma' &= \frac{\Delta'}{\mu} - \frac{\Delta}{\mu} \left(\frac{\Delta \Delta' + \mu \mu'}{\Delta^2 + \mu^2} \right) \\ \sigma'' &= \frac{\Delta'' \mu - \Delta' \mu'}{\mu^2} - \left(\frac{\Delta' \mu - \Delta \mu'}{\mu^2} \right) \left(\frac{\Delta \Delta' + \mu \mu'}{\Delta^2 + \mu^2} \right) \\ &\quad - \frac{\Delta}{\mu} \frac{(\Delta'^2 + \Delta \Delta' + \mu \mu'' + \mu'^2)(\Delta^2 + \mu^2) - 2(\Delta \Delta' + \mu \mu')^2}{(\Delta^2 + \mu^2)} \end{aligned}$$

$$\Delta'' = \bar{a}''' \cdot (\bar{r} \times \bar{r}') + 2\bar{a}'' \cdot (\bar{r} \times \bar{r}'') + \bar{a}' \cdot (\bar{r}' \times \bar{r}'' + \bar{r} \times \bar{r}''') \quad (51)$$

여기서 η' , η'' 는 스핀각의 1, 2차 미분값이다.

식(45)은 공구점의 1, 2차 위치미분값에 대한 표현이고, 식(49)은 공구좌표계의 1, 2차 각도미분값에 대한 표현이다. 따라서, 속도, 가속도, 각속도, 각각속도 등 시간에 따른 특성을 구하기 위해서는 연쇄법칙을 적용한다. 이 경우 공구점의 속도 및 가속도는 다음과 같다.

$$\bar{v} = \bar{a}' \dot{s}, \quad \bar{a} = \bar{a}'' \ddot{s} + \bar{a}''' \dot{s}^2 \quad (52)$$

공구좌표계의 각속도 및 각각속도는 다음과 같다.

$$\bar{\omega} = \bar{u}_0 \dot{s}, \quad \bar{\omega} = \bar{u}_0 \ddot{s} + \bar{u}_0' \dot{s}^2 \quad (53)$$

7. 결론

본 논문에서는 로봇의 경로를 룰드서피스 미분기하학(Differential geometry)을 이용하여 3차원 뉴얼벡터로 나타내는 방법에 대하여 설명하였다. 룰드서피

스 곡률이론은 수학적으로 난해한 분야 중 하나이지만 현재 로봇경로제어에 주로 사용되는 보간법과 달리 곡면의 미분기하학을 이용하여 직접 로봇의 운동 계수를 구할 수 있다.

본 논문에서 제안한 듀얼곡률이론은 기존 스칼라 곡률이론에 비하여 표현이 간결해지고 계산량을 감소시킬 수 있다는 장점이 있다. 아울러, 르드서피스 스칼라곡률이론과 듀얼곡률이론을 적절히 사용하면 르드서피스에서 중요한 곡률함수들을 손쉽게 구할 수 있고, 구한 값들의 결합이 가능하며, 운동계수를 3차 이상까지 확장하여 구할 수 있으므로 향후 로봇의 정밀제어를 위한 방법으로 널리 사용되리라 사료된다.

참고문헌

1. Litvin, F. L. and Gao, X. C., "Analytical Representation of Trajectory of Manipulators," Trends and Developments in Mechanisms, Machines, and Robotics, The 1988 ASME Design Technology Conferences-20th Biennial Mechanisms Conference, Vol. 15-3, pp. 481~485, 1988.
2. Paul, R. P., "Manipulator Cartesian Path Control," IEEE Trans. Systems, Man., Cybernetics, Vol. SMC-9, No. 11, pp. 702~711, 1979.
3. McCarthy, J. M. and Roth, B., "The Curvature Theory of Line Trajectories in Spatial Kinematics," ASME J. of Mechanical Design, Vol., 103, No. 4, pp. 718~724, 1981.
4. Ryuh, B. S. and Pennock, G. R., "Accurate Motion of a Robot End-Effector using the Curvature Theory of a Ruled Surface," ASME J. of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design, Dec., Vol. 110, No. 4, pp. 383~388, 1988.
5. Ryuh, B. S., "Robot Trajectory Planning using the Curvature Theory of Ruled Surfaces," Doctoral dissertation, Purdue University, West Lafayette, Indiana, pp. 143, 1989.
6. Ryuh, B. S. and Pennock, G. R., "Trajectory Planning Using the Ferguson Curve Model and Curvature Theory of Ruled Surface," ASME J. of Mechanical Design, Vol. 112, No. 3, pp. 377~383, 1990.
7. DoCarmo, M. P., Differential Geometry of Curves and Surfaces, Prentice-Hall, New Jersey, pp. 503, 1976.
8. Veldkamp, G., R., "On the Use of Dual Numbers, Vectors and Matrices in Instantaneous, Spatial Kinematics," Mechanism and Machine Theory, Vol. 11, No. 2, pp. 141-158, 1976.
9. Kirson, Y., "High Order Curvature Theory in Space Kinematics," doctoral dissertation, University of California, Berkeley, pp. 140, 1975.
10. Guggenheimer, H., Differential Geometry, Dover Publications, pp. 378, 1977.