

## 최소 에너지 원리를 이용한 효율적인 유한요소 격자 생성에 관한 연구 Effective Mesh Optimization Rule for Finite Element Method Using Energy Minimization

박시형\*    김지환\*\*  
Park, Si-Hyong    Kim Ji-Hwan

---

### ABSTRACT

A new remeshing algorithm based on the energy minimization is proposed for the finite element method. This utilizes the variation of mapping function between the master and global elements. The resultant equations are only the other form of the governing equations. However the equations have an important information about the relations between the elements. By assuming the solutions of the governing equations, these relations are used very usefully for the mesh optimization. The explicit formulations are presented for the relations of 1-dimensional equations and some examples are solved for comparison with the other methods. In addition, 2-dimensional expansion is presented for the general use.

---

### 1. 서론

유한요소법은 컴퓨터의 발달과 함께 공학 문제의 수치적 해법으로 널리 이용되는 방법이다. 최근들어 유한요소법의 정확도를 높이기 위하여 여러가지 방법들이 도입되었으며 이것들 중 한가지가 adaptive finite element method(AFEM)이다. AFEM은 수치적 근사해를 구하는 과정에서 해의 정밀도가 요구되는 부분에 자유도를 많이 부여함으로써 전반적으로 정확한 해를 구하는 것이며 이러한 연구에는 h-adaptivity, p-adaptivity 그리고 r-adaptivity 등이 있다<sup>(1),(2),(3)</sup>. h-adaptivity와 p-adaptivity를 간략하게 설명하면, 해석하고자 하는 문제의 영역(domain)에서 필요한 부분에 유한요소를 추가하거나 또는 요소들간의 격자는 그대로 두고 각각의 요소에서 보간함수의 차수를 높이는 방법이며 이들의 특성을 동시에 사용하는 hp-adaptivity 방법 또한 연구되고 있다. 이 두가지 방법은 공통적으로 수치해의 정확도를 높이기 위하여 자유도를 증가시키는 것으로 r-adaptivity는 이들과는 다르게 고정된 자유도를 가지고 근사해의 오차를 줄이는 방법을 이용한다. 또한 h, p-adaptivity 방법은 동적인 거동을 해석하는데 있어서 적용하기 매우 어려운 반면에 r-adaptivity는 시간에 따라 격자의 위치를 이동함으로써 동적 문제에 적용된 바 있다<sup>(4)</sup>.

---

\* 서울대학교 기계항공공학부 박사과정

\*\* 정희원, 서울대학교 기계항공공학부 교수

r-adaptivity 방법에 있어서 중요한 것은 유한요소 격자의 위치를 재설정하는데 있어서 기준이 되는 관계식을 구성하는 것과 이 관계식을 만족하는 격자 생성 방법이다. Lynch와 O'Neill<sup>(5)</sup>은 시간과 공간상에서 상(phase) 변화가 있는 문제에 대하여 변형하는(deforming) 유한요소를 구성하여 적용하였다. 공간상의 근사법으로는 Galerkin formulation을 이용하였고 시간에 대하여는 유한차분법을 사용하였다. 시간에 따라 변화하는 격자에 관한 문제의 경우에는 격자의 움직임이 시간에 따라 서서히 변화함으로써 필요한 구간에 집중 또는 분산되는 효과를 쉽게 얻을 수 있는데 반하여 정적인 문제의 경우에는 최적화된 격자를 빨리 구하는 것이 중요하다. Jimack<sup>(6)</sup>은 정적 구조물 해석에 대하여 시간에 대한 변화를 도입하여 변형하는 유한요소 방법을 이용하고 정상 상태에 도달한 결과로써 최종적인 격자와 그에 적합한 해를 대신하였다. 해의 근사법으로는 Galerkin 방법을 이용하였으며 h-adaptivity 방법과의 연계성에 관하여 언급하였다. 이 방법은 수치적으로 안정한 특성을 보였으나 시간의 간격에 따라 불필요하게 많은 반복계산이 필요한 것이 단점이다. McFee<sup>(7)</sup> 등은 유한요소법에서 계산되는 행렬을 체계적으로 격자에 관하여 미분한 후 그 결과를 이용하여 에너지를 최소화하는 격자의 조건을 구하였으나 격자의 재구성 방법은 구체적으로 표현하지 않았다. 격자의 재구성 방법에 관한 연구에 있어서 위에서 언급한 바와 같이 에너지를 기반으로 하는 방법은 반복 계산을 많이 필요로 하게 됨으로써 수치적으로 적용하기 좋은 특성을 가지지 못한다. 이에 반하여 부분적 오차를 기반으로 하는 방법은 격자의 재구성 방법을 많지 않은 반복 계산으로 격자를 생성할 수 있는 특징이 있다. Cao<sup>(8)</sup> 등은 이러한 방법으로 다양한 오차 지표(error indicator)를 기반으로 한 격자들간의 특징을 비교하였으며 해의 경사도 등에 근거한 오차 지표에 비하여 보간 오차(interpolation error)를 이용하는 것이 효율적 이면서 정확한 방법으로 제시된 바 있다.

본 연구에서는 유한요소 격자의 위치가 가지는 의미를 master 요소와 global 요소간의 사상(mapping) 관계를 지배하는 중요한 부분으로 보고 구조물의 에너지를 사상 관계식의 변분으로 최소화 하였다. 이를 통해 구성되는 관계식은 구조물의 지배 방정식의 변형된 형태에 불과하지만 격자 생성에 있어서 중요한 의미를 가지고 있다. 직접적으로는 에너지의 감소에 필요한 격자의 위치 이동 정도를 나타내며 구성된 격자의 최적화 정도의 기준으로 삼을 수 있으며 빠른 격자의 재구성을 위한 관계식을 얻을 수 있다. 빠른 격자의 재구성 관계식을 얻기 위하여 에너지 범함수를 사상 함수에 관하여 변분한 결과를 이용하기 위하여 방정식의 해를 보간함에 있어서 나타나는 오차를 이용하였고 그 결과, 여러가지 지배 방정식에 있어서 서로 다른 모양의 최적 격자 관계식을 얻을 수 있었다.

## 2. 1차원 문제

### 2.1 사상 함수의 변분

사상 함수에 대한 변분의 방법을 이해하기 위하여 다음과 같은 기본적인 2계 미분 방정식의 예를 들어본다.

$$au_{,xx}(x) + f = 0 \quad (1)$$

문제의 단순화를 위하여  $a$ 와  $f$ 는 상수로 가정한다. 지배 방정식을 식 (1)로 가지는 에너지 범함수는 다음과 같다.

$$E = \int_L \left( \frac{a}{2} u_{,x}^2 - fu \right) dx \quad (2)$$

식 (2)를 좌표변환을 통하여  $\xi$  공간에서 표현하면 다음과 같다.

$$E = \int_I \left( \frac{a}{2} \frac{u_{,\xi}^2}{x_{,\xi}^2} + fu \right) x_{,\xi} d\xi \quad (3)$$

이 식을  $x_{,\xi}$ 에 대하여 변분하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\delta E = \int_I \left( -\frac{a}{2} u_{,x}^2 - fu \right) \delta x_{,\xi} d\xi \quad (4)$$

이 식은 지배 방정식 (1)의 변형된 형태이며 에너지를 최소화하는 격자가 만족해야 하는 조건이다. 반복계산에 의한 격자 재구성 방법으로는 (4)를 다음과 같이  $\delta x_{,\xi}$ 의 계산에 이용할 수 있다.

$$\delta x_{,\xi} = \alpha \left( \frac{a}{2} u_{,x}^2 + fu \right) \quad (5)$$

$\alpha$ 는 격자의 이동 정도를 결정하는 계수이며 격자간의 겹침 또는 교차를 방지하는 역할을 한다. 이 방법은 최적화된 형태와 상당한 차이를 가지는 격자로부터 계산을 시작할 경우 많은 반복 계산 과정을 거쳐야 하는 단점이 있으나 안정적으로 격자의 최적화를 수행할 수 있다. 서론에서 언급한 바와 같이 문헌<sup>(7)</sup>에서는 임의의 격자들이 식 (4)를 만족하는 정도로서 격자의 성능을 판단하는 표준(criteria)으로 삼았으나 격자 재생성의 방법을 명시적으로 제시하지는 못하였다.

또다른 관점에서 식 (4)가 가지는 특성을 이용하면 격자 재구성의 방법으로 이용할 수 있다. 먼저 1차원 문제에서 영역의 변화가 없음을 나타내는 식은 다음과 같다

$$\int_I \delta x_{,\xi} d\xi = 0 \quad (6)$$

위 식과 식 (4)를 Lagrange's multiplier로 결합하면 다음과 같은 조건을 얻는다.

$$-\frac{a}{2} u_{,x}^2 - fu + \lambda = 0 \quad (7)$$

식 (7)은 지배방정식 (1)의 또다른 형태이며 이것을 이용하면 식 (4)의 의미를 알 수 있다. 식 (4)가 가지는 의미는 각 요소에서  $(-\frac{a}{2} u_{,x}^2 - fu)$ 의 평균값이 같을때 최적의 격자가 된다는 것이다. 그림 1은  $(-\frac{a}{2} u_{,x}^2 - fu)$ 의 평균값이 절점을 움직이려 하는 양에 비례함을 나타낸 것이다. 이는 물리적 현상인 응력의 평형 관계식 또는 힘의 평형 방정식과 유사한 형태를 지니고 있다. 2차원 문제에서는 이러한 특징이 유용하게 이용될 수 있다.

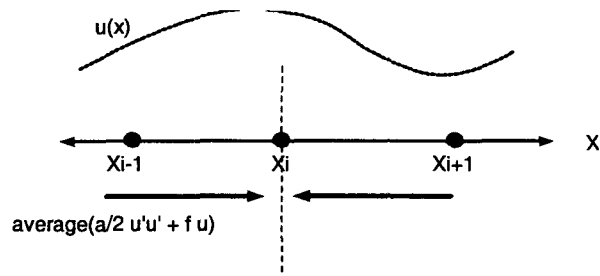


Figure 1 요소간의 상호작용에 의한 절점의 이동

위의 조건을 만족하는 요소를 구성하기 위하여 방정식의 해  $u$ 를 국소적으로 Taylor 전개하여  $u_T$ 라 하고 이를 다시 선형 함수로 보간한 값을  $u_L$ 이라 하자. 이때 국소적으로  $(-\frac{a}{2} u_{T,x}^2 - fu_T)$ 는 상수값을 가지도록 하고 보간된 구간 내에서  $(-\frac{a}{2} u_{L,x}^2 - fu_L)$ 의 평균값을 계산하면 그 오차에서 가장 큰 차수를 가지는 부분은  $u_{T,x}\Delta x$ 에 비례하게 된다. 다시 말하면 격자의 크기가 해의 두번 미분 값에 반비례할 경우에 식 (4)를 가장 잘 만족한다는 것이다. 식 (1)에 의하면  $u_{xx}$ 가  $f$ 에 비례하므로 결과적으로 균일한 격자를 가지는 것이 가장 작은 에너지를 가진다는 사실을 알 수 있다. 아래 그림 2와 표 1은 양단 고정 경계 조건을 부여한 방정식의 해를 나타내고 있으며 양 끝단쪽에 격자를 밀집하여 얻은 결과와 균일한 격자의 결과를 비교한 것이다. 그림에서 알 수 있듯이 양 끝단쪽 격자의 밀도가 높은 경우 가운데로 격자를 밀어 주는 작용이 있음을 볼 수 있다. 매우 간단한 문제이기 때문에 그 작용의 크기는 매우 작으며 이것은  $(-\frac{a}{2} u_{L,x}^2 - fu_L)$ 의 평균값이 최적의 격자가 아닌 경우에도 요소마다 거의 같은 것으로 알 수 있다. 표 1을 통해 해의 오차를 살펴보면 에너지의 관점에서 2배 정도 차이 있음을 알 수 있다.

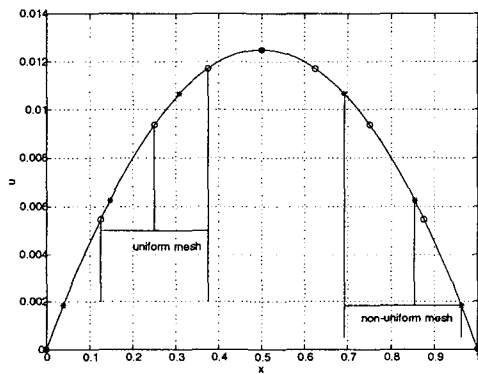


Figure 2 (a) 여러가지 격자에 대한 해

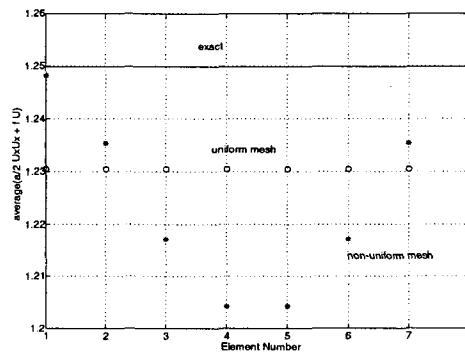


Figure 2 (b) 각각의 요소에서 계산된 식 (7)의 평균값

표 1 여러가지 격자 구성에 대한 에너지와 오차

|                        | non-uniform mesh | uniform(optimized) mesh | exact solution |
|------------------------|------------------|-------------------------|----------------|
| total energy           | -0.4062          | -0.4102                 | -0.4167        |
| total energy error (%) | 2.5%             | 1.5%                    |                |
| error energy norm      | 0.0105           | 0.0065                  |                |

## 2.2 Timoschenko Beam

Timoschenko beam 문제의 에너지 범함수는 다음과 같다.

$$E = \int_L \left( \frac{1}{2} EI \phi_{,x}^2 + \frac{1}{2} GA (\phi + w_{,x})^2 - fw \right) dx \quad (8)$$

앞에서와 같이  $x, \xi$ 에 대하여 변분하여 정리하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\delta E = \int_l \left( -\frac{1}{2} EI \phi_{,x}^2 + \frac{1}{2} GA w_{,x}^2 + \frac{1}{2} GA \phi^2 - fw \right) \delta x, \xi d\xi \quad (9)$$

이 식은  $(-\frac{1}{2} EI \phi_{,x}^2 + \frac{1}{2} GA w_{,x}^2 + \frac{1}{2} GA \phi^2 - fw)$ 의 평균값이 각 요소에서 같아야 한다는 조건을 의미하며 앞에서와 같은 과정을 거쳐 격자의 조건을 계산하면 다음과 같다.

$$w_{,xx}(2f - GA w_{,xx}) \Delta x^2 = c \quad (10)$$

$C^0$ 연속성의 요소에 대하여  $w_{,xx}$ 의 계산이 명시적으로 표현되지 않으므로 지배방정식을 이용하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$(f + \phi_{,x})(3f + \phi_{,x}) \Delta x^2 = c \quad (11)$$

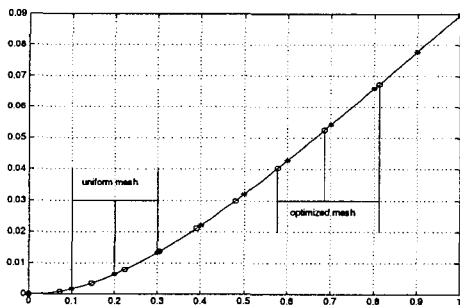


Figure 3 (a) 여러가지 격자에 대한 해

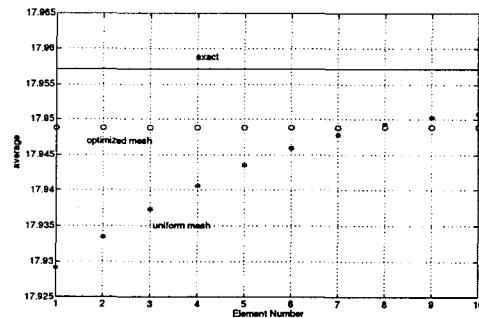


Figure 3 (b) 각각의 요소에서 계산된 식 (9)의 평균값

그림 3은  $x=0$ 인 지점에 고정단을 가지는 경계조건으로부터 구한 방정식의 해이며 균일한 격자로부터 시작하여 최적화된 격자의 위치와 변위 등을 나타낸 것이다. 균일한 격자를 가지는 경우에 그 격자의 위치를 고정단 쪽으로 밀어내는 작용을 보여주고 있다.

### 3. 2차원 문제

2차원 문제도 1차원과 같은 방법을 이용하게 되지만 최적화된 격자가 만족해야 하는 관계식은 4가지가 된다. 다음과 같은 기본적인 2계 미분 방정식의 예를 들어본다.

$$T\nabla^2 u(x, y) + f = 0 \quad (12)$$

여기서  $a$ 와  $f$ 는 상수로 가정한다. 1차원의 경우와 같은 방법으로 지배 방정식을 식 (12)로 가지는 에너지 범함수를 정의하고  $\xi - \eta$  공간으로 좌표변환을 하게되면 다음 식을 얻는다.

$$E = \int_d \left( \frac{T}{2} [u, \xi u, \eta] J^{-1} J^T \begin{bmatrix} u, \xi \\ u, \eta \end{bmatrix} - fu \right) \det(J) d\xi d\eta \quad (13)$$

$J$ 는  $x - y$  좌표와  $\xi - \eta$  좌표간의 변환을 정의하는 행렬이며 그 관계식은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x, \xi & x, \eta \\ y, \xi & y, \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d\xi \\ d\eta \end{bmatrix} \quad (14)$$

$J$ 의 역행렬의 변분은  $JJ^{-1} = I$ 를 이용하여 쉽게 구할 수 있으며 이를 이용하여 식 (13)을 사상함수에 관하여 변분하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\delta E = \int_d \left( -T [u, x u, y] (\delta J) \text{adj}(J) \begin{bmatrix} u, x \\ u, y \end{bmatrix} + \frac{T}{2} [u, x u, y] \begin{bmatrix} u, x \\ u, y \end{bmatrix} \delta \det(J) - fu \delta \det(J) \right) d\xi d\eta \quad (15)$$

식 (15)에서  $\text{adj}(J)$ 는 adjoint 변환이며 이 식을 통하여 다음 결과를 얻을 수 있다.

$$\left( \frac{T}{2} u, x - \frac{T}{2} u, y + fu \right) y, \eta - T u, x u, y x, \eta + \lambda_1(\eta) = 0 \quad (16a)$$

$$\left( -\frac{T}{2} u, x + \frac{T}{2} u, y + fu \right) x, \xi - T u, x u, y y, \xi + \lambda_2(\xi) = 0 \quad (16b)$$

$$\left( -\frac{T}{2} u, x + \frac{T}{2} u, y - fu \right) y, \xi + T u, x u, y x, \xi + \lambda_3(\xi) = 0 \quad (16c)$$

$$\left( \frac{T}{2} u, x - \frac{T}{2} u, y - fu \right) x, \eta + T u, x u, y y, \eta + \lambda_4(\eta) = 0 \quad (16d)$$

그림 4는 식 (16)이 나타내는 바를 그림으로 표현한 것이다. 이것은 마치 응력의 평형 방정식과 유사한 모양을 가지고 있으며 이를 이용하여 격자의 재구성에 이용할 수 으며 1차원 문제에서와는 다르게  $x_i$ 는 두가지 작용에 의하여 움직이려 함을 알 수 있다. 이러한 작용의 크기를 수치적으로 환산하여 격자를 이동시키며 반복계산하며 최적의 격자를 구성할 수 있다. 그러나 1차원 문제의 경우처럼 빠른 계산을 위하여 보간 함수를 이용하는 것은 매우 복잡하게 되는 반면 요소 상호간의 연결 조건에 의하여 격자들의 위치가 크게 변하지 않는 특징을 고려한다면 반복계산법의 성능도 뛰어나다 할 수 있다.

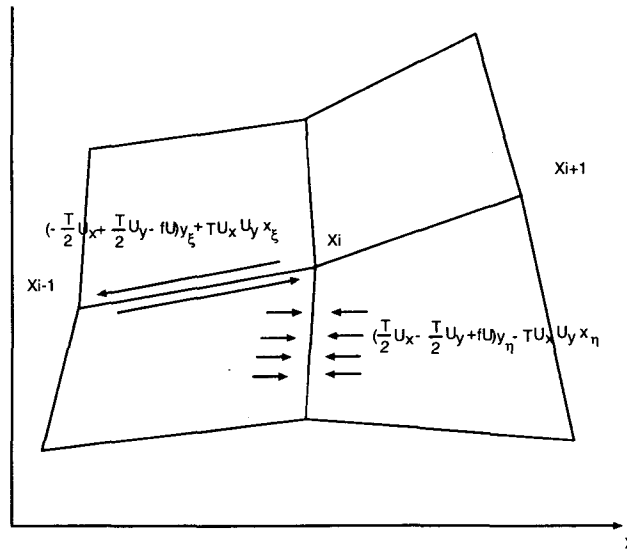


Figure 4 요소간의 상호작용에 의한 절점의 이동

#### 4. 결론

에너지의 최소화에 근거한 유한요소 격자의 재구성 방법을 연구하였으며 격자의 위치와 사상함수간의 관계를 이용하여 변분법을 적용하였다. 1차원과 2차원의 경우에 에너지를 최소화하는 격자가 가지는 조건을 계산하였고 이를 바탕으로 격자의 이동 방향과 크기를 결정할 수 있는 식을 전개하였다. 1차원의 경우에는 보간 함수를 이용하여 더욱 빠른 절점의 재구성이 가능함을 알 수 있었고 또한 이것은 문제에 따라 다른 함수 또는 가중치(weight) 함수가 계산됨을 암시한다. 2차원의 경우에는 절점의 위치 변화와 그 양을 결정하는 조건을 전개하였으며 그 형태가 응력의 평형식과 유사함을 발견할 수 있었다.

#### 참고문헌

1. K.T.Kang and B.M.Kwak, "Optimization of Finite Element Grids using Shape Sensitivity Analysis in terms of Nodal Position," Finite Elements in Analysis and Design, Vol.26, 1997, pp.1-19
2. I.Babuska, T.Strouboulis and K.Copps, "hp Optimization of Finite Element Approximations: Analysis of the Optimal Mesh Sequences in One Dimension," Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.150, 1997, pp.89-108

3. P.Kettil and N.Wiberg, "Adaptive FE-Analysis of Column Supported Reissner-Mindlin Plates," *Computers & Structures*, Vol.72, 1999, pp.605-626
4. S.Lakshmanan, B.K.Soni and K.Balasubramaniam, "R-Adaptation in Finite Element Modelling of Elastic Solids," *Computers & Structures*, Vol.63, No.2, 1997, pp.249-257
5. D.R.Lynch and K.O'Neil, "Continuously Deforming Finite Elements for the Solution of Parabolic Problems, With and Without Phase Change," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.17, 1981, pp.81-96
6. P.K.Jimack, "An Optimal Finite Element Mesh for Elastostatic Structural Analysis Problems," *Computers & Structures*, Vol.64, No.1-4, 1997, pp.197-208
7. S.McFee and D.Giannacopoulos, "Optimal Discretizations in Adaptive Finite Element Electromagnetics," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.52, 2001, pp.939-978
8. W.Cao, W.Huang and R.D.Russell, "Comparison of Two-Dimensional R-adaptive Finite Element Methods using Various Error Indicators," *Mathematics and Computers in Simulation*, Vol.56, 2001, pp.127-143