

## 일정체적 캔틸레버 보의 비선형 해석

### Non-Linear Analysis of Cantilever Beams with Constant Volume

이 병 구\* · 이 태 은\*\* · 이 종 국\*\* · 안 대 순\*\*

Lee, Byoung Koo · Lee, Tae Eun · Lee, Jong Kook · Ahn, Dae Soon

---

#### ABSTRACT

This paper deals with the non-linear analysis of cantilever beams with constant volume. Numerical methods are developed for solving the elastica of cantilever beam, subjected to a tip point load and a tip couple. The linear, parabolic and sinusoidal tapers with the regular polygon cross-section are considered, whose material volume and span length are always held constant. The Runge-Kutta and Regula-Falsi methods, respectively, are used to integrate the governing differential equations and to compute the unknown value of the tip deflection. The numerical results obtained herein are shown in tables and figures. Also the shapes of strongest beams are determined by reading the minimum values from the deflection versus section ratio curves.

---

#### 1. 서 론

보는 기둥, 평판과 함께 구조공학 분야에서 가장 기본이 되는 구조단위이며, 토목, 기계, 선박, 항공 등 각종 공학분야에서 뼈대 구조물로 많이 이용되고 있다. 복잡하고 거대한 구조물도 이러한 단위구조의 결합체로 이루어지므로 이들 단위구조의 정적, 동적 거동을 나타내는 결과들을 이용하면, 전체 구조물의 거동결과를 예측하는 등의 사전정보를 얻을 수 있다. 따라서 단위구조의 거동을 정확하게 표현할 수 있는 값을 결정하는 것은 대단히 중요한 연구과제이다.<sup>(1)</sup>

최근에는 재료공학의 발달로 토목공학을 비롯한 각종 구조공학 분야에서 탄성이 매우 큰 재료로 이루어진 구조물의 시공이 가능하게 되었다. 이러한 구조물에서는 대변형에 대해서도 안정성이 확보될 수 있기 때문에 구조물의 기하학적 비선형 거동해석이 필수적이다. 이러한 대변형 문제에 관한 연구는 Euler에 의해 처음 발표된 이후 많은 과학자들에 의해 활발히 진행되고 있다.<sup>(2-5)</sup>

이러한 연구배경으로 본 논문은 자유단에 집중하중 및 모멘트하중이 재하되는 캔틸레버 보의 비선형해석에 연구목적이 있다. 대상부재는 동일한 지간길이와 체적을 갖고, 단면깊이가 선형, 포물선 및 정현 함수로 변화하는 변단면 캔틸레버 보를 택하였다. 본 연구에서는 하중-변위 사이의 관계가 비선형인 Bernoulli-Euler 보 이론<sup>(6)</sup>을 이용하여 대상 보의 정확탄성곡선을 지배하는 미분방정식을 유도하고, 이를 Runge-Kutta

---

\* 정회원 · 원광대학교 토목환경도시공학부 교수

\*\* 학생회원 · 원광대학교 대학원

method<sup>(7)</sup>를 이용하여 수치적분 하였으며, 미지수인 자유단의 수평처짐은 Regula-Falsi method<sup>(7)</sup>를 이용하여 산출하였다. 수치해석의 결과로 다양한 선형 및 정다각형의 변수 변화에 따른 자유단의 처짐 및 회전각의 변화를 고찰하고, 처짐 및 회전각이 최소값을 갖는 최적단면비를 제시하였다. 이 논문에서 보의 재료는 선형탄성체이며, 보의 축은 비긴장성 (inextensibility)으로 가정한다.

## 2. 변단면의 정의

그림 1은 본 연구에서 대상으로 하고 있는 지간길이가  $l$ 이고, 체적이  $V$ 로 일정한 보의 단면깊이의 변화를 나타낸 것이다. 본 연구에서 보의 단면은 정다각형 단면이며, 단면의 도심에서 꼭지점까지의 단면깊이는  $h$ 이다. 본 연구에서  $h$ 는 단면의 축방향 좌표  $s$ 에 따라서 변화하는 변단면 보이므로 보의 단면적  $A$  및 단면 이차모멘트  $I$ 는  $s$ 에 따라서 변화한다.

그림 1에서와 같이  $s=0$  즉, 고정단에서  $h=h_c$ 이고,  $s=l$  즉, 자유단에서  $h=h_f$ 이다. 보의 기하학적 형상을 정의하기 위하여 단면비로 정의되는 무차원량  $\alpha$ 를 다음과 같이 도입한다.

$$\alpha = h_f / h_c \quad (1)$$

단면깊이가  $h$ 인 정다각형의 단면적  $A$  및 단면 이차모멘트  $I$ 는 다음 식들과 같이 나타낼 수 있다.

$$A = c_1 h^2, \quad I = c_2 h^4 \quad (2, 3)$$

여기서,

$$c_1 = n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{\pi}{n}\right), \quad c_2 = \frac{n}{4} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \cos^3\left(\frac{\pi}{n}\right) \left[1 + \frac{\tan^2(\pi/n)}{3}\right] \quad (4, 5)$$

식 (4), (5)에서  $n$ 은 정다각형의 변수이며  $n$ 이  $\infty$ 이면 즉, 원형 단면이면  $c_1$  값과  $c_2$  값은 각각  $\pi$ 와  $\pi/4$ 로 수렴한다. 또한 정다각형 단면의 도심을 통과하는 축은 모두 주축이며, 따라서 (3)식으로 주어지는 단면 이차모멘트는 도심축에 상관없이 모두 동일한 값을 갖고 주단면 이차모멘트이다.

이제 단면깊이  $h$ 를 결정해주는  $s$ 에 관한  $h$ 의 함수식을 정의한다. 본 연구에서는 연구의 대상보로  $h$ 가 선형, 포물선 및 정현 함수로 변화하는 변단면 보를 채택하였다.

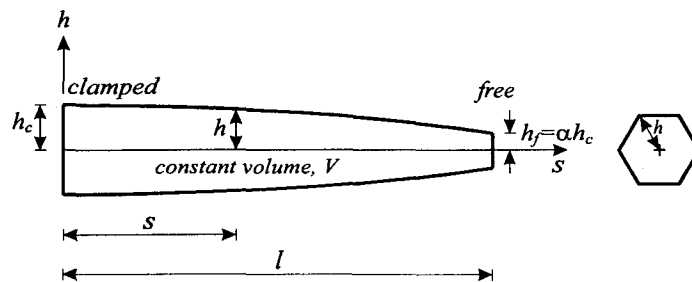


그림 1. 단면깊이의 변화

그림 1에서 변단면 보의 함수식  $h$ 는 직교좌표계  $(s, h)$ 에서  $(0, h_c)$ ,  $(l, \alpha h_c)$ 를 통과하므로 직선, 포물선 및 정현 함수의 방정식은 다음과 같다.

$$\text{직선 변단면 : } h = h_c \left[ c_3 \left( \frac{s}{l} \right) + 1 \right], \quad 0 \leq s \leq l \quad (6)$$

$$\text{포물선 변단면 : } h = h_c \left[ c_3 \left( \frac{s}{l} \right)^2 + 1 \right], \quad 0 \leq s \leq l \quad (7)$$

$$\text{정현 변단면 : } h = h_c \left[ c_3 \sin \left( \frac{\pi s}{2l} \right) + 1 \right], \quad 0 \leq s \leq l \quad (8)$$

여기서,

$$c_3 = \alpha - 1 \quad (9)$$

주어진 단면비  $\alpha$  및 단면깊이변화식  $h$ 로 정의되는 변단면 기둥의 체적  $V$ 는 식 (6)~(8)을 이용하면 다음과 같이 산출되고 이 체적  $V$ 는 모두 일정하다.

$$V = \int_0^l A ds = c_4 (c_1 h_c^2 l) \quad (10)$$

위의 식에서  $c_4$ 는 단면깊이가  $h_c$ 로 일정한 보의 체적  $V$ 에 대한 직선, 포물선 및 정현 변단면 보의 체적의 비율로 그 값은 각각 식 (11), (12), (13)과 같다.

$$c_4 = (\alpha^2 + \alpha + 1)/3, \quad c_4 = (8\alpha^2 + 4\alpha + 3)/15, \quad c_4 = c_3^2/2 + 4c_3/\pi + 1 \quad (11-13)$$

### 3. 지배미분방정식

그림 2는 지간길이가  $l$ 이고, 체적이  $V$ 인 본 연구대상 보의 정확탄성곡선 및 제변수를 나타내고 있다. 대상 보의 자유단에 집중하중  $P$  및 모멘트하중  $C$ 가 재하되며, 선형 및 단면의 변화에 대해 모두 동일한 지간길이  $l$ 과 동일한 체적  $V$ 를 갖는다. 그림에서의 실선은 점선으로 표시된 직선보가 하중 재하후에 수평처짐  $\Delta H$ , 수직처짐  $\Delta V$ 만큼 변화하여 최종적으로 평형상태가 된 정확탄성곡선을 나타낸다. 임의점  $(x, y)$ 에서 보의 곡선길이는  $s$ 이며, 보의 축은 비긴장성이므로 곡선보 축상 임의점  $s$ 에서 단면이차모멘트  $I$ 는 하중재하 전  $s$ 에서의  $I$ 와 같다. 또한 하중재하 전의 지간길이는 하중재하 후에도  $l$ 을 유지하며, 따라서 자유단에서  $x$ 좌표는  $l - \Delta H$ 이다. 이 그림에서  $R_V$ 는 수직반력,  $R_M$ 은 모멘트 반력,  $M$ 은 휨 모멘트이다.

본 연구에서 보의 정확탄성곡선은 Bernoulli-Euler보 이론에 의한 대변형 이론을 따른다. Bernoulli-Euler보 이론<sup>(6)</sup>에 의한 정확탄성곡선의 미분방정식은 다음과 같다.

$$\frac{dx}{ds} = \cos \theta \text{ for } 0 \leq s \leq l, \quad \frac{dy}{ds} = \sin \theta \text{ for } 0 \leq s \leq l, \quad \frac{d\theta}{ds} = -\frac{M}{EI} \text{ for } 0 \leq s \leq l \quad (14-16)$$

식 (16)에서  $E$ 는 보 재료의 탄성계수이다.

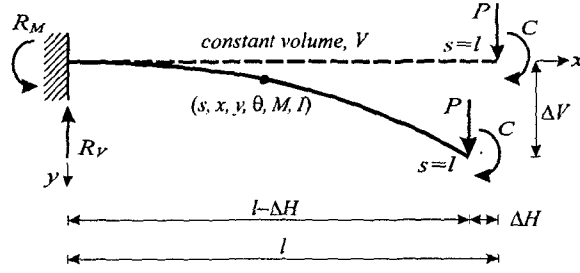


그림 2. 정확탄성곡선 및 제 변수

그림 2에서 정확탄성곡선상의 임의점  $s$ 에서 휨 모멘트  $M$ 은 다음 식과 같이 산출할 수 있다.

$$M = R_V x - R_M = P x - C - P(l - \Delta H) \quad (17)$$

본 연구대상 보의 정확탄성곡선에서 경계조건은 다음과 같다.

$$x = y = \theta = 0 \text{ at } s = 0, \quad l - \Delta H - x_{s=l} = 0 \text{ at } s = l \quad (18-21)$$

본 연구에서는 수치해석과정의 효율성을 높이고자 다음과 같은 무차원 변수들을 도입하였다.

$$\lambda = s/l, \quad \xi = x/l, \quad \eta = y/l, \quad \delta_h = \Delta H/l, \quad \delta_v = \Delta V/l \quad (22-26)$$

$$p = \frac{\pi^4 P l^4}{E V^2}, \quad c = \frac{\pi^5 C l^3}{E V^2}, \quad m = \frac{\pi^4 M l^3}{E V^2} \quad (27-29)$$

위의 식들에서  $\lambda, \xi, \eta, \delta_h$  및  $\delta_v$ 는 각각  $s, x, y, \Delta H$  및  $\Delta V$ 를 지간길이  $l$ 로 정규화한 것이며,  $p$ 는 무차원 하중,  $c$ 는 무차원 모멘트하중,  $m$ 은 무차원 휨 모멘트이다.

식 (14), (15)에 무차원변수 식 (22)~(24)를 대입하면 식 (30), (31)을 얻을 수 있고, 식 (3), (6)~(8), (16), (17)과 무차원 변수들을 이용하면 식 (32)와 같은 무차원미분방정식을 유도할 수 있다.

$$\frac{d\xi}{d\lambda} = \cos \theta \text{ for } 0 \leq \lambda \leq 1, \quad \frac{d\eta}{d\lambda} = \sin \theta \text{ for } 0 \leq \lambda \leq 1, \quad \frac{d\theta}{d\lambda} = -\frac{c_1^2 c_4^2}{c_2} \frac{m}{i} \text{ for } 0 \leq \lambda \leq 1 \quad (30-32)$$

위의 식 (32)에서  $i$ 는 단면의 변화에 따라 변화하는 단면변화 형상함수식이며, 이를 무차원변수들을 이용하여 무차원화하면 선형, 포물선, 정현의 경우 각각 다음 식 (33), (34), (35)와 같다.

$$i = [c_3 \lambda + 1]^4, \quad i = [c_3 \lambda^2 + 1]^4, \quad i = [c_3 \sin(\pi \lambda / 2) + 1]^4 \quad (33-35)$$

경계조건 식 (18)~(21)은 무차원 변수를 이용하면 다음과 같은 무차원 경계조건식으로 유도된다.

$$\xi = \eta = \theta = 0 \text{ at } \lambda = 0, \quad 1 - \delta_h - \xi_{\lambda=1} = 0 \text{ at } \lambda = 1 \quad (36-39)$$

#### 4. 수치해석 결과

이상에서 유도된 미분방정식과 경계조건을 이용하면, 주어진 보의 기하학적 형상 및 하중조건에 대한 정확탄성곡선을 얻을 수 있다. 유도된 미분방정식 식 (30)~(32)는 초기치 문제이므로  $\lambda=0$ 에서의 경계조건을 이용하여 수치적분할 수 있고, 이 미분방정식에서 미지수인  $\delta_h$  및  $\delta_v$ 는  $\lambda=1$ 에서의 경계조건을 이용하여 찾을 수 있다. 본 연구에서 미분방정식의 수치적분은 Runge-Kutta method<sup>(7)</sup>를 이용하였으며, 미지수인 자유단의 수평, 수직처짐은 Regula-Falsi method<sup>(7)</sup>를 이용하여 산출하였다. 이러한 일련의 과정을 통해 하중의 변화와 단면의 변화 및 정다각형의 변화에 따른 자유단( $\lambda=1$ )에서의 수직처짐  $\eta_f (= \delta_v)$  및 회전각  $\theta_f$ 가 최소값을 갖는 최적단면비  $\alpha_{opt}$ 를 산출하고, 그 결과를 표 및 그림으로 제시하였다.

그림 3(a), (b)는 집중하중 및 모멘트 하중 재하시 단면비  $\alpha$ 의 변화에 따른 변단면 선형별 최대처짐  $\eta_f$  및 최대회전각  $\theta_f$ 를 나타낸 그림이다. 그림 3(a)에서 집중하중과 모멘트하중 재하시  $\alpha$ 값이 증가함에 따라  $\eta_f$ 값이 감소하다가 극치를 보인 후에 증가함을 알 수 있다. 이 그림에서 가장 낮은 점들의  $\eta_f$  및  $\alpha$ 가 최대처짐의 최소값 및 최적단면비가 된다. 왼쪽 그림에 보인 집중하중  $p=1$ 이 재하되는 경우 선형 변단면은  $\alpha=0.44$ , 포물선 변단면은  $\alpha=0.35$ , 정현 변단면은  $\alpha=0.55$ 에서 최대처짐  $\eta_f$ 값이 최소치를 나타내었으며, 오른쪽 그림에 보인 모멘트하중  $c=1$ 이 재하되는 경우 선형 변단면은  $\alpha=0.65$ , 포물선 변단면은  $\alpha=0.61$ , 정현 변단면은  $\alpha=0.71$ 에서  $\eta_f$ 값이 최소치를 나타내었다.  $\alpha$ 값이 0.6이상에서는 세 가지 변단면이 모두 비슷한 처짐값을 보이며,  $\alpha$ 값이 0.6이하에서는 포물선, 선형, 정현의 순으로  $\eta_f$ 값이 작게 나타나  $\alpha < 0.6$ 의 범위에서는 포물선 변단면으로 보를 설계하는 것이 유리하다고 사료된다.

그림 3(b)는  $\alpha$ 값의 변화에 따른 변단면 선형별  $\theta_f$ 값의 변화를 나타낸 것으로 집중하중 및 모멘트하중 재하시 그림 3(a)의 경우와 같이 그 값이 감소하다가 증가하는 양상을 보인다. 집중하중  $p=1$ 이 재하되는 경우 선형 변단면은  $\alpha=0.61$ , 포물선 변단면은  $\alpha=0.56$ , 정현 변단면은  $\alpha=0.69$ 에서  $\theta_f$ 값이 최저치를 나타내며, 모멘트하중  $c=1$ 이 재하되는 경우 세 종류의 변단면 모두  $\alpha=1$  즉, 등단면일 때  $\theta_f$ 값이 최저치를 나타내었다. 이 경우 그림에는 나타나지 않았으나  $\alpha$ 값이 1보다 커지면  $\theta_f$ 값은 다시 증가하게 된다.

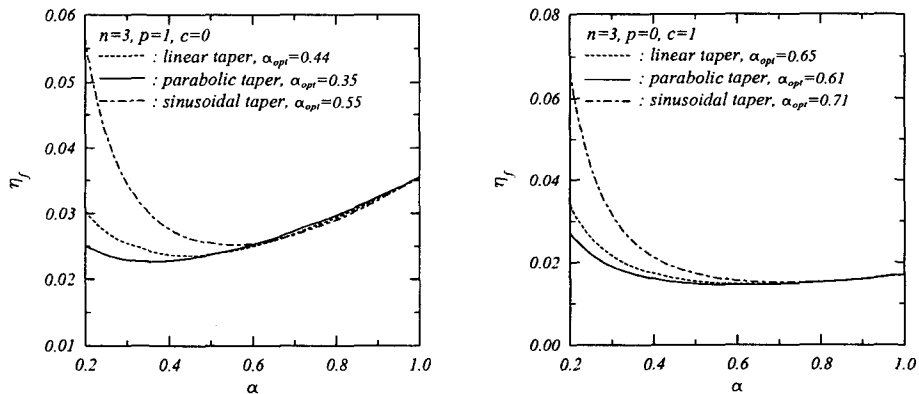


그림 3(a). 단면비 변화에 따른 선형별 최대처짐

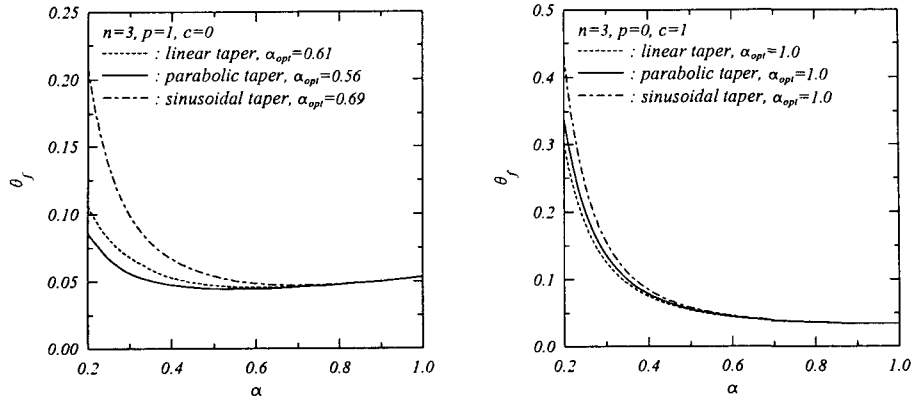


그림 3(b). 단면비 변화에 따른 선형별 최대회전각

표 1은 정삼각형의 단면을 갖는 보에서 집중하중의 변화에 따라 최대처짐이 최소값을 갖는 최적단면비를 변단면 선형별로 나타낸 것이다. 집중하중이 증가하면 자유단에서의 처짐  $\eta_f$  값은 증가하며, 그에 따른  $\alpha_{opt}$  값도 증가함을 알 수 있다. 선형별  $\eta_f$  값을 살펴보면 포물선, 선형, 정현의 순으로  $\eta_f$  값이 작게 나타나 포물선 변단면으로 설계하는 것이 가장 유리함을 알 수 있다.

표 2는  $p=1$ 이 작용하는 경우 정다각형의 변수  $n$ 의 변화에 따른  $\alpha_{opt}$  값의 변화를 나타낸 것이다. 이 표에서  $n$  값의 변화에 대해  $\alpha_{opt}$  값은 항상 일정하며,  $\eta_f$  값은  $n$  값이 작을수록 그 값이 작게 나타난다.  $p=1$ 인 경우 정오각형단면( $n=5$ )과 원형단면( $n=\infty$ )의  $\eta_f$  값의 비는 선형별로 모두 1.5% 미만의 차이를 보이므로  $n=5$  이상의 정다각형 단면을 원형단면으로 대체하여도 공학적으로 무리가 없을 것으로 판단된다.

표 1, 2로부터 자유단에 집중하중이 작용하는 경우 정삼각형 단면을 갖는 포물선 변단면이 자유단의 처짐에 대한 최강보임을 알 수 있다.

그림 4(a), (b)는 포물선 변단면 보에 집중하중 및 모멘트하중 개하시  $\alpha$  값의 변화에 따른 정다각형별  $\eta_f$  및  $\theta_f$  값의 변화를 나타낸 것이다. 이 그림들에서 정다각형의 변수  $n=3$ 일 때  $\eta_f$  및  $\theta_f$  값이 최소값을 가

표 1.  $p$ 에 의한 최적단면비의 변화( $n=3, c=0$ )

Taper type	$p$	$\alpha_{opt}$	$\eta_f$
Linear	0.1	0.40	0.00214
	0.4	0.41	0.00868
	0.7	0.43	0.01572
	1.0	0.44	0.02356
Parabolic	0.1	0.29	0.00205
	0.4	0.31	0.00834
	0.7	0.33	0.01512
	1.0	0.35	0.02270
Sinusoidal	0.1	0.53	0.00228
	0.4	0.53	0.00928
	0.7	0.54	0.01680
	1.0	0.55	0.02521

표 2.  $n$ 에 의한 최적단면비의 변화( $p=1, c=0$ )

Taper type	$n$	$\alpha_{opt}$	$\eta_f$
Linear	3	0.44	0.02356
	4	0.44	0.02762
	5	0.44	0.02846
	$\infty$	0.44	0.02894
Parabolic	3	0.35	0.02270
	4	0.35	0.02685
	5	0.35	0.02763
	$\infty$	0.35	0.02812
Sinusoidal	3	0.55	0.02521
	4	0.55	0.02925
	5	0.55	0.03013
	$\infty$	0.55	0.03064

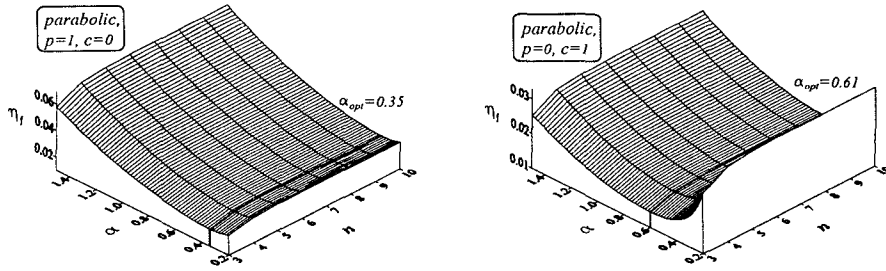


그림 4(a). 단면비 변화에 따른 정다각형별 최대치점

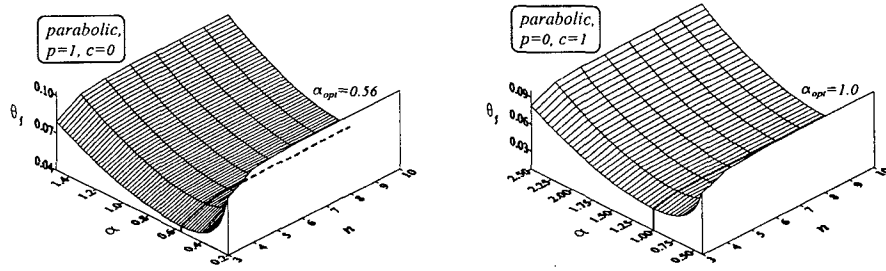


그림 4(b). 단면비 변화에 따른 정다각형별 최대회전각

지며,  $n$  값이 증가함에 따라 거동값도 증가하나  $n=5$  이상에서는 그 변화가 거의 없음을 알 수 있다. 또한  $\alpha$  값의 증가에 따라 거동값은 감소하다가 증가하며 거동값이 최소가 되는  $\alpha = \alpha_{opt}$  값은  $n$  값의 변화와 상관없이 항상 일정함을 알 수 있다.

그림 5는 정삼각형 단면을 갖는 포물선 변단면 보의 모멘트하중과 단면비 변화에 따른 거동값의 변화를 나타낸 그림이다. 모멘트하중  $c$  값이 0보다 작은 경우 거동값은 '-' 값을 보이지만 이 그림에서는 절대값을 취하여 '+' 값으로 나타내었다. 이 그림들에서 거동값은  $c$  값이 증가함에 따라 증가하며,  $\alpha$  값의 변화에 따라서는 감소하다가 다시 증가함을 알 수 있다. 거동값이 최소치를 나타내는  $\alpha_{opt}$  값은  $c$  값의 변화에 상관없이 항상 일정하며,  $\eta_f$ 에 대한 최적단면비  $\alpha_{opt}=0.61$ ,  $\theta_f$ 에 대한  $\alpha_{opt}=1.0$ 이다. 그림 3(b)와 그림 5에서 나타나듯이 자유단의 회전각이 최소값을 갖는  $\alpha_{opt}$  값은 '1'이므로 자유단에 모멘트하중이 재하되는 경우 회전각을 제어하기 위해서는 등단면보로 설계하는 것이 최적조건임을 알 수 있다.

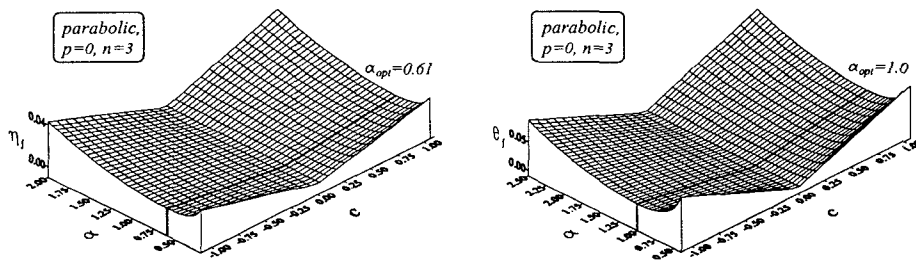


그림 5. 모멘트하중 및 단면비 변화에 따른 거동값의 변화

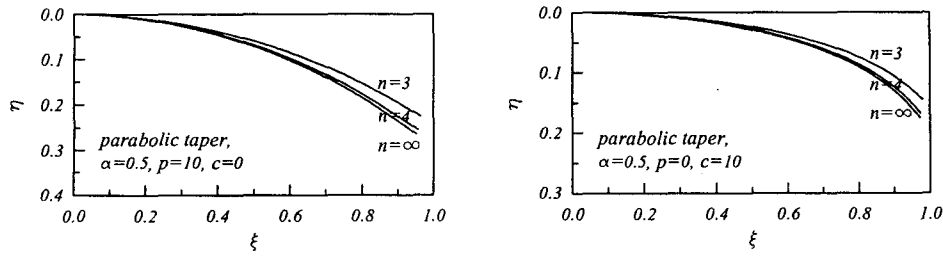


그림 6. 정확탄성곡선의 예

그림 6은 단면비가 0.5인 포물선형 캔틸레버 보에 집중하중 및 모멘트하중 재하시 정확탄성곡선의 예를 나타낸 것이다. 이 그림에서 정삼각형 단면이 처짐이 가장 작게 일어나며, 정사각형 및 원형단면은 거의 비슷한 정도의 처짐을 보인다. 따라서 정삼각형 단면이 처짐에 가장 유리함을 알 수 있다.

## 5. 결 론

본 연구는 일정체적 캔틸레버 보의 비선형해석에 관한 연구이다. 본 연구에서 해석대상 보는 일정체적을 갖는 단면깊이의 변화식이 직선, 포물선 및 정현식으로 표현되는 정다각형 단면의 변단면 캔틸레버 보를 택하였다. 본 연구에서는 Bernoulli-Euler 보 이론을 적용하여 일정체적 캔틸레버 보의 정확탄성곡선을 지배하는 미분방정식과 경계조건을 유도하였다. 유도된 미분방정식으로부터 정확탄성곡선의 거동값을 산출할 수 있는 컴퓨터 프로그램을 작성하고, 이를 수치해석하였다. 수치해석의 결과로 일정체적 캔틸레버 보의 단면제원 및 하중조건에 따른 거동값의 변화를 고찰하고, 이로부터 최대 처짐 및 최대 회전각이 최소가 되는 최적단면비를 산출하였다.

## 참고문헌

1. Craig, R.R., *Structural Dynamics, An Introduction to Computer Methods*, John Wiley & sons, Inc., 1981, pp.381-445.
2. Chucheepsakul, S., Buncharon, S. and Huang, T., "Elastica of simple variable-arc-length beams subjected to end moment," *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol.121, 1995, pp.767-772.
3. Chucheepsakul, S., Thepphitak, G. and Wang, C.M., "Large deflection of simple variable-arc-length beams subjected to a point load," *Structural Engineering and Mechanics*, Vol.4, 1996, pp.49-59.
4. Lee, B.K., Wilson J.F. and Oh, S.J., "Elastica of Cantilevered Beams with Variable Cross-Section," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol.28, No.5, 1993, pp.579-589.
5. Lee, B.K. and Oh, S.J., "Elastica and buckling load of simple tapered columns with constant volume," *International Journal of Solids and Structures*, Vol.37, No.18, 2000, pp.2507-2518.
6. Timoshenko, S.P., *History of Strength of Materials*, Dover, New York, 1983.
7. Carnahan, B., Luther, H.A. and Wilkes, J.O., *Applied Numerical Methods*, Hohn Wiley & Sons, Inc.