

비 균일 표본화 신호의 완전 복구에 관한 연구

이 회 영, 정 현 권

전남대학교 전자컴퓨터정보통신 공학부

전화 : 062-530-1751(연), 062-530-0132(실) / 핸드폰 : 018-603-2765

Perfect Reconstruction in Sub-Nyquist Nonuniform Sampling of Signals with Known upper Time-frequency Boundary

Heyoung Lee and Hyun-Gwon Jung

Dept. of Electronics, computer and Telecommunication

Chonnam National University

E-mail : leehy@chonnam.ac.kr, jhg@moiza.chonnam.ac.kr

Abstract

The problem of sub-Nyquist nonuniform sampling for the perfect reconstruction of signals with time-varying spectral contents is studied. The signals are assumed to have a known instantaneous bandwidth in time-frequency domain. As the function of time, the nonuniform sampling pattern of a given signal, that is, the instantaneous sampling frequency is determined by the observation of instantaneous bandwidth based on time-frequency analysis. The proposed sampling pattern guarantees the perfect reconstruction of nonuniform sampled signals under Nyquist-sampling rate in average.

I. 서론

대역 제한 신호에 대한 Nyquist 와 Shannon의 균일 표본화 이론(uniform sampling theorem)은 공학의 가장 기본적인 도구의 하나로 많은 응용을 가지고 있다 [2][8]. 주어진 신호의 표본화율을 낮추고 단점을 극복하기 위한 방법으로서 비 균일 표본화(nonuniform sampling)에 대한 많은 연구가 이루어지고 있다 [2-8].

인간의 시각 시스템의 경우 시각 세포가 중심부는 밀도가 높고 주변은 밀도가 낮으므로 공간적으로 비 균일 표본화 및 처리 기능을 가지고 있다 [3]. 이와 같은 생물학적 시각 시스템을 모사하고 그 특성을 이용하기 위한 영상의 비 균일 표본화 방법 및 복구방법이 연구되고 있다 [2-3].

센서 배열 영상 시스템(sensor array imaging system), SAR 시스템(synthetic aperture radar system), MRI 영상 시스템(magnetic resonance imaging system) 등에서 Sub-Nyquist 표본화 및 복구 방법은 비용을 줄이고 시스템의 한계 극복이라는 측면에서 많은 응용을 가지고 있다 [8].

여러 가지 관점에서 대역 제한 신호를 Nyquist 표본화율 이하로 비 균일 표본화하는 방법 및 이의 완전 복구 방법이 연구되고 있다. 참고 문헌 [7-8]에서 대역 제한된 다중 대역 신호 (multiband signals)의 특성을 이용한 비 균일 표본화 및 복구 방법이 연구되었다. 주파수 영역에서 빈 공간이 있는 다중 대역 신호에서 표본화율이 Nyquist 표본화율 보다 적을 경우에도, 주파수 영역에서 중첩된 신호가 주파수 대역의 빈 공간을 차지하면 같은 주파수 대역을 공유하지 않으므로 완전 복구 할 수 있다 [7-8].

본 연구에서는 [7-8]과는 다른 관점에서 신호의 순시 대역폭(instantaneous bandwidth)이 시간-주파수(time-frequency) 영역에서 시간에 따라 변하는 신호의 비 균일 표본화 방법 및 복구 방법을 다루었다. 비

균일 표본화 패턴 즉 순시 표본화 주파수 (instantaneous sampling frequency)가 시간의 함수로서 결정된다. 이와 같이 표본화된 신호의 완전 복구를 위한 공식이 유도되었다. 순시 대역폭이 변하는 경우 평균 표본화율은 Nyquist 표본화율보다 작으며 순시 대역폭이 일정한 경우 평균 표본화율은 Nyquist 표본화율과 같다.

II. 비 균일 표본화

신호의 비 균일 표본화 방법을 유도하기 위하여 Dirac 충격 함수(Dirac impulse function)의 몇 가지 성질을 살펴보자.

2.1 Dirac Delta 함수의 성질[1]

Dirac 충격 함수는 a 가 상수일 경우 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$\delta(at) = \frac{1}{a} \delta(t), \quad a > 0 \quad (1)$$

여기서 $\delta(t)$ 는 단위 Dirac 충격 함수이다. Dirac 충격 함수의 인자(argument)가 실수축에서 단순 영점 (simple zero)을 갖는 함수인 경우는 다음 관계가 성립한다.

$$\delta(h(t)) = \sum_{\substack{h(a)=0, \\ (d(h(t))/dt)|_{t=a} \neq 0}} \frac{\delta(t-a)}{|h'(a)|} \quad (2)$$

Dirac 충격 함수에 대한 위의 성질들은 다음과 같이 증명할 수 있다.[1].

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(at)dt &= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{s}{a}\right)\delta(s)ds \\ &= \frac{1}{a} f(0) \end{aligned} \quad (3)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(h(t))dt = \sum_a \int_{a-\epsilon}^{a+\epsilon} f(t)\delta((t-a)h'(a))dt \quad (4)$$

식 (4)에서 $h(t)$ 는 시간 축에서 단순 영점 (simple zero) 만을 갖는 함수이므로 함수 $h(t)$ 를 단순 영점에서 Taylor 급수(Taylor series)는 다음과 같이 표현된다.

$$h(t) \approx h(a) + (t-a)h'(a) = (t-a)h'(a) \quad (5)$$

$t=a$ 는 단순 영점이므로 $h'(a) \neq 0$ 이다. $h(t)$ 의 모든 단순 영점에서 각각 1개의 영점을 포함하는 작은 구간으로 나누어 적분을 할 경우 식 (4)를 얻을 수 있다. 식 (1)과 (4)를 사용하면 식 (2)를 얻을 수 있다.

2.2 비 균일 표본화

그림 1과 같은 형태의 비 균일 표본화 방법을 고려하자. 여기서 $x_c(t)$ 는 신호이고 $s_c(t)$ 는 비 균일 표본화 충격 열(nonuniform sampling impulse train)이다. $s_c(t)$ 는 다음과 같은 형태의 함수(generalized function: distribution)이다.

$$s_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\int_0^t \frac{1}{g(\tau)} d\tau - Tn\right) \quad (6)$$

여기서 n 는 정수, T 는 어떤 양의 실수이며 $g(t) > 0$ 이다. 또한

$$m(t) = \int_0^t \frac{1}{g(\tau)} d\tau \quad (7)$$

함수 $g(t)$ 가 양이므로 $m(t)$ 는 역함수(inverse function) $m^{-1}(t)$ 를 갖는다.

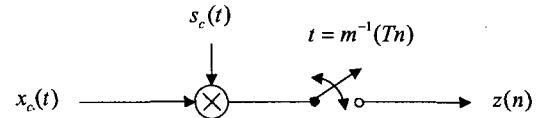


그림 1. 비 균일 표본화기의 신호 흐름도

식 (2)에 의하면 비 균일 표본화 열 (6)은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} s_c(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - m^{-1}(Tn))g(t) \\ &= \bar{s}_c(t)g(t) \end{aligned} \quad (8)$$

여기서,

$$\bar{s}_c(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - m^{-1}(Tn)) \quad (9)$$

그림 1과 등가이면서 물리적으로 실현 가능한 비 균일 표본화기를 그림 2에 나타냈다.

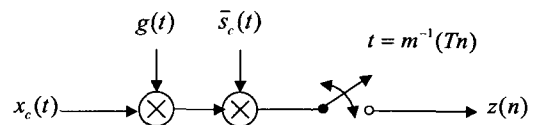


그림 2. 물리적으로 구현 가능한 비 균일 표본화기의 신호 흐름도

그림 3에 비 균일 표본화 과정을 각 단계별로 나타내었다. 비 균일 표본화기의 출력 수열 $z(n)$ 는 식 (10)과 같다. 또한 시간 관계를 고려한 출력 $z_c(m^{-1}(nT))$ 는 (11)과 같다.

$$z(n) = x(n)g_1(n) \quad (10)$$

$$z_c(m^{-1}(nT)) = x_c(m^{-1}(nT))g(m^{-1}(nT)) \quad (11)$$

여기서 $g_1(n)$ 은 함수 $g(t)$ 의 표본화된 신호의 수열 표현이다.

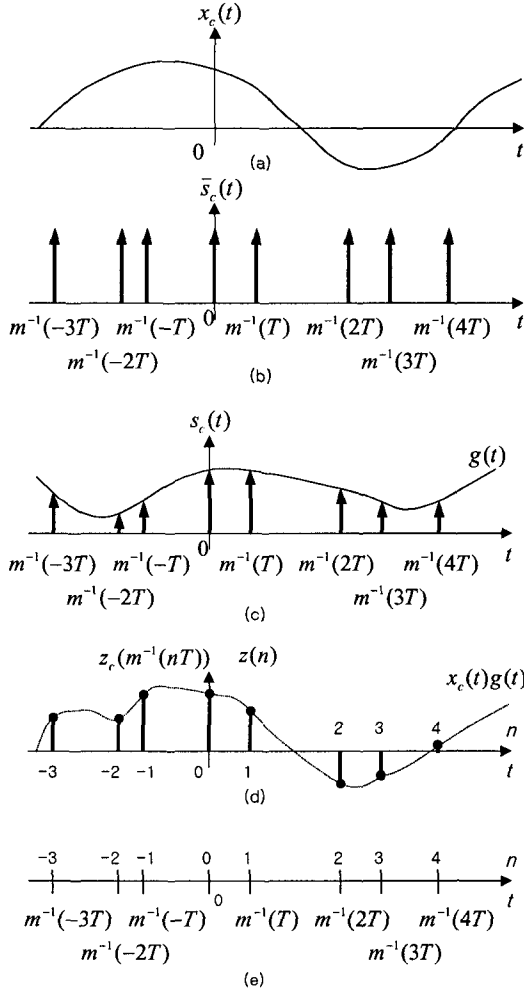


그림. 3 비 균일 표본화기의 시간영역 표현. (a) 연속 시간 신호. (b) 비 균일 임펄스 열. (c) 변조된 비 균일 임펄스 열. (d) 표본화 된 신호의 수열(sequences) 표현. (e) t 축과 n 축의 대응관계.

III. 비 균일 표본화 신호의 복구

비 균일 표본화 된 신호의 완전 복구 표현을 얻기 위하여 표본화 된 신호를 다음과 같이 주파수 영역으로

변환하자. 여기서 ω 는 확장 후리에 변환의 주파수 변수이다.

$$X_c(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_c(t) \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(m(t) - nT) \right) e^{-i\omega m(t)} dt \quad (12)$$

$a = m(t)$ 로 치환하면,

$$\begin{aligned} X_c(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_c(m^{-1}(a)) \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(a - nT) \right) e^{-i\omega a} da \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} y(a) \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(a - nT) \right) e^{-i\omega a} da \end{aligned} \quad (13)$$

여기서 $y(a) = x_c(m^{-1}(a))$ 이다.

T 가 신호 $y(a)$ 의 Nyquist 표본화 구간(sampling interval)일 경우 신호 $y(a)$ 는 완전 복구된다. 그러므로 표본화 이론으로부터 $y(a)$ 는 다음과 같다.

$$y(a) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T y(nT) \frac{\sin\left(\frac{\pi(a-nT)}{T}\right)}{\pi(a-nT)} \quad (14)$$

여기서 $y(nT) = x_c(m^{-1}(nT))$ 이다.

식 (13)으로부터 다음 관계식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} x_c(t) &= x_c(m^{-1}(a)) \Big|_{a=m(t)} \quad (15) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} T y(nT) \frac{\sin\left(\frac{\pi(m(t)-nT)}{T}\right)}{\pi(m(t)-nT)} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} T x_c(m^{-1}(nT)) \frac{\sin\left(\frac{\pi(m(t)-nT)}{T}\right)}{\pi(m(t)-nT)} \end{aligned}$$

한편 식 (10)과 비 균일 표본화기의 출력으로부터 $z_c(m^{-1}(nT))$ 을 얻을 수 있다. 식 (15)는 비 균일 표본화된 신호로부터 복구된 신호를 나타낸다.

IV. 표본화 패턴

식 (6)에 의하면 표본화는 Dirac 함수의 인자가 0이 될 때 일어나므로 n 에 따른 표본화 시점 t_n 는 다음과 같다.

$$t_n = m^{-1}(nT) \quad (16)$$

여기서 $t_0 = 0$ 이다.

모든 정수 n 에 대하여 다음 관계를 만족한다.

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{1}{g(t)} dt = T \quad (17)$$

식 (16), (17)에 의해서 시간 축에서 표본화 순간이 결정된다. 다음 번 표본화 순간은 식 (16) 또는 (17)로부터 결정된다. 식 (16)으로부터 순시 표본화 주파수 (instantaneous sampling frequency)를 다음과 같이 정의 할 수 있다.

$$\text{순시 표본화 주파수} = \frac{1}{t_{n+1} - t_n} \quad (18)$$

순시 표본화 주파수는 표본화가 일어나는 점에서만 정의된다.

함수 $1/g(t)$ 를 주어진 시간-주파수 공간에서 신호의 순시 대역폭(instantaneous bandwidth)으로 취한다. 시간-주파수 공간에서 신호를 관찰 할 경우 불확정성 원리(uncertainty principle) 때문에 정확한 순시 대역폭을 알아낼 수 없다. 그러나 시간-주파수 공간에서 신호가 차지하고 있는 상위 경계점(upper boundary)를 시간의 함수로 구할 수 있다. 이 경계를 표본화 패턴을 결정하는 함수 $1/g(t)$ 로 정한다.

V. 결론 및 향후 연구

신호의 비 균일 표본화 방법 및 완전 복구 방법이 제안되었다. 표본화 패턴은 시간-주파수 공간에서 신호의 순시 대역폭에 의해서 결정된다. 즉 순시 표본화 주파수 시간-주파수 공간에서 시간의 함수로 나타낼 경우 신호의 순시 대역폭과 일치한다. 순시대역폭을 정확히 알 수 없으므로, 본 논문에서는 시간-주파수 공간에서 신호의 상위 경계를 순시 표본화 주파수로 결정하였다. 순시 대역폭이 무엇인가에 대한 여러 가지 정의 및 연구가 있어 왔다. 순시대역폭을 정확히 추정할 경우 표본화율을 더욱 낮출 수 있다. H/W를 사용한 비 균일 표본화된 신호의 복구에 대한 연구 필요하다.

Reference

[1] George B. Arfken and Hans J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*, 4th Edition, Academic Press, pp. 81-87, 1995.
 [2] P. P. Vaidyanathan, "Generalizations of the Sampling Theorem: Seven Decades After Nyquist", *IEEE Tr. on Circuits and Systems-I*, vol. 48, no. 9, pp.1094-1109, Sep., 2001.
 [3] Yehoshua Y. Zeevi and Eyal Shlomot, "Nonuniform Sampling and Antialiasing in Image Representation", *IEEE Tr. on Signal Processing*,

vol. 41, no. 3, pp.1223-1236, Mar., 1993.

[4] Yonina C. Eldar and Alan V. Oppenheim, "Filterbank Reconstruction of Bandlimited Signals from Nonuniform and Generalized Samples", *IEEE Tr. on Signal Processing*, vol. 48, no. 10, pp. 2864-2875, Oct., 2000.
 [5] Daniel Seidner and Meir Feder, "Noise Amplification of Periodic Nonuniform Sampling", *IEEE Tr. on Signal Processing*, vol. 48, no. 1, pp. 275-277, Jan., 2000.
 [6] Jonathan A. Legg and Douglas A. Gray, "Performance Bounds for polynomial Phase Parameter Estimation with Nonuniform and Random Sampling Schemes", *IEEE Tr. on Signal Processing*, vol. 48, no. 2, pp. 331-337, Feb., 2000.
 [7] Raman Venkataramani and Yoram Bresler, "Perfect Reconstruction Formulas and Bounds on Aliasing Error in Sub-Nyquist Nonuniform Sampling of Multiband Signals", *IEEE Tr. on Information Theory*, vol. 46, no. 6, pp. 2173-2183, Sep., 2000.
 [8] Raman Venkataramani and Yoram Bresler, "Optimal Sub-Nyquist Nonuniform Sampling and Reconstruction for Multiband Signals", *IEEE Tr. on Signal Processing*, vol. 49, no. 10, pp. 2301-2313, Oct., 2001.