

## 장력을 받는 이동 평판이 갖는 진동의 스펙트럴 요소해석 Spectral Element Analysis of the Vibrations of Moving Plates Subjected to Axial Tension

조주용\* 김주홍\*\* 이우식\*\*\* 박상덕§  
Cho, Joo Yong Kim, Joo Hong Lee, USik Park, Sang Deok

### ABSTRACT

The use of frequency-dependent dynamic stiffness matrix (or spectral element matrix) in structural dynamics may provide very accurate solutions, while it reduces the number of degrees-of-freedom to improve the computational efficiency and cost problems. Thus, this paper develops a spectral element model for the thin plates moving with constant speed under uniform in-plane tension. The concept of Kantorovich method is used in the frequency-domain to formulate the dynamic stiffness matrix. The present spectral element model is evaluated by comparing its solutions with the exact analytical solutions. The effects of moving speed and in-plane tension on the flexural wave dispersion characteristics and natural frequencies of the plate are numerically investigated.

### 1. 서 론

축 방향으로 이동하는 평판은 임계속도에서 심한 진동을 보인다. 이러한 시스템의 예로는 고속 띠톱, 자기 테이프와 종이 테이프, 종이 판, 이동하는 밴드(band)와 벨트와 같은 것들이 있다. 축 방향으로 이동하는 재료에 대한 넓은 범위의 학문적인 내용들은 참고문헌<sup>(1)</sup>에서 찾아볼 수 있다. 축 방향으로 이동하는 줄이나 보와 같은 1차원 적인 구조물에 대해서는 많은 연구가 이루어졌지만, 이동하는 방향으로 장력을 받고 있는 평판에 대한 연구는 상대적으로 적다.

1968년, Soler<sup>(2)</sup>는 일정한 속도로 이동하는 밴드에 대해 간단한 굽힘-비틀림 평판 모델을 사용하였다. Ulsoy와 Mote<sup>(3)</sup>은 최초로 Ritz방법과 유한요소-Ritz방법을 이용해 띠톱 갈에 대한 모델로 이동평판의 진동을 연구하였고, Lengoc 과 McCallion<sup>(4)</sup>은 이 모델에 대하여 확장된 Galerkin 방법을 적용시켜 내면응력이 고유진동수에 미치는 영향에 대해 연구하였다. Lin 과 Mote<sup>(5)</sup>는 von Karman 비선형 이론을 이용하여 횡 하중을 받고 있는 판에 대해 응력분포와 큰 평형 변위에 대해 연구했고, 이후에, Lin<sup>(6)</sup>은 정규의 운동방정식형태를 이용해 양단이 단순지지 되어있고 다른 두 단은 자유단인 이동평판의 안정성에 대해 연구하였다. Wang<sup>(7)</sup>은 Mindlin-Rissner 평판 모델에 기초한 직교 이방성 이동평판에 대한 혼합 유한요소해석을 발전시켰다. Damaran 과 Langoc<sup>(8)</sup>은 Rayleigh-Ritz방법을 능동제어를 위한 이산 매개변수 운동방정식 해석에 적용하였다.

본 연구에서는 장력을 받으면서 일정한 속도로 이동하는 얇은 평판의 진동해석을 위한 스펙트럴 요소모델을 유도하고자 한다. 스펙트럴 요소모델을 유도하는 과정에 Kantorovich방법의 개념을 사용하였다.

### 2. 운동 방정식

그림 1에서와 같이 길이  $L$ , 폭  $b$ , 두께  $h$ 인  $x$ -방향으로 일정한 속도  $c$ 로 움직이는 직사각형 형태의 얇은 평판을 생각한다. 평판의 물성치는 단위 부피당 질량  $\rho$ , 탄성계수  $E$ , 포아송의 비  $\nu$ 로 한다.  $y = 0$  과  $y = b$ 의 양 끝단이

\* 인하대학교 기계공학과 석사과정

\*\* 인하대학교 기계공학과 박사 후 과정

\*\*\* 정회원. 인하대학교 기계공학과 교수

§ 포항산업과학연구원 선임 연구원

모두 자유단 경계조건을 갖는 평판의 운동방정식과 경계조건은 다음과 같다.

$$D \nabla^4 w + \rho h \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2c \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} + c^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = p(x, y, t) \quad (1)$$

$x=0$  과  $x=L$  에서의 경계조건:

$$V_x = \bar{V}_x \quad \text{or} \quad w = \bar{w}, \quad M_x = \bar{M}_x \quad \text{or} \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \bar{\theta} \quad (2)$$

$y=0$  과  $y=L$  에서의 경계조건:

$$V_y = 0 \quad \text{and} \quad M_y = 0 \quad (3)$$

윗 식에서,  $\nabla^4$  는 직각 좌표계에서의 biharmonic operator 를 나타낸다.  $V_x$  와  $V_y$  는 단위길이 당 전단력이고  $M_x$  와  $M_y$  는 굽힘 모멘트(resultant bending moment)이며 다음과 같이 횡 방향 변위로 표현된다.

$$\begin{aligned} V_x &= -D \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] - \rho h c \frac{\partial w}{\partial t} - \rho h c^2 \frac{\partial w}{\partial x} + N_x \frac{\partial w}{\partial x} \\ V_y &= -D \left[ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right] \\ M_x &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

### 3. 스펙트럴 요소 해석

평판의 자유진동 응답은 스펙트럴 형태로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$w(x, y, t) = \sum_{n=1}^N W_n(x, y) e^{i\omega_n t} \quad (5)$$

여기서,  $W_n$  는 진동응답  $w$  에 대한 주파수 스펙트럼  $\omega_n = 2\pi n/T$  에서의 스펙트럴 성분이고,  $N$  은 스펙트럴 해석에 고려되는 스펙트럴 성분의 개수이다. 식(5)를 식(1)에 대입하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\nabla^4 W_n + \left( c_p^2 - \frac{N_x}{D} \right) \frac{\partial^2 W_n}{\partial x^2} + \left( 2ic_p \Omega_n^2 + \frac{X}{D} \right) \frac{\partial W_n}{\partial x} - \Omega_n^4 W_n = 0 \quad (6)$$

여기서,

$$c_p = c \sqrt{\frac{\rho h}{D}}, \quad \Omega_n^2 = \omega_n \sqrt{\frac{\rho h}{D}} \quad (7)$$

식(5)를 이용하여 식(4)의 전단력과 모멘트를 다음과 같이 스펙트럴 형태(spectral form)로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} V_x(x, y, t) &= \sum_{n=1}^N V_{xn}(x, y) e^{i\omega_n t}, \quad V_y(x, y, t) = \sum_{n=1}^N V_{yn}(x, y) e^{i\omega_n t} \\ M_x(x, y, t) &= \sum_{n=1}^N M_{xn}(x, y) e^{i\omega_n t}, \quad M_y(x, y, t) = \sum_{n=1}^N M_{yn}(x, y) e^{i\omega_n t} \end{aligned} \quad (8)$$

여기서,  $V_{xn}$ ,  $V_{yn}$ ,  $M_{xn}$ ,  $M_{yn}$  는 다음과 같이 정의되는 스펙트럴 성분을 나타낸다.

$$\begin{aligned} V_{xn}(x, y) &= -D \left[ \frac{\partial^3 W_n}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 W_n}{\partial x \partial y^2} \right] - i\rho h c_p \omega_n \frac{\partial W_n}{\partial t} - \rho h c_p^2 \frac{\partial W_n}{\partial x} + N_x \frac{\partial W_n}{\partial x} \\ V_{yn}(x, y) &= -D \left[ \frac{\partial^3 W_n}{\partial y^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 W_n}{\partial x^2 \partial y} \right] \\ M_{xn}(x, y) &= -D \left( \frac{\partial^2 W_n}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W_n}{\partial y^2} \right), \quad M_{yn}(x, y) = -D \left( \frac{\partial^2 W_n}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W_n}{\partial x^2} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

같은 방법으로,  $x = 0$  과  $x = L$  에서의 경계조건도 다음과 같이 스펙트럴 형태로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}\bar{V}_x(0, y, t) &= \sum_{n=1}^N \bar{V}_{xn}(0, y) e^{i\omega_n t}, & \bar{V}_x(L, y, t) &= \sum_{n=1}^N \bar{V}_{xn}(L, y) e^{i\omega_n t} \\ \bar{M}_x(0, y, t) &= \sum_{n=1}^N \bar{M}_{xn}(0, y) e^{i\omega_n t}, & \bar{M}_x(L, y, t) &= \sum_{n=1}^N \bar{M}_{xn}(L, y) e^{i\omega_n t} \\ \bar{w}(0, y, t) &= \sum_{n=1}^N \bar{W}_n(0, y) e^{i\omega_n t}, & \bar{w}(L, y, t) &= \sum_{n=1}^N \bar{W}_n(L, y) e^{i\omega_n t} \\ \bar{\theta}(0, y, t) &= \sum_{n=1}^N \bar{\Theta}_n(0, y) e^{i\omega_n t}, & \bar{\theta}(L, y, t) &= \sum_{n=1}^N \bar{\Theta}_n(L, y) e^{i\omega_n t}\end{aligned}\quad (10)$$

식(10)의 스펙트럴 성분  $\bar{V}_{xn}$ ,  $\bar{M}_{xn}$ ,  $\bar{W}_n$ ,  $\bar{\Theta}_n$  은 FFT 알고리즘을 이용해 각 경계에서 주어지는 값  $\bar{V}_x$ ,  $\bar{M}_x$ ,  $\bar{w}$ ,  $\bar{\theta}$  로부터 구할 수 있다.

경계조건이 각 주파수 스펙트럼에서 성립한다고 가정하고, 식(8) 과 식(10)을 이용하면  $x = 0$  과  $x = L$ 에서의 경계조건(즉, 식(2))은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned}V_{xn}(0, y) = \bar{V}_{xn}(0, y) \quad \text{or} \quad W_{xn}(0, y) = \bar{W}_n(0, y), & \quad M_{xn}(0, y) = \bar{M}_{xn}(0, y) \quad \text{or} \quad \frac{\partial W_{xn}(0, y)}{\partial x} = \bar{\Theta}_n(0, y) \\ V_{xn}(L, y) = \bar{V}_{xn}(L, y) \quad \text{or} \quad W_{xn}(L, y) = \bar{W}_n(L, y), & \quad M_{xn}(L, y) = \bar{M}_{xn}(L, y) \quad \text{or} \quad \frac{\partial W_{xn}(L, y)}{\partial x} = \bar{\Theta}_n(L, y)\end{aligned}\quad (11)$$

마찬가지로,  $y = 0$  과  $y = b$  에서의 경계조건(즉, 식(3))도 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$M_{yn} = 0 \quad \text{and} \quad V_{yn} = 0 \quad (12)$$

경계조건 식(11) 와 식(12)을 만족하는 식(6)의 일반해를 다음과 같이 가정한다.

$$W_n(x, y) = \sum_{r=1}^M X_{nr}(x) Y_r(y) \quad (13)$$

여기서,  $Y_r(y)$  ( $r = 1, 2, \dots, M$ ) 알고 있는 함수이고  $X_{nr}$  해석적으로 결정해야 하는 미지의 함수이다. 본 연구에서는 베르누이-오일러 보의 양단이 자유단일 경우 다음의 직교조건(orthogonal property)을 만족하는 고유모드(natural mode)  $Y_r(x)$ 를 사용하였다.

$$\int_0^b Y_r(y) Y_m(y) dy = 0, \quad \int_0^b Y_r''(y) Y_m(y) dy = 0, \quad \int_0^b Y_r'(y) Y_m(y) dy = 0 \quad (\text{for } r \neq m) \quad (14)$$

보의 고유모드  $Y_m$  ( $m = 1, 2, \dots, M$ )은 평판의 자유단 경계조건(즉, 식(12))를 완전히 만족시키지 못하기 때문에,  $X_{nm}$ 이  $y = 0$  과  $y = b$  에서 다음 조건을 만족하도록 결정한다.

$$X_{nm} \frac{d^3 Y_m}{dy^3} = -(2 - \nu) \frac{d^2 X_{nm}}{dx^2} \frac{d Y_m}{dy}, \quad X_{nm} \frac{d^2 Y_m}{dy^2} = -\nu \frac{d^2 X_{nm}}{dx^2} Y_m \quad (15)$$

식(13)을 식(6)에 대입하면,

$$\sum_{r=1}^M \left\{ \frac{d^4 X_{nr}}{dx^4} Y_r + 2 \frac{d^2 X_{nr}}{dx^2} \frac{d^2 Y_r}{dy^2} + X_{nr} \frac{d^4 Y_r}{dy^4} + \left[ \left( c_p^2 - \frac{N_x}{D} \right) \frac{d^2 X_{nr}}{dx^2} + \left( 2ic_p \Omega_n^2 + \frac{X}{D} \right) \frac{d X_{nr}}{dx} - \Omega_n^4 X_{nr} \right] Y_r \right\} = 0 \quad (16)$$

식(16)에  $Y_m(x)$ 를 곱하고  $y = 0$ 부터  $y = b$ 까지 부분적분을 이용하여 적분한 후 식(14)를 적용하면 다음의 식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}\frac{d^4 X_{nm}}{dx^4} + \left( -2\xi_{m1} + c_p^2 - \frac{N_x}{D} \right) \frac{d^2 X_{nm}}{dx^2} + \left( 2ic_p \Omega_n^2 + \frac{X}{D} \right) \frac{d X_{nm}}{dx} + (\xi_{m2} - \Omega_n^4) X_{nm} \\ + \frac{1}{\xi_{m0}} \left( 2 \frac{d^2 X_{nm}}{dx^2} \frac{d Y_m}{dy} Y_m + X_{nm} \frac{d^3 Y_m}{dy^3} Y_m - X_{nm} \frac{d^2 Y_m}{dy^2} \frac{d Y_m}{dy} \right) \Big|_0^b = 0\end{aligned}\quad (17)$$

여기서,

$$\xi_{m0} = \int_0^b Y_m^2 dy, \quad \xi_{mj} = \int_0^b (d^j Y_m / dy^j)^2 dy / \xi_{m0} \quad (18)$$

식(17)의 마지막 두 경계 항에 대하여 다음의 두 가지 방법을 적용할 수 있다.

(1) 방법 A: 보의 고유모드  $Y_m$  는  $y = 0$  과  $y = b$  에서 평판의 자유단 경계 조건을 만족하지 못하므로, 주어진  $Y_m$  에 대해서  $X_{nm}$  이 식(15)를 만족시키도록 할 수 있다. 이 경우, 식(15)를 식(17)에 대입하면 다음식을 유도할 수 있다.

$$\frac{d^4 X_{nm}}{dx^4} + \alpha_m^A \frac{d^2 X_{nm}}{dx^2} + \beta_{nm} \frac{dX_{nm}}{dx} + \gamma_{nm} X_{nm} = 0 \quad (19)$$

여기서,

$$\alpha_m^A = -2\xi_{m1} + c_p^2 - \frac{N_x}{D} + 2v\zeta_m, \quad \beta_{nm} = 2ic_p \Omega_n^2 + \frac{X}{D}, \quad \gamma_{nm} = \xi_{m2} - \Omega_n^4, \quad \zeta_m = \frac{1}{\xi_{m0}} \left. \frac{dY_m}{dy} Y_m \right|_0^b \quad (20)$$

(2) 방법 B: 보의 고유모드  $Y_m$  는  $d^2 Y_m / dy^2 = d^3 Y_m / dy^3 = 0$  (즉,  $y = 0$  과  $y = b$  에서의 자유단 경계조건)을 만족시키므로 식(17)의 마지막 두 항을 모두 제거하여 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\frac{d^4 X_{nm}}{dx^4} + \alpha_m^B \frac{d^2 X_{nm}}{dx^2} + \beta_{nm} \frac{dX_{nm}}{dx} + \gamma_{nm} X_{nm} = 0 \quad (21)$$

여기서,

$$\alpha_m^B = -2\xi_{m1} + c_p^2 - \frac{N_x}{D} + 2\zeta_m \quad (22)$$

본 연구에서 방법 A가 방법 B에 비하여 보다 우수한 해석 결과를 제공함을 수치예제를 통하여 보였다.

식(19) 또는 식(21)의 해는 다음의 형태로 얻는다.

$$X_{nm}(x) = a_{nm1} e^{ik_{nm1}x} + a_{nm2} e^{ik_{nm2}x} + a_{nm3} e^{ik_{nm3}x} + a_{nm4} e^{ik_{nm4}x} = [E_{nm}(x)] \{a_{nm}\} \quad (23)$$

여기서,

$$[E_{nm}(x)] = [e^{ik_{nm1}x} \quad e^{ik_{nm2}x} \quad e^{ik_{nm3}x} \quad e^{ik_{nm4}x}] \quad , \quad \{a_{nm}\} = \{a_{nm1} \quad a_{nm2} \quad a_{nm3} \quad a_{nm4}\}^T \quad (24)$$

식(23)에서  $k_{nm i}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ )는 다음의 분산 관계식(dispersion relations)으로부터 계산되는 파수(wave number)이다.

$$k_{nm}^4 + \alpha_m k_{nm}^2 + \beta_{nm} k_{nm} + \gamma_{nm} = 0 \quad (25)$$

여기서, 방법 A의 경우  $\alpha_m = \alpha_m^A$  이고 방법 B의 경우  $\alpha_m = \alpha_m^B$  이다. 상수  $a_{nm i}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ )는  $x = 0$  과  $x = L$ 에서의 경계 조건을 만족시킴으로써 결정된다. 식(23)을 식(13)에 대입하면 일반해  $W_n$ 를 구할 수 있다.

스펙트럴 generalized forces  $f_{nri}$  ( $r = 1, 2, \dots, M$ , and  $i = 1, 2, 3, 4$ )를 다음과 같이 정의한다.

$$-V_{,n}(0, y) = \sum_{r=1}^M f_{nr1} Y_r(y) \quad , \quad M_{,n}(0, y) = \sum_{r=1}^M f_{nr2} Y_r(y) \quad (26)$$

$$V_{,n}(L, y) = \sum_{r=1}^M f_{nr3} Y_r(y) \quad , \quad -M_{,n}(L, y) = \sum_{r=1}^M f_{nr4} Y_r(y)$$

같은 방법으로 스펙트럴 generalized displacement  $d_{nri}$  ( $r = 1, 2, \dots, M$ , and  $i = 1, 2, 3, 4$ )는 다음과 같이 정의한다.

$$W_n(0, y) = \sum_{r=1}^M d_{nr1} Y_r(y) \quad , \quad \frac{dW_n(0, y)}{dx} = \sum_{r=1}^M d_{nr2} Y_r(y) \quad (27)$$

$$W_n(L, y) = \sum_{r=1}^M d_{nr3} Y_r(y) \quad , \quad \frac{dW_n(L, y)}{dx} = \sum_{r=1}^M d_{nr4} Y_r(y)$$

스펙트럴 generalized forces 는 식(26)에  $Y_m(x)$ 를 곱하고  $y = 0$ 부터  $y = b$ 까지 적분한 후 식(14)과 식(18a)을 적용하여 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\{f_{nm}\} \equiv \begin{Bmatrix} f_{nm1} \\ f_{nm2} \\ f_{nm3} \\ f_{nm4} \end{Bmatrix} = \frac{I}{\xi_{m0}} \int_0^b \begin{Bmatrix} -V_{,n}(0,y) \\ M_{,n}(0,y) \\ V_{,n}(L,y) \\ -M_{,n}(L,y) \end{Bmatrix} Y_m dy \quad (28)$$

스펙트럴 generalized displacement 는 같은 방법으로 식(27)로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\{d_{nm}\} \equiv \begin{Bmatrix} d_{nm1} \\ d_{nm2} \\ d_{nm3} \\ d_{nm4} \end{Bmatrix} = \frac{I}{\xi_{m0}} \int_0^b \begin{Bmatrix} W_n(0,y) \\ dW_n(0,y)/dx \\ W_n(L,y) \\ dW_n(L,y)/dx \end{Bmatrix} Y_m dy \quad (29)$$

식(13)을 식(9)에 대입하면  $V_x$ 와  $M_x$ 의 스펙트럴 성분은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$V_{,n} = -D \sum_{r=1}^M \left\{ \left[ \frac{d^2 X_{nr}}{dx^2} - \left( c_p^2 - \frac{N_r}{D} \right) \frac{dX_{nr}}{dx} - ic_p \Omega_n^2 X_{nr} \right] Y_r + (2-\nu) \frac{dX_{nr}}{dx} \frac{d^2 y_r}{dy^2} \right\} \quad (30)$$

$$M_{,n} = -D \sum_{r=1}^M \left( \frac{d^2 X_{nr}}{dx^2} Y_r + \nu X_{nr} \frac{d^2 Y_r}{dy^2} \right)$$

식(30)에  $Y_m(x)$ 을 곱하고  $y = 0$ 부터  $y = b$ 까지 적분한 후 식(14)과 식(18)을 적용시키면 다음식을 얻을 수 있다.

$$\int_0^b V_{,n}(x,y) Y_m(y) dy \equiv \xi_{m0} g_{nm}(x) \quad , \quad \int_0^b M_{,n}(x,y) Y_m(y) dy \equiv \xi_{m0} h_{nm}(x) \quad (31)$$

여기서,

$$g_{nm}(x) = -D \left\{ \frac{d^2 X_{nm}}{dx^2} + \mu_{m1} \frac{dX_{nm}}{dx} + \mu_{m2} X_{nm} \right\}, \quad h_{nm}(x) = -D \left[ \frac{d^2 X_{nm}}{dx^2} + \mu_{m3} X_{nm} \right] \quad (32)$$

$$\mu_{m1} = (2-\nu)(\zeta_m - \xi_{m1}) - c_p^2 + \frac{N_x}{D}, \quad \mu_{m2} = -ic_p \Omega_n^2, \quad \mu_{m3} = \nu(\zeta_m - \xi_{m1})$$

식(23)을 식(31)에 대입하면  $g_{nm}$ 과  $h_{nm}$ 은 다음식과 같이 표현할 수 있다.

$$g_{nm}(x) = [G_{nm}(x)] \{a_{nm}\}, \quad h_{nm}(x) = [H_{nm}(x)] \{a_{nm}\} \quad (33)$$

여기서,  $G_{nm}$ 과  $H_{nm}$ 은 (1×4) 행렬로서 다음과 같이 정의된다,

$$[G_{nm}(x)] = -D [[E_{nm}''(x)] + \mu_{m1} [E_{nm}'(x)] + \mu_{m2} [E_{nm}(x)]] \quad , \quad [H_{nm}(x)] = -D [[E_{nm}''(x)] + \mu_{m3} [E_{nm}(x)]] \quad (34)$$

윗 식에서 프라임(')은  $x$ 에 대한 미분을 나타낸다. 식(31)을 식(28)에 대입하고 식(33)과 식(34)를 적용하여 스펙트럴 generalized force 를 다음과 같이 상수항을 가지는 벡터  $\{a_{nm}\}$ 에 관한 식으로 표현하고, 같은 방법으로 식(13)을 식(29)의 우항에 대입하여 스펙트럴 generalized displacement 도 벡터  $\{a_{nm}\}$ 의 함수로 표현할 수 있다.

$$\{f_{nm}\} = \begin{Bmatrix} -G_{nm}(0) \\ H_{nm}(0) \\ G_{nm}(L) \\ -H_{nm}(L) \end{Bmatrix} \{a_{nm}\} \equiv [Q_{nm}] \{a_{nm}\} \quad , \quad \{d_{nm}\} = \begin{Bmatrix} [E_{nm}(0)] \\ [E_{nm}'(0)] \\ [E_{nm}(L)] \\ [E_{nm}'(L)] \end{Bmatrix} \{a_{nm}\} \equiv [R_{nm}] \{a_{nm}\} \quad (35)$$

식(35)의 두 식으로부터 상수벡터  $\{a_{nm}\}$ 를 소거하면 스펙트럴 generalized force와 스펙트럴 generalized displacement 사이의 관계식을 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\{f_{nm}\} = [Q_{nm}] [R_{nm}]^{-1} \{d_{nm}\} \equiv [S_{nm}] \{d_{nm}\} \quad (36)$$

여기서, 행렬  $[S_{nm}]$ 이 주파수에 따라 변하는 스펙트럴 요소 행렬이다. 식(36)의 스펙트럴 generalized force  $f_{nm}$ 은  $x = 0$ 과  $x = L$ 의 경계단에 작용하는 외력으로부터 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\{f_{nm}\} = \frac{I}{\xi_{no}} \int_0^b \begin{Bmatrix} -\bar{V}_{,n}(0, y) \\ \bar{M}_{,n}(0, y) \\ \bar{V}_{,n}(L, y) \\ -\bar{M}_{,n}(L, y) \end{Bmatrix} Y_n(y) dy \quad (37)$$

#### 4. 스펙트럴 요소 해석의 수행

스펙트럴 요소해석법에 관한 일반적인 내용이 Lee<sup>(9-10)</sup>등에 잘 소개되어 있으므로 여기서는 간략하게 개요만을 소개한다. 식(36)은 이동하는 균일한 평판의 유한 요소에 대해 개발된 SEM모형을 나타낸다. 이동평판을 유한요소로 표현하면 FEM과 유사한 방법으로 경계조건을 적용하여 스펙트럴 요소를 다음과 같은 형태의 전역 시스템의 방정식으로 결합할 수 있다.

$$\{f_{nm}^g\} = [S_{nm}^g] \{a_{nm}^g\} \quad (38)$$

여기서,  $[S_{nm}^g]$ ,  $\{f_{nm}^g\}$ ,  $\{a_{nm}^g\}$ 는 각각 전체 시스템에 대한 동적 강성행렬, generalized force vector와 generalized displacement vector로서, 주파수와 보의 고유모드  $Y_m(x)$ 에 따라 계산된다, 고유 진동수는  $[S_{nm}^g]$ 의 행렬식이 0이 된다는 조건으로부터 다음과 같이 구한다.

$$\det[S_{nm}^g(\omega_{nat})] = 0 \quad (39)$$

시간영역에서 동적응답을 구하는 일반적인 과정은 다음과 같다. 먼저, 경계에 작용하는 외력을 FFT 알고리즘을 이용해 주파수 영역으로 변환하고 식(37)로부터  $\{f_{nm}^g\}$ 를 계산하여  $\{a_{nm}^g\}$ 를 식(38)로부터 구한 후 이를 이용하여 식(35)로부터  $\{a_{nm}\}$ 을 계산한다. 이와 같이 계산된  $\{a_{nm}\}$ 을 식(23)에 대입하여  $X_{nm}(x)$ 을 계산하고,  $X_{nm}(x)$ 을 식(13)에 대입하여 진동응답의 스펙트럴 성분  $W_n(x, y)$ 를 구한다. 마지막으로, 식(5)에 나타난 바와같이 스펙트럴 성분  $W_n(x, y)$ 을 Inverse FFT 알고리즘을 이용하여 신속하고 효율적으로 중첩함으로써 시간영역에서의 진동응답을 계산한다.

#### 5. 수치 예제와 검토

수치 예제로서 그림 1에 보인 얇은 평판을 생각한다. 평판의 물성치는 탄성계수  $E = 200 \text{ GPa}$ , 포아송의 비  $\nu = 0.333$ , 단위 부피당 질량  $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$ 이고 두께, 폭, 길이는 각각  $h = 0.003 \text{ m}$ ,  $b = 0.5 \text{ m}$ ,  $L = 1.5 \text{ m}$ 이다.  $x = 0 \text{ m}$ ,  $1.5$ 에서 단순지지되어 있고,  $y = 0 \text{ m}$ ,  $0.5 \text{ m}$ 에서는 자유단 경계조건을 가진다.

방법 A와 방법 B의 두 SEM 모델을 평가하기 위해, 평판에 일정한 장력  $N_x = 6 \times 10^4 \text{ N/m}$ 은 존재하나 축 방향의 이동은 없다고 가정한다. 표 1에서는, 두 SEM 모델을 통해 구한 5개의 고유진동수를 ACM 요소를 이용한 FEM 모델과 Gorman<sup>(11)</sup>에 의해 해석적으로 구한 값과 비교하였다. 해석적으로 구한 엄밀해와 비교할 때, 방법 A의 SEM 모델이 방법 B의 SEM 모델보다 좋은 결과를 주고있음을 알 수 있다. 이는 방법 A에서는 보의 고유모드  $Y_m(x)$ 로는 만족시킬 수 없었던 평판의 자유단 경계조건을 이론전개 과정에서 반영하였기 때문이다. 표 1은 방법 A의 SEM 모델이 전체 주파수 범위 내에서 거의 1%이내의 오차 정도 밖에 보이지 않을 정도로 정확함을 보여준다. 또한, FEM의 결과와 비교해서도 하나의 요소만을 사용하여 고차 모드에서 우수한 결과를 보인다. FEM 모델을 하여 SEM 모델로 구한 고차 고유진동수의 정확도를 얻기 위해서는 적어도 300개 이상의 유한요소를 사용해야 한다.

표 2는 평판의 이동속도  $c$ 와 장력  $N_x$ 에 따라 변하는 고유진동수를 보여준다. 대체로 속도가 일정한 경우 장력이 증가함에 따라 고유진동수도 증가함을 알 수 있다. 이에 반해, 장력이 일정한 경우 이동속도가 증가할수록 평판의 고유진동수는 낮아진다.

그림 2는 평판의 이동속도  $c$ 가 어떤 임계속도의 값  $c_{cr}$ 을 가질 때 최저차 고유진동수가 사라짐을 보이고 있다. 이는 이동평판이 임계속도  $c_r$ 에서 동적으로 불안정해짐을 나타낸다

## 6. 결 론

본 논문에서는 축 방향 장력을 받으면서 일정한 속도로 이동하는 얇은 평판에 대한 스펙트럴 요소모델을 유도하였다. 본 연구에서 유도된 스펙트럴 요소모델이 기존의 FEM 모델에 비해 우수한 해석결과를 제공함을 수치예제를 통해 확인하였으며, 특히 고차모드에서 그 우수성이 뚜렷함을 확인하였다. 또한 장력이 증가하면 평판이 동적으로 불안정해지는 임계속도가 낮아짐을 확인하였다.

## 참고 문헌

1. Wickert, J. A. and Mote, C. D., Jr., "Current Research on the Vibration and Stability of Axially-Moving Materials," *The Shock and Vibration Digest*, Vol. 20, No. 5, 1988, pp. 3-13.
2. Soler, A. I., "Vibrations and Stability of a Moving Band," *Journal of Franklin Institute*, Vol. 286, No. 4, 1968, pp. 295-307.
3. Ulsoy, A. G. and Mote, C. D., Jr., "Vibration of Wide Band Saw Blades," *Journal of Engineering for Industry*, Vol. 104, 1982, pp. 71-78.
4. Lengoc, L. and McCallion, H., "Wide Bandsaw Blade Under Cutting Conditions, Part I: Vibration of a Plate Moving in Its Plane while Subjected to Tangential Edge Loading," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 186, No. 1, 1995, pp. 125-142.
5. Lin, C. C. and Mote, C. D., Jr., "Equilibrium Displacement and Stress Distribution in a Two-Dimensional, axially Moving Web Under Transverse Loading," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 62, 1995, pp. 772-779.
6. Lin, C. C., "Stability and Vibration Characteristics of Axially Moving Plates," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 34, No. 24, 1997, pp. 3179-3190.
7. Wang, X., "Numerical Analysis of Moving Orthotropic Thin Plates," *Computers & Structures*, Vol. 70, 1999, pp. 467-486.
8. Damaren, C. J. and Lengoc, L., "Robust Active Vibration Control of a Bandsaw Blade," *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 122, 2000, pp. 69-76.
9. Lee, U. and Lee, J., "Spectral-Element Method for Levy-Type Plates Subject to Dynamic Loads," *Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 125, No. 2, 1999, pp. 243-247.
10. Lee, U., Kim, J. and Leung, A. Y. T., "Spectral Element Method in Structural Dynamics," *The Shock and Vibration Digest*, Vol. 32, No. 6, 2000, pp. 451-465.
11. Gorman, D. J., *Free Vibration Analysis of Rectangular Plates*, Elsevier North Holland, New York, 1982.

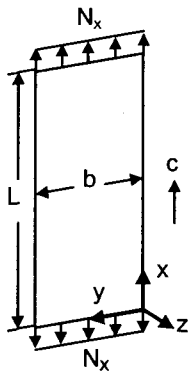


Fig.1 An axially moving plate under axial tension

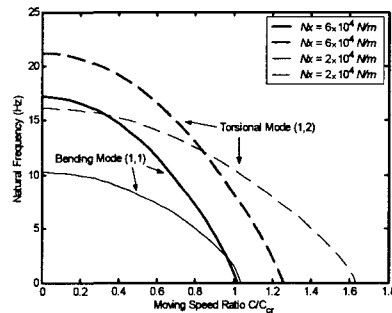


Fig. 2 The lowest transverse bending and torsional natural frequencies vs. the moving speed of plate.

Table 1 Comparison of the natural frequencies(Hz) obtained by the present SEM, FEM, and the exact analytical method(Gorman<sup>(11)</sup>)

Mode Number		1st Mode (1, 1)	3rd Mode (2, 1)	5th Mode (3, 1)	7th Mode (1, 3)	9th Mode (2, 3)
Analytical (Gorman <sup>(11)</sup> )		17.16	35.99	58.02	73.47	92.43
SEM	Method A 1x1 element	17.19 (0.17%)*	36.17 (0.51%)	58.46 (0.76%)	73.46 (0.00%)	92.46 (0.04%)
	Method B 1x1 element	17.19 (0.17%)	36.17 (0.51%)	58.46 (0.76%)	81.50 (1.94%)	85.19 (7.83%)
FEM	3x9 elements	17.18 (0.16%)	36.16 (0.49%)	58.501 (0.84%)	72.73 (1.00%)	89.66 (3.00%)
	10x30 elements	17.16 (0.02%)	36.01 (0.05%)	58.08 (0.10%)	73.37 (0.13%)	92.12 (0.33%)

Note: The numbers in ( ) indicate the % errors with respect to the exact analytical results.

Table 2 The natural frequencies dependence of the moving speed of plate and the in-plane tension

Moving Speed $c$	Tension $N_x$ (N/m)	Natural Frequency (Hz)				
		1st Mode	3rd Mode	5th Mode	7th Mode	9th Mode
0	$2 \times 10^4$	10.27 (1, 1)*	23.42 (2, 1)	41.34 (3, 1)	64.95 (4, 1)	81.73 (4, 2)
	$4 \times 10^4$	14.16 (1, 1)	30.47 (2, 1)	50.63 (3, 1)	72.81 (1, 3)	90.39 (2, 3)
	$6 \times 10^4$	17.19 (1, 1)	36.17 (2, 1)	58.46 (3, 1)	73.46 (1, 3)	92.46 (2, 3)
$0.5c_\sigma$	$2 \times 10^4$	8.24 (1, 1)	20.80 (2, 1)	38.76 (3, 1)	62.50 (4, 1)	79.30 (4, 2)
	$4 \times 10^4$	11.07 (1, 1)	25.87 (2, 1)	45.71 (3, 1)	70.64 (1, 3)	85.81 (4, 2)
	$6 \times 10^4$	13.29 (1, 1)	29.94 (2, 1)	51.40 (3, 1)	70.45 (1, 3)	88.25 (2, 3)
$c_\sigma$	$2 \times 10^4$	1.59 (1, 1)	12.42 (2, 1)	30.67 (3, 1)	54.93 (4, 1)	71.91 (4, 2)
	$4 \times 10^4$	1.25 (1, 1)	11.37 (2, 1)	30.28 (3, 1)	55.92 (4, 1)	71.35 (4, 2)
	$6 \times 10^4$	1.06 (1, 1)	10.46 (2, 1)	29.36 (3, 1)	55.81 (4, 1)	70.34 (4, 2)

Note: (m, n) indicates the mode number.