

## 일반화된 이동최소자승법과 이를 이용한 얇은 보의 무요소 해석

### Generalized Moving Least Squares Method and its use in Meshless Analysis of Thin Beam

조진연\*  
Jin Yeon Cho

---

#### ABSTRACT

In meshless methods, the moving least squares approximation technique is widely used to approximate a solution space because of its useful numerical characters such as non-element approximation, easily controllable smoothness, and others. In this work, a generalized version of the moving least squares method is introduced to enhance the approximation performance through the information concerning to the derivative of the field variable. The results of numerical tests for approximation verify the improved accuracy of the generalized meshless approximation procedure compared to the conventional moving least squares method. By using this generalized moving least squares method, meshless analysis of thin beam is carried out, and its performance is investigated.

---

#### 1. 서 론

1990년대 이후 3차원 해석시 복잡한 요소생성 및 재생성, 요소의 뒤틀림 등 유한요소의 문제점을 극복하기 위해 무요소법에 대한 연구가 꾸준히 수행되어왔다. 무요소법은 발상의 전환을 통하여 유한요소의 테두리를 과감히 벗어난 새로운 형태의 전산역학적 접근방식으로서, 요소(element) 없이 모델링 단계부터 해석을 수행하자는 것이다. 초기 무요소법으로는 1970년대부터 천체물리학, 유체역학 분야에서 개발된 SPH법(Smoothed Particle Hydrodynamics)[1]이나 Particle In Cell(PIC)[2] 등을 들 수 있다. 이후 1990년대에 무요소법에 대한 많은 연구가 수행되었으며, 그 결과 각종 무요소법이 개발되었다. 무요소법은 그 짧은 역사에도 불구하고 다양한 이름으로 불리게 되었는데, 이러한 연유는 기존 유한요소법의 난점인 요소 생성의 어려움을 극복하려는 목적으로 광범위한 분야에서 연구가 동시 다발적으로 수행되었기 때문이다. 이러한 대표적 방법들로는 DEM(Diffuse Element Method)[3], EFG(Element Free Galerkin Method)[4], RKPM (Reproduce Kernel Particle Method)[5], Finite Point Method[6], Hp-Clouds Method[7], Generalized FEM[8],

---

\* 인하대학교 항공우주공학과 전임강사

Meshless Local Petrov-Galerkin Method[9,10] 등을 들 수 있다. 이 방법들은 모두 요소(혹은 격자)를 필요로 하지 않는 보간방법을 사용하고 있다. 예를 들어 DEM, EFG, MLPG 등은 이동최소자승법(Moving Least Squares Method)[11]을 사용하고 있으며, RKPM법은 기존의 커널근사법을 개선시킨 RKPM법[5]을 사용하고 있고, Hp-Clouds, Generalized FEM법은 PUM(Partition of Unity Method)[8]을 이용하고 있다.

그러나 이러한 기존 무요소 보간기법의 경우 대부분 근사함수를 구할 때 함수값 만을 이용하기 때문에 보, 판, 각 등 기울기와 곡률의 영향이 중요한 역학문제를 다루는 데 있어서는 근사의 정확도가 떨어질 가능성이 높다. 그러므로 본 논문에서는 기울기, 곡률 등 미분정보를 함수의 근사화 절차에 포함시킬 수 있는 일반화된 이동최소자승법(GMLS)[10]을 소개하고 미분치 근사성능을 살펴본 후 이를 이용하여 기울기와 곡률이 중요한 영향을 미치는 얇은 보에 적용하여 무요소 해석을 수행한다.

## 2. 일반화된 이동최소자승법

본 절에서는 이동최소자승근사법(Moving Least Square Interpolation)을 일반화시켜 변수의 미분과 관련한 정보를 무요소 근사식에 통합시킬 수 있는 일반화된 MLS(GMLS : Generalized Moving Least Square) 근사 기법을 소개한다. 이동최소자승법(MLS)은 함수를 근사시키기 위하여 해석영역에 흩어져 있는 점들에서의 종속 변수값을 필요로 하는 방법이다. 그러나 각 점에서의 미분치에 관한 정보를 얻을 수 있는 물리적 상황을 다룰 경우에 이러한 절점에서의 미분정보를 함수값과 함께 이용할 수 있다면 더욱 정확한 근사함수를 구할 수 있다. 예를 들어 얇은 보의 지배방정식인 4차 경계치 미분방정식은 2차 경계치 미분방정식 문제와는 달리 동일한 지점에서 변위와 기울기에 관한 경계조건이 부가될 수 있기 때문에, 4차 경계치 미분방정식 문제를 다룰 때에는 변위와는 독립적인 또 다른 변수로서 기울기에 관한 정보를 도입할 수 있는 근사기법을 사용하는 것이 더욱 효율적이다. 이를 위하여 본 논문에서는 현재 무요소 해석에서 널리 사용되고 있는 MLS방법을 일반화시켜 독자적인 기울기 정보를 근사기법 안에 포함시킬 수 있는 일반화된 이동최소자승법(GMLS)을 소개한다. 이렇게 유도된 GMLS법은 다양한 무요소법과 연결되어 질 수 있으며, 본 논문에서는 MLPG의 Petrov-Galerkin법을 이용하여 얇은 보에 관한 해석을 수행하였다.

일반화된 이동최소자승법을 설명하면 아래와 같다. 이동최소자승법과 마찬가지로 일반화된 이동최소자승법에서는 주어진 영역에서 함수를 근사시키기 위하여 아래 식 (1)과 같은 형태의 전역 근사식을 가정한다.

$$u(\mathbf{x}) \cong u^h(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_{basis}} p_i(\mathbf{x})a_i(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \quad (1)$$

여기서  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ 는 계수벡터의 의미를 가지고 있으며,  $\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = [p_1(\mathbf{x}), p_2(\mathbf{x}), \dots, p_{N_{basis}}(\mathbf{x})]$  는 조건(2)와 같이 '1'을 포함하고, 연속성과 선형독립성을 유지할 수 있도록 선정한다.

$$p_1(\mathbf{x}) = 1 \quad (2a)$$

$$p_i(\mathbf{x}) \in C^r(\Omega), \quad i = 1, \dots, N_{basis} \quad (2b)$$

$$\exists \{ \tilde{\mathbf{x}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{x}}_{N_{basis}} \} \subset \{ \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{N_{node}} \} \text{ such that } \{ \mathbf{p}(\tilde{\mathbf{x}}_1), \dots, \mathbf{p}(\tilde{\mathbf{x}}_{N_{basis}}) \} \text{ is linearly independent.} \quad (2c)$$

예를 들어 1차원의 경우 다항식을 이용하여 (Nbasis-1)차 기저를 다음과 같이 구성할 수 있다.

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = [1, x, x^2, \dots, x^{N_{basis}-1}] \quad (3)$$

이제 해석 영역  $\mathbf{x} \in \Omega$ 에서의 전역근사함수의 계수벡터  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ 를 얻기 위하여 아래 식(4)의 지역근사함수를 도입하고, 가중최소자승법의 의미에서 지역근사함수가 국부적으로  $\bar{\mathbf{x}}$ 주위에서 주어진 함수  $u$ 에 대한 최적의 근사함수가 될 수 있도록 계수벡터  $\mathbf{a}(\bar{\mathbf{x}})$ 를 결정한다.

$$u(\mathbf{x}) \cong u_{\bar{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{a}(\bar{\mathbf{x}}), \quad \forall \mathbf{x} \in nbd(\bar{\mathbf{x}}) \quad (4)$$

이때 종속변수값 자체만을 이용하여 근사함수를 구성하는 기존 이동최소자승법과 다르게 일반화된 이동최소자승법에서는 종속변수 값과 종속변수의 미분값을 함께 이용하기 위해 아래와 같은 미분값을 포함하는 새로운 1차 가중이산오차를 도입한다. 이를 Multi-index 표기법을 사용하여 표기하면 다음과 같다.

$$J_{\bar{\mathbf{x}}}^{(l)}(\mathbf{b}) = \sum_{i=1}^{N_{node}} \sum_{|a| \leq l} w_i^{(a)}(\bar{\mathbf{x}}) [D^a \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i) \mathbf{b} - D^a u(\mathbf{x}_i)]^2 \quad (5)$$

지역근사함수의 계수벡터  $\mathbf{a}(\bar{\mathbf{x}})$ 는 새로 도입된 가중이산오차(5)의 최소화를 통하여 얻을 수 있으며 이를 식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\text{Find } J_{\bar{\mathbf{x}}}^{(l)}(\mathbf{a}(\bar{\mathbf{x}})) \leq J_{\bar{\mathbf{x}}}^{(l)}(\mathbf{b}), \quad \forall \mathbf{b} \in R^{N_{basis}} \quad (6)$$

모든 점에서 지역근사 함수의 계수벡터를 결정한 후 이를 다시 전역 근사함수의 계수벡터에 대입하여 최종적인 전역 근사함수를 구성할 수 있다.

2차원 해석영역을 갖는 경우 1차 가중이산오차를 나타내면 다음과 같다.

$$J_{\bar{\mathbf{x}}}^{(l)} = \sum_{i=1}^{N_{node}} \sum_{|a| \leq l} w_i^{(a)}(\bar{\mathbf{x}}) [D^a \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i) \mathbf{b} - D^a u(\mathbf{x}_i)]^2 = \sum_{i=1}^{N_{node}} \left( \begin{array}{l} w_i^{(0,0)}(\bar{\mathbf{x}}) [\mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i) \mathbf{b} - \hat{u}^i]^2 \\ + w_i^{(1,0)}(\bar{\mathbf{x}}) \left[ \frac{\partial \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i)}{\partial x} \mathbf{b} - \hat{\theta}_x^i \right]^2 \\ + w_i^{(0,1)}(\bar{\mathbf{x}}) \left[ \frac{\partial \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i)}{\partial y} \mathbf{b} - \hat{\theta}_y^i \right]^2 \end{array} \right) \quad (7)$$

여기서  $\hat{u}^i$ ,  $\hat{\theta}_x^i$ ,  $\hat{\theta}_y^i$ 는 각각  $u(\mathbf{x}_i)$ ,  $\partial u(\mathbf{x}_i)/\partial x$ ,  $\partial u(\mathbf{x}_i)/\partial y$ 를 나타낸다. 이를 행렬을 이용하여 다시 정리하면 아래와 같다.

$$\begin{aligned} J_{\bar{\mathbf{x}}}^{(l)}(\mathbf{b}) &= [\mathbf{P}\mathbf{b} - \hat{\mathbf{u}}]^T \mathbf{w}^{(0,0)}(\bar{\mathbf{x}}) [\mathbf{P}\mathbf{b} - \hat{\mathbf{u}}] + [\mathbf{P}_x \mathbf{b} - \hat{\mathbf{t}}_x]^T \mathbf{w}^{(1,0)}(\bar{\mathbf{x}}) [\mathbf{P}_x \mathbf{b} - \hat{\mathbf{t}}_x] \\ &\quad + [\mathbf{P}_y \mathbf{b} - \hat{\mathbf{t}}_y]^T \mathbf{w}^{(0,1)}(\bar{\mathbf{x}}) [\mathbf{P}_y \mathbf{b} - \hat{\mathbf{t}}_y] \\ &= \left[ \begin{array}{c} \mathbf{P} \\ \mathbf{P}_x \\ \mathbf{P}_y \end{array} \right] \mathbf{b} - \left[ \begin{array}{c} \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{\mathbf{t}}_x \\ \hat{\mathbf{t}}_y \end{array} \right] \left[ \begin{array}{ccc} \mathbf{w}^{(0,0)}(\bar{\mathbf{x}}) & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{w}^{(1,0)}(\bar{\mathbf{x}}) & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{w}^{(0,1)}(\bar{\mathbf{x}}) \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} \mathbf{P} \\ \mathbf{P}_x \\ \mathbf{P}_y \end{array} \right] \mathbf{b} - \left[ \begin{array}{c} \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{\mathbf{t}}_x \\ \hat{\mathbf{t}}_y \end{array} \right] \\ &= [\mathbf{Q}\mathbf{b} - \hat{\mathbf{d}}]^T \mathbf{W}(\bar{\mathbf{x}}) [\mathbf{Q}\mathbf{b} - \hat{\mathbf{d}}] \end{aligned} \quad (8)$$

여기서, 각 부행렬들은 다음 형태를 가진다.

$$\mathbf{P}_x = \left[ \frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{x}_1)}{\partial x}, \frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{x}_2)}{\partial x}, \dots, \frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{x}_n)}{\partial x} \right]^T, \quad \mathbf{P}_y = \left[ \frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{x}_1)}{\partial y}, \frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{x}_2)}{\partial y}, \dots, \frac{\partial \mathbf{p}(\mathbf{x}_n)}{\partial y} \right]^T$$

$$\hat{t}_x = \left[ \frac{\partial p(x_1)}{\partial x}, \frac{\partial p(x_2)}{\partial x}, \dots, \frac{\partial p(x_n)}{\partial x} \right]^T = [\hat{\theta}_x^1, \hat{\theta}_x^2, \dots, \hat{\theta}_x^n]^T$$

$$\hat{t}_y = \left[ \frac{\partial p(x_1)}{\partial y}, \frac{\partial p(x_2)}{\partial y}, \dots, \frac{\partial p(x_n)}{\partial y} \right]^T = [\hat{\theta}_y^1, \hat{\theta}_y^2, \dots, \hat{\theta}_y^n]^T$$

$$w^{(i,j)}(\bar{x}) = \begin{bmatrix} w_1^{(i,j)}(\bar{x}) & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & w_{Nnode}^{(i,j)}(\bar{x}) \end{bmatrix}$$

가중이산오차를 최소화할 수 있는 계수벡터  $a(\bar{x})$ 는 다음과 같은 방정식을 통하여 구할 수 있다.

$$A(\bar{x})a(\bar{x}) = B(\bar{x})\hat{d} \quad (10)$$

여기서 계수행렬  $A(\bar{x})$ ,  $B(\bar{x})$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$A(\bar{x}) = Q^T W(\bar{x}) Q = P^T w^{(0,0)} P + P_x^T w^{(1,0)} P_x + P_y^T w^{(0,1)} P_y$$

$$B(\bar{x}) = Q^T W(\bar{x}) = [P^T w^{(0,0)}, P_x^T w^{(1,0)}, P_y^T w^{(0,1)}] \quad (11)$$

모든 점에서 지역근사 함수의 계수벡터  $a(\bar{x})$ 를 결정한 후 이를 다시 전역 근사함수식 (1)에 대입하여 최종적인 전역 근사함수를 구성하면 아래와 같다.

$$u(\bar{x}) \cong u^h(\bar{x}) = p^T(\bar{x})a(\bar{x}) = \sum_{i=1}^{N_{basis}} p_i(\bar{x})a_i(\bar{x}), \quad \forall \bar{x} \in \Omega \quad (12)$$

이상의 과정을 통해 얻어진 근사함수를 유한요소와 유사하게 절점형상함수의 선형조합 형태로 아래와 같이 나타낼 수 있다.

$$u_h(x) = \Psi_u^T(x)\hat{u} + \Psi_{\theta_x}^T(x)\hat{t}_x + \Psi_{\theta_y}^T(x)\hat{t}_y \quad (13)$$

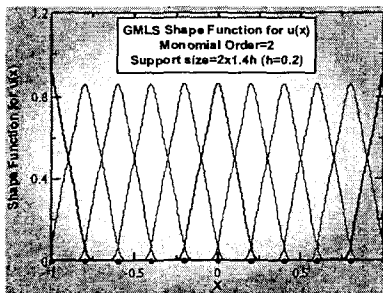
여기서 각 절점형상함수들은 다음과 같은 표현식을 갖는다..

$$\Psi_u^T(x) = p^T(x)A^{-1}(x)p^T w^{(0,0)}(x)$$

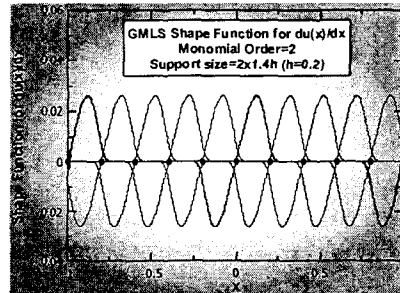
$$\Psi_{\theta_x}^T(x) = p^T(x)A^{-1}(x)p_x^T w^{(1,0)}(x) \quad (14)$$

$$\Psi_{\theta_y}^T(x) = p^T(x)A^{-1}(x)p_y^T w^{(0,1)}(x)$$

위 절점형상함수들의 연속성은 가중함수의 연속성에 따라 손쉽게 조절될 수 있다. 변위와 기울기 변수에 대한 전형적인 일차원 절점형상함수를 도시하면 그림 1.과 같다.



(a) 변위 절점형상함수



(b) 기울기 절점형상함수

그림 1. 일반 이동최소자승법에 의해 얻어진 절점형상함수

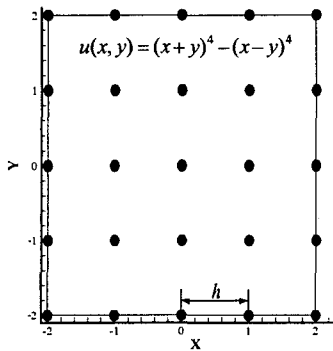
### 3. 일반 이동최소자승법의 근사성능

앞절의 일반 이동최소자승법을 이용하여 일반 이동최소자승법과 기존 이동최소자승법의 함수근사 성능을 비교하였다. 근사성능 비교를 위해 다음과 같은 함수의 형태를 이용하였다.

$$u(x, y) = (x + y)^4 - (x - y)^4 \quad (16)$$

함수 근사를 위해서 그림 2에 나타낸 25개의 절점에서 함수 값과 기울기를 이용하였으며, 기존 이동 최소자승법과 일반 이동최소자승법을 이용하여 함수 근사를 수행하였다. 2차 다항식 기저 (1, x, x<sup>2</sup>)를 이용하여 근사를 수행하고 함수 값을 그림 3, 함수의 x방향 기울기와 y방향 기울기를 그림 4와 5에 각각 도시하였다.

그림 3에서 확인할 수 있듯이 함수값 자체의 경우에 있어서는 기존 이동최소자승법(MLS)과 일반 이동최소자승법(GMLS) 사이에 큰 차이가 존재하지 않음을 알 수 있다. 그러나 미분치의 경우에는 그림 4와 5에서 볼 수 있듯이 기존 이동최소자승법(MLS)에 비해 기울기 정보를 근사식에 포함시킬 수 있는 일반 이동최소자승법(GMLS)이 훨씬 우수한 근사성능을 가지고 있음을 확인할 수 있다.



25 Sampling Point Positions for MLS & GMLS approximations

그림 2. 함수근사를 위한 절점

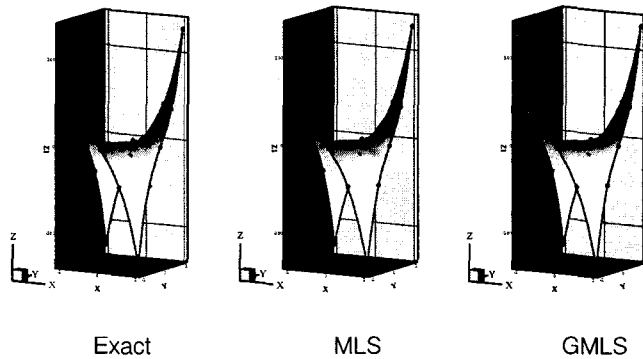


그림 3. 함수  $u(x,y)$  의 근사성능 비교

(2nd order monomial basis &  $2.1h$  support size)

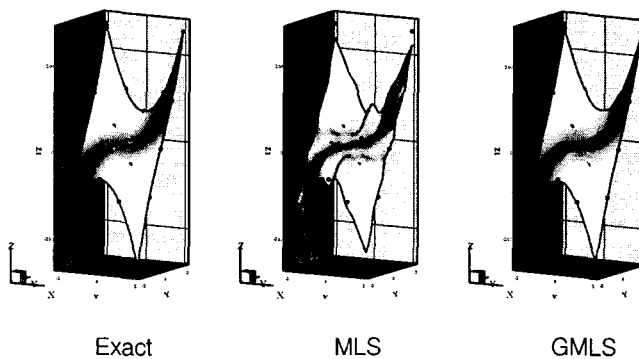


그림 4.  $\partial u(x,y)/\partial x$  의 근사성능 비교 (2nd order monomial basis &  $2.1h$  support size)

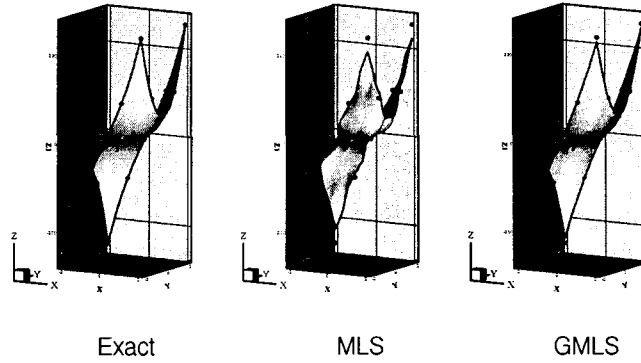


그림 5.  $\partial u(x,y)/\partial y$  의 근사성능 비교 (2nd order monomial basis &  $2.1h$  support size)

#### 4. 얇은 보의 해석

다음으로는 이와 같이 우수하게 미분값을 근사할 수 있는 일반 이동최소자승법을 이용하여 4차 미분방정식으로 표현되는 얇은 보의 해석을 수행하였다. 얇은 보의 지배방정식과 경계조건은 식 (17)과 같이 주어진다.

$$EIu'''' = f \quad \text{in } \Omega \quad (17)$$

$$B.C.; u(x) = \bar{u}(x) \text{ on } \Gamma_u, \quad du(x)/dx = \bar{\theta}(x) \text{ on } \Gamma_\theta, \quad M = \bar{M} \text{ on } \Gamma_M, \quad V = \bar{V} \text{ on } \Gamma_V$$

여기서  $EI$  는 굽힘강성,  $u$  는 보의 처짐,  $f$  는 분포력,  $\Omega$  는 해석 영역,  $\Gamma_u$  는 변위경계,  $\Gamma_\theta$  는 기울기경계,  $\Gamma_M$  은 모멘트경계,  $\Gamma_V$  는 전단력경계를 의미한다. 그리고 굽힘모멘트와 변위, 전단력과 변위는 각각 아래의 관계를 가진다.

$$M = EIu'' \quad \text{and} \quad V = -EIu''' \quad (18)$$

변위 및 기울기 경계조건을 부가하기 위해 별첨법을 이용하고 지배방정식에 시험함수  $\delta u$  를 곱하여 가중잔여법을 적용하면 (19)식을 얻게된다.

$$0 = \int_{\Omega} (EIu'''' - f)\delta u dx + \frac{1}{\epsilon_u} [(u - \bar{u})\delta u]_{\Gamma_u} + \frac{1}{\epsilon_\theta} [(u' - \bar{\theta})\delta u']_{\Gamma_\theta}, \quad \forall \delta u \quad (19)$$

이를 두 번의 부분적분을 통하여 약형으로 변환하면 아래와 같은 형태를 갖게 된다.

$$0 = \int_{\Omega} EIu'' \delta u'' dx - \int_{\Omega} f \delta u dx + \frac{1}{\epsilon_u} [(u - \bar{u})\delta u]_{\Gamma_u} + \frac{1}{\epsilon_\theta} [(u' - \bar{\theta})\delta u']_{\Gamma_\theta} - [\bar{n}EIu'' \delta u]_{\Gamma} + [\bar{n}EIu''' \delta u]_{\Gamma}, \quad \forall \delta u \quad (20)$$

여기서  $\Gamma$  는 보의 양쪽경계를 의미하며,  $\bar{n}$  는 오른쪽 경계일 경우 1이고 왼쪽 경계일 경우 -1을 의미한다. 이때 보의 양쪽경계  $\Gamma$  는  $\Gamma_u \cup \Gamma_V$  혹은  $\Gamma_\theta \cup \Gamma_M$  으로 표현될 수 있고  $\Gamma_u \cap \Gamma_V = \emptyset$ ,  $\Gamma_\theta \cap \Gamma_M = \emptyset$  으므로 식 (18)을 적용하여 (20)식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$0 = \int_{\Omega} EIu'' \delta u'' dx - \int_{\Omega} f \delta u dx + \frac{1}{\epsilon_u} [(u - \bar{u})\delta u]_{\Gamma_u} + \frac{1}{\epsilon_\theta} [(u' - \bar{\theta})\delta u']_{\Gamma_\theta} - [\bar{n}EIu'' \delta u]_{\Gamma_u} + [\bar{n}EIu''' \delta u]_{\Gamma_\theta} - [\bar{n}M \delta u']_{\Gamma_M} - [\bar{n}V \delta u]_{\Gamma_V}, \quad \forall \delta u \quad (21)$$

위 약형의 처짐  $u$ 와 시험함수  $\delta u$ 를 일반 이동최소자승법에 의해 얻어진 절점형상함수의 선형조합 형태 (22)로 근사한다. 이때 일반적으로 처짐  $u$ 와 시험함수  $\delta u$ 를 Petrov-Galerkin법에 의거하여 서로 다르게 보간할 수 있다.

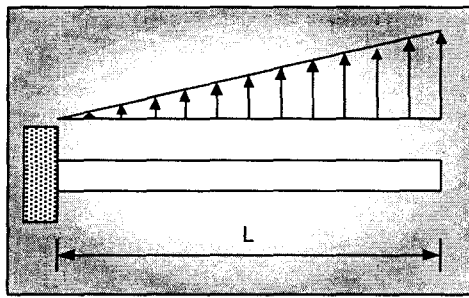
$$u(x) = \sum_{i=1}^{N_{node}} (\hat{u}_i \phi_i^{(u)}(x) + \hat{\theta}_i \phi_i^{(\theta)}(x)) \quad (22)$$

$$\delta u(x) = \sum_{i=1}^{N_{node}} (\delta \hat{u}_i \phi_i^{(u)}(x) + \delta \hat{\theta}_i \phi_i^{(\theta)}(x))$$

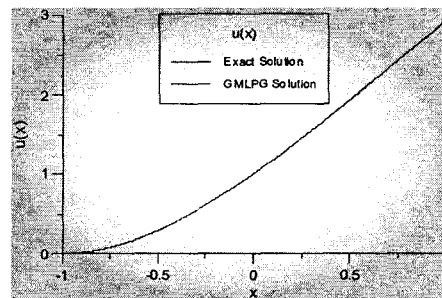
식(22)를 식(21)에 대입, 정리하면 최종적으로 (23)식과 같은 선형 연립방정식을 얻을 수 있다.

$$K\hat{d} = F \quad (23)$$

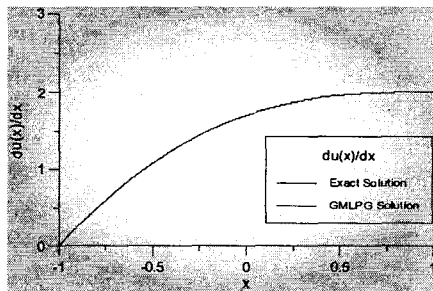
이상의 방법을 이용하여 얇은 보의 무요소 해석을 수행하고 그 결과를 그림 6에 도시하였다. 총 12개의 절점을 이용하여 해석을 수행하였으며 해석시 변위보간을 위해서는 3차 기저와  $3.5 \Delta x$ 의 Support 크기를 사용하였으며 시험함수  $\delta u$ 의 보간을 위해서는 2차 기저와  $2.1 \Delta x$ 의 Support 크기를 사용하였다. 가중함수로는 9차 Spline함수를 이용하였다. 그림 6에서 알 수 있듯이 수치해와 엄밀해가 거의 일치하는 것을 확인할 수 있으며, 처짐과 기울기는 물론 곡률의 경우에도 수치해가 연속적으로 이어짐을 확인할 수 있다.



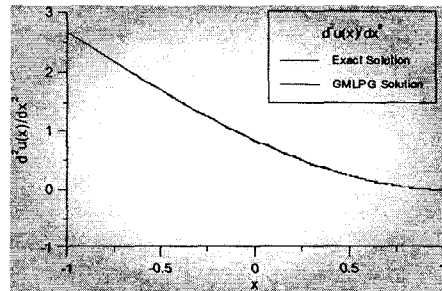
(a) 선형 분포력이 작용하는 외팔보



(b) 무요소 수치해 ( $u$ )



(c) 무요소 수치해 ( $u'$ )



(d) 무요소 수치해 ( $u''$ )

그림 6. 무요소 해석을 통해 얻은 수치해와 엄밀해의 비교

## 5. 결 론

본 논문에서는 미분값을 이용할 수 있는 함수의 근사치 이러한 미분치 정보를 근사화 절차에 반영하기 위하여 무요소법에서 널리 이용되는 이동최소자승법을 확장시킨 일반 이동최소자승법을 소개하였다. 이를 이용하여 2차원 영역에 주어진 함수를 근사화하고 그 결과를 기존 이동최소자승법의 결과와 비교하였으며, 결과비교를 통해 함수값의 근사 성능에 있어서는 기존 이동최소자승법과 일반화된 이동최소자승법이 큰 차이가 없지만 미분값의 근사성능에 있어서는 일반 이동최소자승법을 이용할 때 정확도가 크게 개선됨을 확인하였다. 또한 미분정보를 무요소 보간에 손쉽게 포함시킬 수 있는 일반화된 이동최소자승법을 이용하여 얇은 보의 무요소 해석을 수행하였으며, 수치해석 결과로부터 변위와 기울기는 물론 곡률의 경우에도 아주 정확한 수치해를 얻을 수 있음을 확인하였다. 향후 일반 이동최소자승법을 판과 각의 무요소 해석에 적용할 수 있을 것으로 기대된다.

## 참고 문헌

1. Lucy, L. B., "A numerical approach to the testing of the fission hypothesis", *The Astronomical Journal* 82, Vol.12 (1977), pp.1013-1024
2. Harlow, F. H., "The particle in cell computing method for fluid dynamics", *Methods for Computational Physics*, Vol.3, (1964), pp.319-343
3. Nayroles, B., Touzot, G., and Villon, P., "Generalizing the finite element method : Diffuse approximation and diffuse elements", *Computational Mechanics*, Vol.10 (1992), pp.307-318
4. Belytschko, T., Lu, Y. Y., and Gu, L., "Element free Galerkin methods", *Int. J. Numer. Methods Engrg.* Vol.37(1994), pp.229-256
5. Liu, W. K., Jun, S., and Zhang, Y. F., "Reproducing kernel particle methods", *International Journal of Numerical Methods in Fluids*, Vol.20 (1995), pp.1081-11064.
6. Onate, E., Idelsohn, S., Zienkiewicz, O.C., and Taylor, R.L., "A finite point method in computational mechanics: Applications to convective transport and fluid flow", *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol.39 (1996), pp.3839-3866.
7. Duarte, C.A., and Oden, J.T., "An h-p adaptive method using clouds", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 139 (1996), pp.237-262
8. Melenk, J. M., and Babuska, I., "The partition of unity finite element method : Basic theory and applications", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* Vol.139, No.1 (1996), pp.289-314
9. Atluri, S. N., and Zhu, T.L., "A new meshless local Petrov-Galerkin approach in computational mechanics", *Computational Mechanics*, Vol.22 (1998), pp.117-127
10. Atluri, S. N., Cho, J. Y., Kim, H. G., "Analysis of thin beams, using the meshless local Petrov-Galerkin method, with generalized moving least squares interpolation", *Computational Mechanics* Vol.24 (1999), pp.334-347
11. Lancaster, P., and Salkauskas, K., "Surfaces generated by moving least squares method", *Math. Comp.* Vol.37 (1991) pp.141-158.