

## 개선된 가중적분법과 반무한 영역의 해석

### Improved Weighted Integral Method and Application to Analysis of Semi-infinite Domain

노혁천\*                      최창근\*\*  
Noh, Hyuk-Chun              Choi, Chang-Koon

---

#### ABSTRACT

The stochastic analysis of semi-infinite domain is presented using the weighted integral method, which is improved to include the higher order terms in expanding the displacement vector. To improve the weighted integral method, the Lagrangian remainder is taken into account in the expansion of the status variable with respect to the mean value of the random variables. In the resulting formulae only the 'proportionality coefficients' are introduced in the resulting equation, therefore no additional computation time and memory requirement is needed. The equations are applied in analyzing the semi-infinite domain. The results obtained by the improved weighted integral method are reasonable and are in good agreement with those of the Monte Carlo simulation. To model the semi-infinite domain, the Bettess's infinite element is adopted, where the theoretical decomposition of the strain-displacement matrix to calculate the deviatoric stiffness of the semi-infinite domains is introduced. The calculated value of mean and the covariance of the displacement are revealed to be larger than those given by the finite domain assumptions which is thought to be rational and should be considered in the design of structures on semi-infinite domains.

---

#### 1. 서 론

유한요소법(finite element method)에서는 해석대상 구조의 모든 해석적 인수들에 대하여 확정론적(deterministic) 가정을 한다. 즉, 재료 상수나 구조 기하 형상[5,7]의 공간적 분포가 공간좌표에 관계없이 일정하다고 가정한 다. 작용하는 하중에 대해서도 같은 가정을 하며 모든 하중은 정해진 위치, 시간 그리고 강도로 작용하는 것으로 가정된다. 그러나 실제의 구조물에는 공간적으로 또는 시간적으로 불확실성(uncertainty)이 존재한다 [3,4,5,8,9]. 이러한 불확실성은 직관적인 관점은 물론 실험이나 계측에서도 나타나는 해석대상 구조체의 고유의 특질이라고 할 수 있다.

구조계 내부의 이러한 불확실성의 존재는 아무리 정확한 해석기법을 적용한다고 하여도 그 해석기법이 확정론적 가정하에서 작용하는 한 실제 구조거동의 정확한 모사를 어렵게 할 것이다. 그러므로 어떠한 방법으로도 이러한 불확실성은 해석에 고려되어야 하며, 이들 불확실성이 야기할 수 있는 구조 거동의 불확실성 또한 어떠한 방법으로도 해석자와 설계자에게 제공되어야 한다. 구조계의 이와 같은 불확실한 해석인수에 의한 구조 거동에서의 불확실성을 통계학의 관점에서 조명하고자 하는 것이 추계론적 해석이다.

추계론적 해석이 유한요소법과 결합하면 추계론적 유한요소해석(stochastic FEM)이 되며, 이는 통계학적인 방법과 비통계학적인 방법이 존재한다. 본 연구에서 제안 및 개선한 추계론적 해석 방법은 비통계학적인 방법으로서 유한요소(finite element)내에 존재하는 해석인수의 불확실성을 확률변수화하여 해석에 적용한다. 불확실성을 가지는 해석변수의 구조계 거동에의 영향은 구조물의 반응변화도(response variability)로 나타내어진다. 추계론적해석분야의 최근 연구동향은 주로 재료탄성계수의 불확실성과 구조형상인수에 나타나는 불확

---

\* 한국과학기술원 건설환경공학과 조빙교수

\*\* 한국과학기술원 건설환경공학과 석좌교수

실성을 대상으로 하고 있다[3,4,5,8,9].

추계론적 유한요소해석법의 하나인 가중적분법(weighted integral method)은 유한요소 중 CST 요소에만 적용 가능하던 것[8]을 일반적으로 사용되는 평면요소와 평판 등에 적용할 수 있도록 확장되었고[3,9], 이는 다시 고차항을 포함으로 정식화로 이어졌으며[4], 본 연구에서는 고차항을 포함한 개선된 가중적분법을 반무한영역에 확장 적용하였다.

## 2. 응답변화도와 분산계수

무한영역은 영역의 광범위성에 의하여 입력에 대한 출력값이 유한한 영역의 그것보다는 일반적으로 크다고 할 수 있고 이에 따라 응답변화도 또한 큰 값을 나타낸다. 또한 대상 영역이 넓어짐에 따라 해석인자의 공간적 불확실성이 증가한다. 불확실성이 크다는 것은 추계론적 해석의 필요성이 증대함을 의미한다. 실제로 추계론적해석을 통해서 얻고자 하는 것은 해석 대상의 응답변화도인데, 이는 해석인수의 공간적/시간적인 임의성에 의해서 나타나며 분산(variance)으로 표현된다. 그러나 분산 그 자체로는 구조계의 반응이 의미하는 바를 알 수 없으므로 일반적으로 평균에 대한 상대값인 분산계수(coefficient of variation : COV)로 나타낸다.

$$\alpha_x = \left[ \frac{\text{Var}(X)}{E[X]^2} \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{\sigma_x}{|X_o|} \quad (1)$$

위의 식에서  $X_o$ 는 확률변수  $X$ 의 평균값을 나타내며,  $\sigma_x$ 는 확률변수  $X$ 의 표준편차를 나타낸다.

## 3. 가중적분법(Weighted Integral Method)

이 방법은 해석 대상 구조계 내의 임의성을 표현하는 임의장함수  $f(x)$ 와 확정론적 함수  $t(x)$ 의 곱에 대한 주어진 영역(일반적으로 유한요소)에서의 적분을 하나의 확률변수  $X$ 로 표기하고 이를 이용한다.

$$X = \int_{\Omega^e} f(x)t(x)d\Omega^e, \quad x \in \Omega^e, \quad \Omega^e \subset \Omega_{str} \quad (2)$$

임의장(random field)으로 가정하는 대상인 재료탄성계수  $E$ 값은 구조계의 한 점  $x$ 에서 다음과 같은 형태로 표현할 수 있다.

$$E(x) = E_o [1 + f(x)], \quad x \in \Omega_{str} \quad (3)$$

여기에서  $E_o$ 는 탄성계수의 평균값을 나타내고  $f(x)$ 는 임의장을 나타내는 함수로 공간상의  $x$  좌표에 따라 다른 값을 가지는 함수이다. 함수  $f(x)$ 는 재료탄성계수가 음의 값을 가지는 모호성을 배제하기 위해서 -1 보다 큰 값을 가져야 하며 식 (3)에서 함유하는 바와 같이 평균값은 0 이 된다 ( $E[f(x)]=0$ ). 이 함수는 해석자가 수식화할 수 없는 함수로서, 단지 임의 두 점에서의 이 함수의 곱에 대한 평균치로 정의되는 자동상관함수(auto-correlation function)를 가정할 수 있을 뿐이다. 본 연구에서는 식 (4)의 자동상관함수를 사용하였다.

$$R_f(\xi_1, \xi_2) = \sigma_f^2 \exp \left\{ - \frac{|\xi_1| + |\xi_2|}{d} \right\} \quad (4)$$

여기에서  $\xi_1, \xi_2$ 는 상대거리 벡터  $\xi$ 의  $x, y$  방향의 성분을 나타내며,  $d$ 는 상관관계거리(correlation distance)로서 임의장의 주파수 특성을 내포하는 인수이다.

## 4. 무한영역과 무한요소

무한영역 또는 반무한영역에 대한 해석은 유한요소 해석의 경우 작용하중의 영향이 미치지 않을 것으로 예상되는 경계를 택하고 그 부분까지를 유한요소로 모델링하여 해석하는 방법이 주로 사용되었고, 이 외에 경계적분법, 지수함수 형태의 좌표계로의 변환을 이용한 방법 그리고 경계요소를 사용하는 방법 등이 적용되어 왔다. 본 연구에서는 무한영역의 해석을 위하여 일반적인 유한요소를 무한영역으로 확장하여 Bettess 가 제안한 무한요소를 사용하고자 한다[1].

사용한 무한요소는 다음과 같이 감소함수(decay functions)를 포함하는 형상함수를 가지고 있다.

$$N_i(\xi, \eta) = d_i(\xi, \eta)M_i(\xi, \eta) \quad (5)$$

여기에서,  $M_i$  는 유한요소의 형상함수이고  $N_i$  는 무한요소의 형상함수를 나타낸다. 함수  $d_i$  는 감소함수(decay function)로서 이 함수는 그 자신의 절점에서 단위값을 가져야 한다. 무한점에서의 변위 값은 0 이라고 가정할 수 있으므로 형상함수는 무한점에서 0 의 값을 나타내야 한다. 무한요소에 사용되는 감소함수의 형태는 여러 가지가 사용될 수 있으나 사용 가능한 감소함수의 형태와는 관계없이 형상함수에 대한 미분은 식 (6)과 같이 표현된다.

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi_k} = \frac{\partial M_i}{\partial \xi_k} d_i + M_i \frac{\partial d_i}{\partial \xi_k}, \quad k=1, 2 \quad (6)$$

무한요소의 정의에 사용된 감소함수  $d_i$  의 형태는 다음과 같다.

$$d_i(\xi, \eta) = \left( \frac{\xi - \xi_o}{\xi - \xi_o} \right)^n \left( \frac{\eta - \eta_o}{\eta - \eta_o} \right)^n \quad (7)$$

여기에서 아래첨자  $o$  를 가지는 값은 무한영역의 반대방향에 위치하는 값이며,  $n$  은 형상함수  $M_i$  에서의 차수보다 큰 차수의 값을 사용한다. 식 (5)에서 보듯이 무한요소의 형상함수는 유한요소의 그것과 다르므로 수치적분을 위하여 새로운 적분점과 가중치를 필요로 한다. 본 연구에 사용된 적분점  $g_p$  와 가중치  $w_x$  는 다음과 같다[1].

$$g_p = \frac{2\xi}{1-\xi}, \quad w_x = w_{sp} \frac{2}{(1-\xi)^2} \quad (8)$$

## 5. 추계론적 유한요소해석을 위한 정식화

공간적 임의성을 가지는 재료상수로는 무한영역의 재료 탄성계수  $E$  를 택하였다. 임의장  $f(x)$ 는 균질(homogeneous)이며, Gauss 분포를 가지는 함수로 가정하였다.

### 5.1 요소강성행렬의 구성

식 (3)을 응력-변형을 행렬  $D_e$  의 탄성계수 식에 대입하면 요소강성행렬은 식 (9)와 같이 평균강성  $K_o^e$  와 임의장 함수를 포함한 부분인 가감강성행렬  $\Delta K^e$  의 두 부분으로 분해된다.

$$\begin{aligned} K^e &= \int_{\Omega^e} B^T D_e B d\Omega^e \\ &= \int_{\Omega^e} B^T D_o B d\Omega^e + \int_{\Omega^e} f(x) B^T D_o B d\Omega^e \\ &= K_o^e + \Delta K^e \end{aligned} \quad (9)$$

여기에서,  $\Delta K^e$  에 포함된  $B$  행렬을 상수만을 포함한 행렬인  $B_i$  와 이 상수행렬에 곱해지는 독립 다항식  $p_i$  의 곱의 합으로 쓰면 식 (10)과 같다. 일반 유한요소의 형상함수와 감소함수의 곱으로 표현되는 무한요소의 형상함수에 대한 미분 또한 전술한 바와 같이 정의되므로(식 5, 6), 식 (10)은 일반 유한요소는 물론 무한요소에도 적용이 가능하다.

$$B = B_1 p_1 + B_2 p_2 + \dots + B_{N_p} p_{N_p} = \sum_{i=1}^{N_p} B_i p_i \quad (10)$$

여기에서  $N_p$  는 행렬  $B$  에서 독립인 다항식의 수를 의미한다. 식 (10)을  $\Delta K^e$  에 대입하여 정리하면 가감강성행렬은 다음과 같이 확률변수  $X$  의 함수가 된다.

$$\begin{aligned} \Delta K^e &= \int_{\Omega^e} f(x) B^T D_o B d\Omega^e \\ &= B_1^T D_o B_1 X_{11} + (B_1^T D_o B_2 + B_2^T D_o B_1) X_{12} + \dots + B_{N_p}^T D_o B_{N_p} X_{N_p N_p} \end{aligned} \quad (11)$$

where,  $X_{ij} = \int_{\Omega^e} f(x) p_i p_j d\Omega^e$

## 5.2 고차항을 포함한 변위 벡터

Lagrangian 잔여치를 포함한 Taylor의 전개를 적용하여 변위 벡터에 대한 전개식을 나타내면 다음과 같다.

$$U = U_o + \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{i=1}^{N_{ni}} (X_i^e - X_i^{eo}) \left( \frac{\partial U}{\partial X_i^e} \right)_E + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{N_e} \sum_{s=1}^{N_{ni}} \sum_{i=1}^{N_{ni}} (X_i^r - X_i^{ro}) (X_j^s - X_j^{so}) \left( \frac{\partial^2 U}{\partial X_i^r \partial X_j^s} \right)_{X=\hat{x}} \quad (12)$$

식 (12)의 두번째 항에 나타난 미분식은 아래의 식과 같이 정리할 수 있으며,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X_i^r \partial X_j^s} = -K^{-1} \left[ \frac{\partial^2 K}{\partial X_i^r \partial X_j^s} - 2 \frac{\partial K}{\partial X_i^r} K^{-1} \frac{\partial K}{\partial X_j^s} \right] U \quad (13)$$

따라서 이 식을 식 (12)에 대입하여 정리하면 식 (12)의 마지막 항은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{1}{2} \left\{ 2K^{-1} \Delta K K^{-1} \Delta K \right\}_{X=\hat{x}} \quad (14)$$

여기에서 식을 단순화하기 위하여 다음과 같은 가정을 한다. 즉, 가감강성행렬  $\Delta K$  의 크기를 평균강성행렬과 해석 대상 추계장의 표준편차를 곱한 값으로 가정하는 것이다 ( $\Delta K = \sigma_{ff} K$ ).

이를 적용하여 식 (12)를 정리하면 다음과 같은 변위벡터 식을 얻을 수 있다.

$$U(X) = \frac{1}{1 - \bar{\sigma}^2} \left[ U_o - X_i^r K_o^{-1} \left( \frac{\partial K}{\partial X_i^r} \right)_E U_o \right] \quad (15)$$

이 식은 기존에 제안된 변위벡터에 대한 전개식에 단순히 상수항이 곱해진 형태를 보이고 있다. 이 식에 나타난 상수는 다음과 같다;  $\bar{\sigma} = \sigma_{ff} / (1 + \sigma_{ff})$ .

### 5.3 변위의 평균 및 분산의 계산

얻어진 식으로부터 변위에 대한 평균치는 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$E[U] = \frac{1}{1-\bar{\sigma}^2} U_o \quad (16)$$

공분산연산을 취하여 변위에 대한 공분산을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & Cov[U, U] \\ &= E[(U - U_o)(U - U_o)^T] \\ &= \left( \frac{1}{1-\bar{\sigma}^2} \right)^2 \sum_{e1=1}^{N_e} \sum_{e2=1}^{N_e} \sum_{i1=1}^{N_{N1}} \sum_{i2=1}^{N_{N1}} \left( K_o^{-1} \frac{\partial K}{\partial X_{i1}^{e1}} U_o U_o^T \left( \frac{\partial K}{\partial X_{i2}^{e2}} \right)^T K_o^{-T} \right) E[X_{i1}^{e1} X_{i2}^{e2}] \end{aligned} \quad (17)$$

## 6. 예제해석

### 6.1 해석 대상의 모델링과 이론해

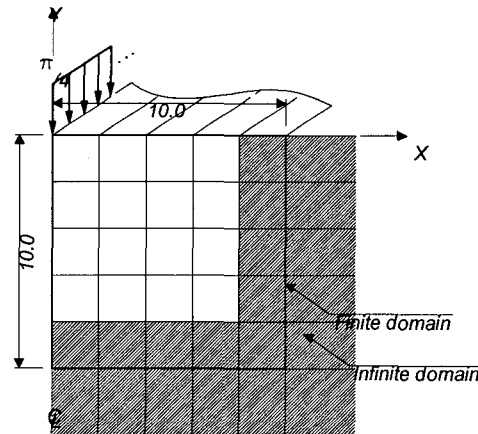


그림 1 반무한영역의 모델링

해석대상 반무한 영역은 그림 1 과 같다[3]. 가로 세로 길이는 10, 재료탄성계수  $E$  의 확장론적 수치는 1.0 이다. 재료탄성계수  $E$  의 공간표준편차  $\sigma_f$  는 0.1 로 가정하였다. 해석에는 두개의 모델을 사용하였다 :  $N$  개의 유한요소를 사용한 Model 1 과  $N1$  개의 유한요소와  $N2$  개의 무한요소를 혼용한 Model 2. 여기에서,  $N=N1+N2$  이다. 해석대상체는  $-y$  방향으로 무한대의 영역을 가지며,  $p=\pi/2$  의 선하중이 작용된다. 이러한 구조와 하중상태는 평면-변형률의 상태이므로 평면모델링이 가능하며  $y$  축에 대한 대칭 반모델이 가능하다.

위와 같은 반무한체에 대한 이론해는 식 (18a)로 표현된다[1].

$$v|_{x=0} = \frac{2p}{\pi E} \log_e \frac{d}{y} \quad v|_{x=0} = \log_e \frac{d}{y} \quad (18a,b)$$

하중은 그림 1 과 같이  $x=y=0$  인 점에  $-y$  방향으로 작용되며, 1/2 모델링에 의하여  $p=\pi/4$  가 사용되었다. 이 경우 이론해는 식 (18b)와 같다. 위의 식은 하중 작용점 아래의  $y$  방향 변위를 나타내고 있다. 여기에서  $d$  는  $y$  방향의 변위가 발생하지 않는다고 가정되는 하중작용점으로부터의  $x$  방향거리를 나타낸다. 본 해석에서는  $d$  의 값으로 12.629 를 사용하였다.

### 6.2 이론해와의 비교 : 확정론적 해석

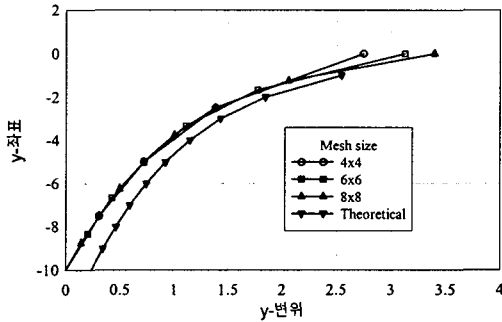


그림 2 Model 1 과 이론해의 비교

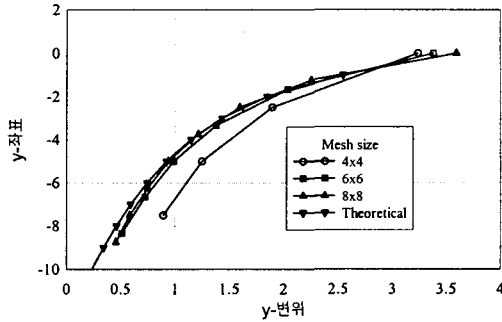


그림 3 Model 2 와 이론해의 비교

그림 2 는 Model 1 과 Model 2 의 해석결과를 보여주고 있다. 두 경우 모두 요소망의 세분화에 따라 결과의 개선이 나타나고 있는 것으로, 유한요소만을 사용한 Model 1 의 경우에는 하중작용점에서만 결과가 향상되는 것을 알 수 있다. 그러나 무한요소를 조합한 경우 결과는 이론해에 가까워지고 있는 것을 볼 수 있다. 이 결과는 무한요소의 적용에 따른 해석의 합리성을 잘 보여주고 있다.

### 6.3 추계론적 해석 결과 비교

본 예제의 경우 하중이 작용하는 지점은 특이점(singular point)으로서 이에 대한 변위는 이론적으로 무한대의 값을 가지게 된다. 그러므로 결과의 비교는 하중작용점의 아래 절점에서의 변위에 대하여 나타내고자 한다.

표 1 Model 1 과 Model 2 의 해석 결과 비교 (WI 는 가중적분법의 약자임)

y 좌표(-)		Model 1 64 유한요소			Model 2 49 유한요소+ 15 무한요소			이론해 변위
		변위	COV	표준편차	변위	COV	표준편차	
1.25	WI	-2.0521	$3.645 \times 10^{-2}$	0.0748	-2.2476	$4.001 \times 10^{-2}$	0.0899	-2.3129
	개선 WI	-2.0692	$3.706 \times 10^{-2}$	0.0767	-2.2663	$4.068 \times 10^{-2}$	0.0922	

표 2 변위 비교

항목	비율	Model 1/Exact		Model 2/Exact		Model 2/Model 1
		WI	개선 WI	WI	개선 WI	
평균변위		0.8872	0.8946	0.9718	0.9800	1.0953
COV						1.0978
표준편차						1.2019

표 1 과 2 는 하중절점 바로 아래 절점에서의 해석 결과를 제시한 표로서 기존의 가중적분법과 개선된 가중적분법에 의한 결과를 비교하여 보여주고 있다. 먼저 무한요소의 적용에 의한 결과의 개선을 보면, 표 2 에서 보듯이 mdoel 2 의 경우는 이론해에 매우 근접한 결과를 보이고 있는 것을 알 수 있다. 특히 개선된 가중적분법에 의한 평균변위의 경우 model 2 에서 이론해의 98%에 이르고 있는 것을 볼 수 있다. 변위의 표준편차는 Model 2 가 Model 1 에 비하여 20%정도 증가하는 결과를 나타내고있다(표 2). 이는 변위의 증가량인 9.5%에 비하여 두 배 이상 크게 나타난 결과로서 추계론적 해석의 결과에 미치는 확정론적 해석 결과의 영향이 매우 큼을 보여주고 있다.

가중적분법은 추계장의 특성을 자동상관함수(auto-correlation function)를 사용하여 고려한다. 이 함수에 대한 적분에는 요소간의 상대거리를 고려하게 되는데 이 경우 요소 e1 과 요소 e2 의 상대거리는 e1 이나 e2 가 무한요소일 경우 무한대로 확장되므로 무한영역을 고려한 응답의 변화도를 얻을 수 있다. 이러한 특징은 임의장을 생성하여 하나의 요소에 하나의 변수값을 대입하는 몬테카를로 시뮬레이션이나 유한요소만으로 모델링 할 경우 등에는 구현할 수 없는 것으로 본 해석의 장점중의 하나라고 할 수 있다.

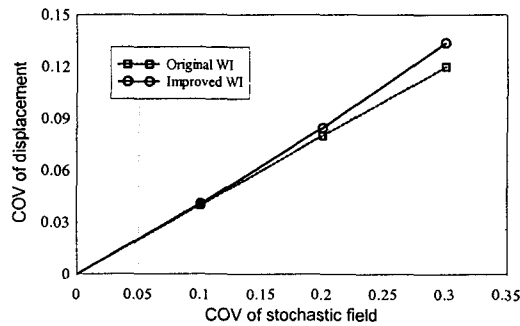


그림 4 추계장 COV의 변화와 변위의 COV의 관계

그림 4 는 개선된 정식화의 특징을 보여주는 그래프로서 추계장 분산계수의 증가에 의한 구조반응 변화도의 비선형적인 거동을 보여주고 있다. 점선으로 나타난 바와 같이 기존의 가중적분법의 경우 추계장 분산계수와 반응의 분산계수는 서로 선형의 관계에 있다. 그러나 몬테카를로 시뮬레이션 등의 통계학적 방법에 의하면 이들 관계는 비선형성을 보이고 있으며, 개선된 가중적분법은 이러한 경향을 잘 표현하고 있다.

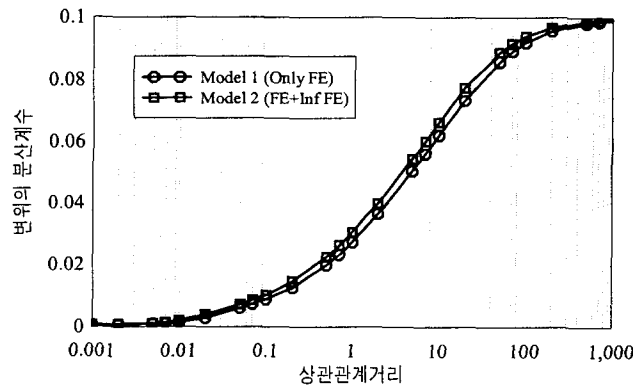


그림 5 상관관계거리 d에 따른 분산계수

그림 5 는 자동상관함수의 상관관계거리  $d$  의 변화에 따른 변위분산계수(COV)의 변화를 나타낸 것이다.  $d$  의 값이 크다는 것은 두 지점간의 상관관계가 크다는 것을 의미한다. 그래프에 나타나는 특징은  $d$  의 값이 무한대에 가까워지면서 분산계수는 임의장의 가정된 표준편차인  $\sigma_f=0.1$  로 수렴하고 있다는 것이다.  $d$  의 값이 무한대일 경우 추계장 함수는 위치에 관계없이 일정한 상수값을 나타낸다.

$$\langle f(x)_1, f(x)_2, \dots \rangle = \langle c_1, c_2, \dots \rangle \quad (20)$$

추계론적 해석은 이들 장함수들에 대한 개별적 해석이고 그 결과들에 대하여 ensemble mean 의 개념을 적용하므로 이들에 대한 표준편차는 임의장의 표준편차와 같게 된다. 그림 5 에서 관찰 할 수 있는 또 하나의 특징은 Model 2 의 경우가 Model 1 의 경우에 비해서 더 큰 공분산값을 나타내고 있다는 것이다. 공분산이 평균에 대한 표준편차의 비로 정의되므로 Model 2 를 사용할 경우 Model 1 에 비해서 더 큰 값의 표준편차를 얻을 수 있다는 것을 나타낸다. 그러므로 Model 2 를 이용할 경우 보다 안전측의 해석/설계가 될 것이다.

## 7. 결 론

본 연구에서는 추계론적 해석방법의 하나인 가중적분법의 개선에 대하여 논의 하였고, 이를 반무한영역에 대한 추계론적 유한요소해석에 적용하였다. 기존 가중적분법의 경우 변위벡터는 Taylor 시리즈 전개시 1 차항까지만 포함하였으나, 본 연구에서는 Lagrangian 잔여치를 고려하고 이를 근사화하여 기존의 식에 상수만이 개입되는 간단하고 유용한 정식화를 수행하였다.

개선된 정식화는 반무한영역에 대한 추계론적 해석에 적용되었다. 본 연구에서 사용한 예제의 모델링은 유한요소만을 사용한 Model 1 과 무한요소를 조합하여 사용한 Model 2 의 두 가지로하였다. Model 2 의 결과는 이론해에 잘 일치하였고, Model 1 은 상대적으로 강성이 크게 평가되어 무한영역에 대한 해석에서 무한요소의 사용이 매우 바람직한 결과를 나타냄을 알 수 있었다.

해석결과 Model 2 는 Model 1 에 비하여 20% 정도 큰 표준편차를 나타내어 실제의 구조물의 해석 및 설계에 고려해야 할 불확실성이 단순히 유한요소만을 사용했을 경우보다 매우 크다는 것을 알 수 있었다. 개선된 정식화의 경우 기존의 방법에 비하여 평균변위와 변위의 표준편차에서 높은 값을 제공해 주었으며, 몬테카를로 시뮬레이션과 같은 통계학적 추계론적해석에서 나타나는 반응분산계수의 추계장분산계수에 대한 비선형 거동 경향을 잘 모사하는 것으로 나타났다.

## 참고문헌

1. P. Bettess, "More on Infinite Elements", *Int'l Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 15, pp.1613-1626, 1980.
2. A. Curnier, "A Static Infinite Element", *Int'l Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 19, 1479-1488, 1983.
3. C.K. Choi and H.C. Noh, "Stochastic Finite Element Analysis of Plate Structures by Weighted Integral Method", *Structural Engineering and Mechanics, An International Journal*, Vol. 4, No. 6, pp.703-715, 1996.
4. C.K.Choi and H.C.Noh, "Weighted Integral SFEM Including Higher Order Terms", *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, Vol. 126, No. 8, pp.859-866, August, 2000.
5. C.K.Choi and H.C.Noh. "Stochastic Analysis of Shape Imperfection in RC Cooling Tower Shells", *Journal of Structural Engineering, ASCE*, Vol. 126, No. 3, pp.417-423, March, 2000.
6. M. Kleiber and T. D. Hein, "The Stochastic Finite Element Method"
7. M. A. Lawrence, "Basis Random Variables in Finite Element Analysis", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 24, pp.1849-1863, 1987.
8. G. Deodatis, W. Wall and M. Shinozuka, "Analysis of Two-Dimensional Stochastic Systems by the Weighted Integral Method", In P. D. Spanos and C. A. Brebbia, editors, "Computational Stochastic Mechanics", 395-406, 1991.
9. 최창근, 노혁천, "사변형 요소를 이용한 추계론적 유한요소해석", *대한토목학회 논문집*, 제 13 권, 제 5 호, 29-37, 1993.