

박벽 복합재료 보의 횡-비틀림 좌굴 해석 Lateral-torsional buckling analysis of thin-walled composite beam

김 영 빈 * 이 재 홍**
Kim, Young Bin Lee, Jae Hong

ABSTRACT

The lateral buckling of a laminated composite beam is studied. A general analytical model applicable to the lateral buckling of a composite beam subjected to various types of loadings is derived. This model is based on the classical lamination theory, and accounts for the material coupling for arbitrary laminate stacking sequence configuration and various boundary conditions. The effects of the location of applied loading on the buckling capacity are also included in the analysis. A displace-based one-dimensional finite element model is developed to predict critical loads and corresponding buckling modes for a thin-walled composite beam with arbitrary boundary conditions. Numerical results are obtained for thin-walled composites under central point load, uniformly distributed load, and pure bending with angle-ply and laminates. The effects of fiber orientation location of applied load, and types of loads on the critical buckling loads are parametrically studied.

1. 서 론

복합재료는 과거 수십년간 고강성이나 고강도가 요구되는 다양한 구조물에 사용되어져 왔다. 최근 들어 건설 산업에서 인발 제조 공정(Pultruded composite)을 거쳐 생산된 박벽 개단면과 같은 복합재료 구조체가 개발되었다.

박벽 구조의 횡 좌굴 문제는 Bleich[1]에 의해 연구되었으며, Clark과 Hill[2]은 다양한 하중 조건에 따른 일축 대칭 단면의 횡 좌굴에 관한 해를 제시하였다. 최근에는 Trahair[3]는 휨-비틀림 거동을 연구하였다.

박벽 복합재 보의 경우 Bauld와 Tzeng[4]은 화이버가 대칭으로 적층된 보에 대해 Vlasov's의 박벽 보 이론을 확장 적용하였고, Kabir과 Sherbourne[5]는 Rayleigh-Ritz 방법을 기반으로 H형 단면 복합재 보의 횡-비틀림 좌굴에 대해 연구하였다. Lin 등[6]는 유한 요소법에 의한 박벽 복합 구조재의 좌굴 문제를 연구하였으며, Davalos과 Qiao[8]는 플랜지가 넓은 복합재료 보의 휨-비틀림과 횡-뒤틀림 좌굴에 대해 분석적이고 경험적인 방법을 제시하였다. 최근에 Lee와 Kim[7]은 H형 복합재 보의 휨-비틀림 좌굴에 대한 해석 모델을 제안하였고, 이 모델은 정확한 좌굴 하중과

* 세종대학교 건축공학과 박사과정

** 세종대학교 건축공학과 부교수

본 연구는 2000년도 학술진흥재단 선도연구자사업 (KRF-2000-041-E00635)에 의하여 지원되었음.

다양한 형태의 거동을 예측할 수 있었다.

박벽 복합재 보의 횡적 안정성에 대한 대부분 연구들은 H형 단면에 한정적이며, 최근에 Kabir과 Sherbourne[8]은 복합재 C형 단면 보의 횡 좌굴의 이론해를 제안했다. 또한, Lee[9]은 단면의 성질뿐만 아니라 적층 형태의 함수로서 도심과 전단 중심의 위치를 알 수 있는 정해를 제안하였다.

본 연구에서는 H형, C형 단면 복합재 보의 횡-비틀림 좌굴에 적용하는 일반적인 해석 모델을 하중의 다양한 형태로 제시하고, 일차원 유한 요소 모델을 개발하여 임의의 경계 조건에 대해 박벽 복합재 보의 임계 하중과 그에 상응하는 좌굴 거동을 예측하기 위해 개발하였다. 수치적 결과는 박벽 복합재 보에 중앙 집중 하중, 등분포 하중, 순수 휨에 대해 얻어진 결과이며, 화이버 방향, 적용된 하중의 위치, 그리고 임계 좌굴 하중의 형태에 관한 영향이 연구되었다.

2. 변위장 및 변형률

본 연구의 이론전개에서는 3종류의 좌표계가 사용되고 있으며, 이 좌표들은 서로 연관되어 있다. 먼저 (x, y, z) 축을 사용하는 직교 카테시안 좌표계(orthogonal Cartesian coordinate system)와 두번째로 (n, s, z) 로 구성되어 있는 외형좌표계(contour coordinates), 마지막으로 원점 O로부터 일정거리 떨어진 임의의 점에서의 접선방향 좌표이다. 기본 가정과 변위 성분의 식들에서 유도되었던 박벽 개단면에 필요한 최종적인 변형률은 다음과 같이 주어진다.

$$\varepsilon_z = \varepsilon_z' + (x + n \sin \theta) \kappa_y + (y - n \cos \theta) \kappa_x + (\omega - nq) \kappa_\omega \quad (1a)$$

$$\gamma_{sz} = n \kappa_{sz} \quad (1b)$$

3. 변분의 원리

좌굴 상태에서 구조체의 전체 포텐셜 에너지(total potential energy)는 다음과 같다.

$$\Pi = U^* + V^* \quad (2)$$

여기서 U^* 는 변형률 에너지(strain energy)이며,

$$U^* = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_z \varepsilon_z + \sigma_{zs} \gamma_{zs}) dv \quad (3)$$

변형 에너지의 변분값은 식(1a)와 (1b)를 식(3)에 대입, 정리하여 다음의 식을 얻는다.

$$\delta U^* = \int_0^l \{ N_z \delta \varepsilon_z' + M_y \delta \kappa_y + M_x \delta \kappa_x + M_\omega \delta \kappa_\omega + M_t \delta \kappa_{sz} \} dz \quad (4)$$

여기서 N_z , M_x , M_y , M_ω , M_t 는 각각 축력, x , y 방향의 휨모멘트, 중심점에서의 뒤틀림모멘트, 비틀림모멘트를 나타낸다.

$$N_z = \int_A \sigma_z dsdn \quad (5a)$$

$$M_y = \int_A \sigma_z (x + n \sin \theta) dsdn \quad (5b)$$

$$M_x = \int_A \sigma_z (y - n \cos \theta) dsdn \quad (5c)$$

$$M_\omega = \int_A \sigma_z (\omega - nq) dsdn \quad (5d)$$

$$M_t = \int_A \sigma_{zs} n dsdn \quad (5e)$$

식(2)에서 V^* 는 전단 중심 위로 거리 \bar{a} 인 점에 단면에 작용하는 횡하중의 포텐셜이다. 전단 중심에서 횡하중의 변분은 다음과 같다.[1]

$$\delta V^* = - \int_0^l [M_b(\Phi \delta U' + U' \delta \Phi) + \bar{a} p \Phi \delta \Phi] dz \quad (6)$$

전체 포텐셜 에너지는 다음과 나타낼 수 있다.

$$\delta \Pi = \delta(U^* + V^*) = 0 \quad (7)$$

식(4)와 (6)를 (7)에 대입하여 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$0 = \int_0^l \{N_z \delta W' - M_y \delta U'' - M_x \delta V'' - M_\omega \delta \Phi'' + 2M_t \delta \Phi' - M_b(\Phi \delta U' + U' \delta \Phi) - \bar{a} p \Phi \delta \Phi\} dz \quad (8)$$

식(8)는 M_b 와 P 는 좌굴 모멘트와 횡하중이며, 다음과 같은 하중의 여러 형태로 나타낼 수 있다.

$$M_b = \lambda f(z), \quad P = \lambda g(z) \quad (9)$$

여기서 λ 는 좌굴 변수이고 $f(z)$ 와 $g(z)$ 는 하중 형태에 따른 다항 함수이다.

4. 구성 방정식

$N_z, M_x, M_y, M_\omega, M_t$ 은 일반화된 변형률($\epsilon_z, \kappa_y, \kappa_x, \kappa_\omega, \kappa_t$)에 관한 식으로 표현할 수 있다. 따라서 적층된 박벽 복합재료의 구성 방정식은 다음과 같다. 여기서 E_{ij} 는 박벽 복합재 보의 강성을 나타낸다.

$$\begin{Bmatrix} N_z \\ M_y \\ M_x \\ M_\omega \\ M_t \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & E_{14} & E_{15} \\ & E_{22} & E_{23} & E_{24} & E_{25} \\ & & E_{33} & E_{34} & E_{35} \\ & & & E_{44} & E_{45} \\ sym. & & & & E_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_z \\ \kappa_y \\ \kappa_x \\ \kappa_\omega \\ \kappa_t \end{Bmatrix} \quad (10)$$

5. 지배 방정식

본 연구의 횡 좌굴 방정식은 식(8)을 부분적분한 후 정리하여 아래와 같이 얻을 수 있다.

$$N_z' = 0 \quad (11a)$$

$$M_y'' + (M_b \Phi)' = 0 \quad (11b)$$

$$M_x'' = 0 \quad (11c)$$

$$M_\omega'' + 2M_t' + M_b U'' + \bar{a} p \Phi = 0 \quad (11d)$$

경계조건도 부분적분으로 아래와 같이 구해진다.

$$\delta W : N_z \quad (12a)$$

$$\delta U : M_y' + (M_b \Phi)' \quad (12b)$$

$$\delta U' : M_y + M_b \Phi \quad (12c)$$

$$\delta V : M_x' \quad (12d)$$

$$\delta V' : M_x \quad (12e)$$

$$\delta \Phi : M_\omega + 2M_t \quad (12f)$$

$$\delta \Phi' : M_\omega \quad (12g)$$

식(10)을 식(11a)-(11d)에 대입하면 구체적인 지배 방정식을 얻을 수 있으며, 종속 변수 U, V, W 와 Φ 는 완전 연계됨을 알 수 있다. 만약 웨브의 적층 형태가 대칭이면 $E_{12} = E_{34} = 0$ 이고, 박벽 복합재의 적층 형태가 z 축에 대해 대칭이면 $E_{13} = E_{15} = E_{24} = 0$ 이다. 또한, 웨브와 플랜지 모두 균형(balanced)으로 적층($\pm \theta$) 되어 있다면, $A^k_{i6} = D^k_{i6} = 0$ 이고, H형 단면의 복합재 보에서는 $E_{25} = E_{35} = 0$ 인 반면, C형 단면의 보에서는 $E_{25} = E_{35} = E_{45} = 0$ 이 된다. 따라서, 식(11a)-(11d)는 식(9)를 이용하여 비연계된 미분방정식 형태로 아래와 같이 단순화할 수 있다.

$$(EA)_{com} W'' = 0 \quad (13a)$$

$$-(EI_y)_{com} U^{iv} + \lambda(f\Phi)'' = 0 \quad (13b)$$

$$-(EI_x)_{com} V^{iv} = 0 \quad (13c)$$

$$-(EI_w)_{com} \Phi^{iv} + (GJ)_{com} \Phi'' + \lambda(fU'' + ag\Phi) = 0 \quad (13d)$$

위 식에서 $(EA)_{com}$ 은 복합재 보의 축강성, $(EI_x)_{com}$ 와 $(EI_y)_{com}$ 은 x 와 y 방향에 대한 휨강성, $(EI_w)_{com}$ 와 $(GJ)_{com}$ 은 뒤틀림 강성과 비틀림 강성을 나타내며 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$(EA)_{com} = E_{11}, \quad (EI_y)_{com} = E_{22}, \quad (EI_x)_{com} = E_{33}, \quad (EI_w)_{com} = E_{44}, \quad (GJ)_{com} = 4E_{55} \quad (14)$$

위 식에서 임계 순수 휨에 대한 좌굴 모멘트는 단순 지지 경계 조건의 정해에 의해 주어진다.

$$M_{cr} = \frac{\pi}{l} \sqrt{(EI_y)_{com}(GJ)_{com}} \sqrt{1 + K^2} \quad (15)$$

여기서 K 는 비틀림 변수로 다음과 같다.

$$K = \sqrt{\frac{\pi^2 (EI_y)_{com}}{l^2 (GJ)_{com}}} \quad (16)$$

6. 유한 요소 모델

앞 절에 서술한 박벽 복합재 보의 이론은 유한 요소법에 의해 모델화 할 수 있다. 일반화된 변위는 일차원 라그랑지안(Lagrange) 보간 함수 Ψ_j 의 선형 조합과 절점 j 와 연관된 허마이트(Hermite) 3차 보간 함수 ψ_j 로 각 요소로 표현할 수 있고 그 식을 식(8)에 대입하면, 전형적인 요소의 유한 요소 모델은 표준 고유치 문제로 표현될 수 있다.

$$([K] - \lambda[G])\{\Delta\} = \{0\} \quad (17)$$

여기서 $[K]$ 는 요소 강성 매트릭스(stiffness matrix)이다. $[G]$ 는 요소의 기하학적 강성 매트릭스(geometric stiffness matrix)로서 다음과 같이 주어진다.

식(17)에서 $\{\Delta\}$ 는 고유치에서 절점의 변위에 포함되는 고유 벡터(eigenvector)이다.

$$\{\Delta\} = \{W \ U \ V \ \Phi\}^T \quad (18)$$

7. 수치해석 예제

길이 $l = 8m$ 의 등방성 단순 지지된 보의 예제는 그림 1, 2와 같고, 재료의 물성치는 아래와 같이 사용하였다.

$$E_1 = 1 \text{ GPa}, \quad \nu = 0.34 \quad (19)$$

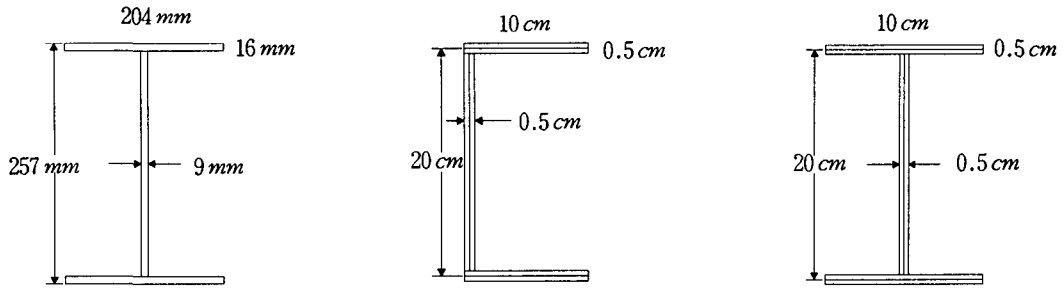


그림1 H형 단면의 박벽 복합 보 그림2 C형 단면의 박벽 복합 보 그림3 H형 단면의 박벽 복합 보

함수 $f(z)$ 와 $g(z)$ 는 다음과 같이 하중의 다양한 하중의 형태로 주어진다.

	순수 휨	등분포 하중	중앙 집중 하중
$f(z)$	1	$\frac{1}{2} \left(\frac{l^2}{4} - z^2 \right)$	$\frac{1}{2} \left(\frac{l}{2} - z \right)$
$g(z)$	0	1	0 1 at the loading point

본 예제의 결과는 하중 조건의 다양한 형태를 정해와 같이 표 1과 2에서 비교하였다. 유한 요소 해석 결과 정해 [1]과 상당히 일치하고 있는 것을 볼 수 있다.

하중 위치	순수 휨		등분포 하중		중앙 집중 하중	
	본 연구	참고문헌[1]	본 연구	참고문헌[1]	본 연구	참고문헌[1]
전단 중심	33.429	33.429	4.723	4.774	22.716	22.989
상부 플랜지	-	-	3.875	3.876	18.887	17.721
하부 플랜지	-	-	5.753	5.777	27.248	29.335

표 1 H형 단면 박벽 복합재 보의 다양한 하중 조건에 따른 횡-비틀림 좌굴 모멘트와 하중

하중 위치	순수 휨		등분포 하중		중앙 집중 하중	
	본 연구	참고문헌[1]	본 연구	참고문헌[1]	본 연구	참고문헌[1]
전단 중심	56.453	56.451	7.980	7.994	38.409	38.408
상부 플랜지	-	-	5.967	6.291	29.355	28.380
하부 플랜지	-	-	10.661	10.264	50.045	51.462

표 2 C형 단면 박벽 복합재 보의 다양한 하중 조건에 따른 횡-비틀림 좌굴 모멘트와 하중

다음 예제는 길이 $l = 8m$ 의 H형 단면과 C형 단면을 지닌 박벽 복합재 보의 예제로서 좌-우 방향에 따른 효과와 횡-비틀림 좌굴에서의 스펠-높이의 비를 알기 위해 고려된 예제이다. 단면의 형상은 그림 2, 3와 같고, 재료의 물성치는 아래와 같이 사용하였다.

$$E_1/E_2 = 25, \quad G_{12}/E_2 = 0.6, \quad \nu_{12} = 0.25$$

여기서 지수 1과 2는 각각 좌-우 방향과 좌-우 방향의 직각 방향을 나타낸다. 편의상, 무차원 좌굴 모멘트와 하중을 다음과 같이 사용한다.

$$\bar{M}_{cr} = \frac{M_{cr} l}{E_2 t_3 b_3^3} \quad (20)$$

$$\bar{P}_{cr} = \frac{P_{cr} l^2}{E_2 t_3 b_3^3} \quad (21)$$

$$\bar{q}_{cr} = \frac{q_{cr} l^3}{E_2 t_3 b_3^3} \quad (22)$$

웨브의 적층은 앵글-플라이[$\theta/-\theta$]로, 상·하부 플랜지는 한 방향으로만 적층되어 있는 것으로 가정하였다. H형 단면의 연계 강성 $E_{12}, E_{13}, E_{24}, E_{25}, E_{34}, E_{35}$ 와 C형 단면 $E_{13}, E_{14}, E_{23}, E_{24}, E_{35}, E_{45}$ 는 이전 장에서 보였듯이 0이다. 그러나, H형 단면의 E_{15} 와 C형 단면의 E_{15} 와 E_{25} 는 웨브의 비대칭적인 적층 형태로 인해 사라지지는 않는다. 유한 요소 해석과 정해에 의해 순수 휨에서 단순 지지된 보의 임계 모멘트에서는 식(15)로부터 H형 단면의 E_{15} 와 C형 단면의 E_{15} 와 E_{25} 의 연계 효과는 무시된다. 보의 임계 모멘트는 그림 4, 5와 같이 나타난다. 화이버 방향이 각도를 갖게 될 때 유한 요소 해석과 정해 사이의 불일치는 고려되어야 하며, 예제에서 $\theta = 30^\circ$ 에서 두 결과 사이의 오차는 10% 이상 존재한다. 즉, 화이버 방향이 각도를 갖게 되면 정해에서는 연계 강성에 의해 더 이상 유효하지 않다는 것을 알 수 있다.

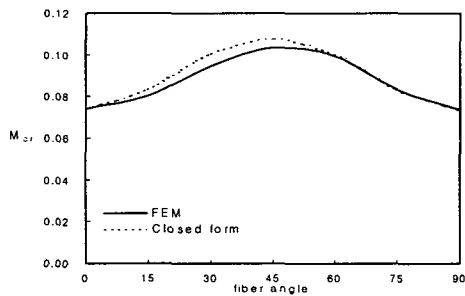


그림 4 순수 휨을 받을 때 H형 단면 복합재 보의 적층각에 따른 횡-비틀림 좌굴 모멘트

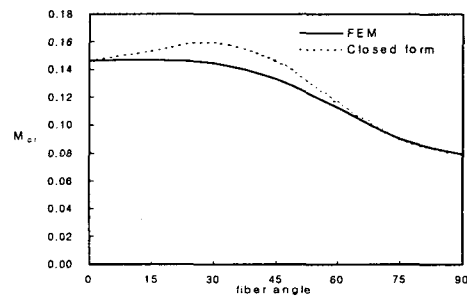


그림 5 순수 휨을 받을 때 C형 단면 복합재 보의 적층각에 따른 횡-비틀림 좌굴 모멘트

다음 예제는 중앙 집중 하중이 작용한 단순 지지된 보를 나타낸 것이다. 하중은 전단 중심과 상부 플랜지 그리고 하부 플랜지에 작용하는 것으로 하였다. 그림 6, 7은 세 경우의 적층각 변화에 따른 임계 좌굴 하중의 관계를 나타낸 것이다. 세 경우 모두 유사한 형태를 나타내고 있다.

H형 단면의 박벽 복합재 보는 화이버 방향이 각도를 갖게 되면 $\theta = 45^\circ$ 에서 횡-비틀림 좌굴 하중이 최대치로 증가하고, $\theta = 90^\circ$ 에서는 최소치로 감소함을 볼 수 있다. 등분포 하중이 작용하는 단순 지지된 보에 있어서의 임계 좌굴 하중은 그림 8에서 보이는 것과 같이 적층각 변화에 따라 달라진다. 일반적으로 좌굴 하중의 거동은 중앙 집중 하중을 받는 보와 유사한 거동을 나타내고 있다.

또한, C형 단면의 박벽 복합재 보의 화이버 방향이 각도를 갖게 되면 횡-비틀림 좌굴 하중이 최대치로 증가하고, $\theta = 90^\circ$ 에서는 최소치로 감소함을 볼 수 있다. 그러나 좌굴 하중의 최대치는 세 경우 모두 다른 적층각에서 나타난다. 한 예로, 상부 플랜지에 하중이 작용하는 보에 대해서

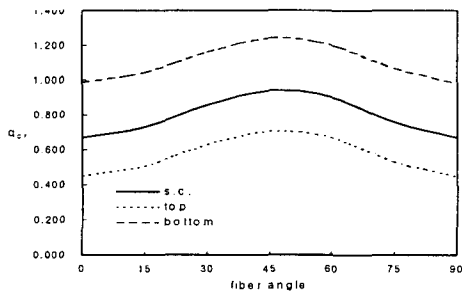


그림 6 중앙 집중 하중을 받을 때 H형 단면 복합재 보의 적층각에 따른 횡-비틀림 좌굴 하중

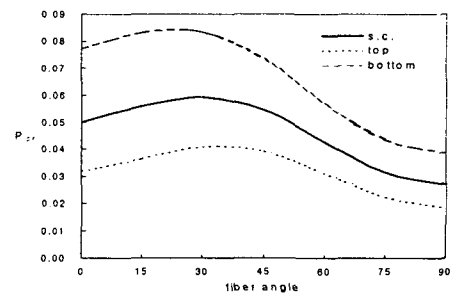


그림 7 중앙 집중 하중을 받을 때 C형 단면 복합재 보의 적층각에 따른 횡-비틀림 좌굴 하중

는 거의 $\theta = 40^\circ$ 에서 최대 임계 하중을 보이는 반면 전단 중심에 하중이 작용하는 보는 거의 $\theta = 30^\circ$ 에서 최대 좌굴 하중을 보이고 있다. 그리고 하부 플랜지에 하중이 작용하는 보는 거의 $\theta = 20^\circ$ 에서 최대치를 발생시키고 있다. 등분포 하중이 작용하는 단순 지지된 보에 있어서의 임계 좌굴 하중은 그림 9에서 보이는 것과 같이 적층각 변화에 따라 달라진다. 일반적으로 좌굴 하중의 거동은 중앙 집중 하중을 받는 보와 유사한 거동을 나타내고 있다. 하부 플랜지에 하중이 작용하는 보의 좌굴 하중은 적층각이 증가함에 따라 감소한다. 전단 중심과 상부 플랜지에 작용하는 보의 좌굴 하중은 적층각이 0° 에서 30° 그리고 45° 로 변할 때 거의 고정된 것으로 보이며 적층각이 커질수록 좌굴 하중은 감소하는 것을 볼 수 있다.

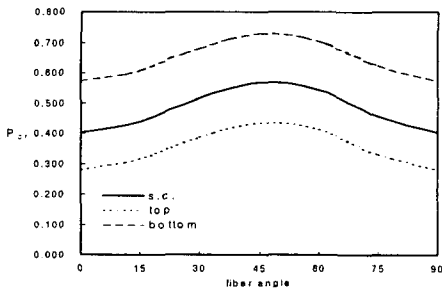


그림 8 등분포 하중을 받을 때 H형 단면 복합재 보의 적층각에 따른 횡-비틀림 좌굴 하중

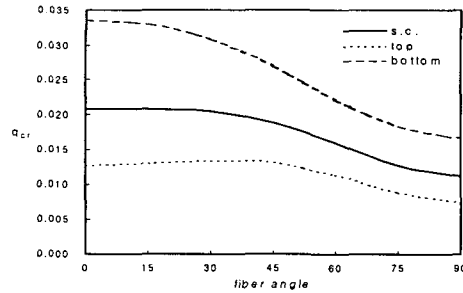


그림 9 등분포 하중을 받을 때 C형 단면 복합재 보의 적층각에 따른 횡-비틀림 좌굴 하중

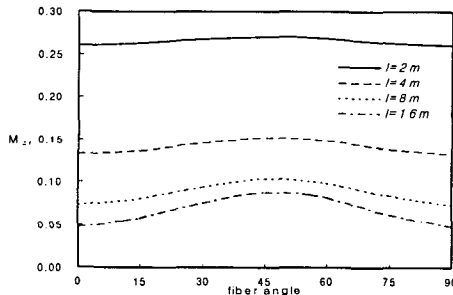


그림 10 보 길이에 따른 순수 휨을 받을 때 H형 복합재 보의 적층각에 따른 횡-비틀림 좌굴 모멘트

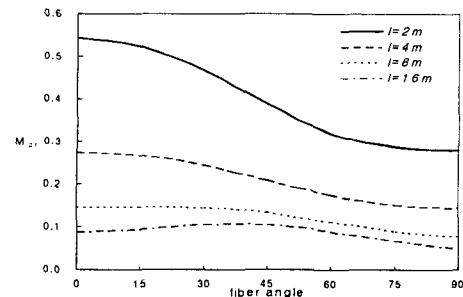


그림 11 보 길이에 따른 순수 휨을 받을 때 C형 복합재 보의 적층각에 따른 횡-비틀림 좌굴 모멘트

좌굴 하중에서 스패 길이와 높이 비의 효과를 알아보기 위해 순수 휨이 작용하는 단순 지지된 보에서 길이를 $l = 2, 4, 8, 16$ 로 변화 시켜 보았다.(그림 10,11) H형 단면의 박벽 복합재 보에서는 모든 스패의 경우 최대 좌굴 하중은 거의 45° 에서 발생하며, C형 단면의 박벽 복합재 보에서는 길이 $l = 16$ 인 보에서만 최대 좌굴 하중이 거의 45° 에서 발생하였다. 따라서 횡-비틀림 좌굴 강성은 비틀림 강성 $(GJ)_{om}$ 에 의존함을 할 수 있다. 또한, C형 단면의 박벽 복합재 보에서는 좌굴 하중이 스패 길이가 짧아지고 적층각이 증가할 때 감소함을 볼 수 있다.

8. 결 론

본 연구는 일차원 유한 요소 모델을 개발하여 H형 단면, C형 단면을 가진 복합재 보의 횡-비틀림 좌굴 하중의 거동에 대해 조사하였다. 본 연구에서 개발된 해석 모델은 복합재 보의 횡-비틀림하는 거동을 정확히 예측하는 것을 알 수 있었으며, 하중 조건, 적용된 하중의 위치 그리고 좌굴 하중과 모멘트에 있어서 웨브의 적층각 효과들을 연구하였다.

이론적인 전개와 수치적 결과를 토대로 하여 다음과 같은 결론을 알 수 있었다.

- 순수 휨이 작용하는 보에서 화이어 방향이 각도를 갖게 되면 직교성 정해(orthotropic closed form)는 연계 강성이 존재함에 따라 횡-비틀림 좌굴 하중을 예측하는데 있어서 정확하지 않았다.
- 횡하중 작용에서 보의 횡-비틀림 좌굴은 적용 하중의 위치뿐만 아니라 화이버의 방향에 의해 영향을 받는다는 것을 알 수 있었다.
- H형 단면을 지닌 박벽 복합재 보의 스패-높이 비의 모든 경우에 거의 $\theta = 45^\circ$ 에서 최대 좌굴 하중이 발생하며, 횡-비틀림 좌굴 강도는 비틀림 강성 $(GJ)_{om}$ 에 의존한다.
- C형 단면을 지닌 박벽 복합재 보의 스패-높이 비는 화이버 방향이 횡-비틀림 좌굴에 상당한 영향을 주는 것을 알 수 있다. 보의 길이에 따라 짧은 보는 $\theta = 0^\circ$ 에서 최대 좌굴 하중을 갖는 반면, 길이가 긴 보에서는 거의 $\theta = 45^\circ$ 에서 최대 좌굴 하중을 나타내고 있다.

참고 문헌

1. Bleich F., 1952, "Buckling strength of metal structures." New York : McGraw-Hill.
2. Clark JW, Hill HN. 1960;86(7), "Lateral buckling of beam." J Struct Eng, ASCE, pp. 175~96.
3. Trahair NS., 1993, "Flexural-torsional buckling of structures." In: CRC Press.
4. Bauld NR, Tzeng LS., 1984;20(3), "A Vlasov theory for fiber-reinforced beams with thin-walled open cross sections", Int J Solids and Struct, pp. 277~97.
5. Kabir MZ, Sherbourne AN., 1998(July), "Lateral-torsional buckling of postlocal buckled fibrous composite beam.", J Eng Mech, ASCE , pp. 754~64.
6. Lin ZM, Polyzois D, Shah A., 1996;24, "Stability of thin-walled pultruded structural members by the finite element method.", Thin-walled Struct, pp. 1~18.
7. Lee J, Kim S., 2001;79(10), "Flexural-torsional buckling of thin-walled I-section composites.", Computers and Structures. pp. 987~95.
8. Kabir MZ, Sherbourne AN., 1998;29B, "Optimal fiber orientation in lateral stability of laminated channel section beam." Composites B, pp.81~7.
9. Lee J, 2001;52(2), "Center of gravity and center of thin-walled open section composite beams.", composite Structures. pp. 255~60.