한국전산구조공학회
2002년도 봄 학술발표회 논문집

균열선단의 특이성을 반영한 개선된 EFG 해석기법들의 비교

A Comparison of improved EFG method with the singular expression for crack tip

이 상 호* 윤 영 철**
Lee, Sang-Ho Yoon, Young-Cheol

ABSTRACT

In this paper, several improved Element-Free Galerkin (EFG) methods containing singular expression in their approximation functions are compared one another through a patch test with near-tip field. Intrinsic enrichments that expand the basis function partially and fully with known near-tip displacement field and a local enrichment using auxiliary supports based on the partition of unity concept are examined by evaluating a relative stress norm error and the stress intensity factor. Some numerical examinations graphically show that how the size of compact support, dilation parameter and the diffraction parameter can affect the accuracy of the improved EFG methods in the error and the stress intensity factor.

1. 서 론

Element-Free Galerkin(EFG)법은 개발 초기부터 균열의 성장에 따른 연속적인 모형의 수정이 불가피한 파괴역학분야에 활발히 적용되어 왔으며, 정적인 균열성장문제와 동적균열전파문제에 모두 활용이 되어왔다[1-3]. 특히 초기에는 균열선단 주변에서의 응력의 특이성을 반영하기 위해 국부적으로 절점을 추가하여 세밀하게 배치하는 방법을 사용했었다. 그러나 단순히 균열선단 주변에 절점을 세밀하게 배치하는 것은 mesh(절점의 배치)의 민감성을 초래했으며 균열선단의 특이성도 정확하게 반영해주지 못했다. 이에, EFG 법이 갖는 장점의 하나인 근사변위함수 구성의 융통성을 활용하여 균열선단 주변응력의 특이성을 묘사할 수 있도록 근사변위함수를 수정하기에 이르렀다. Fleming 등[4]은 균열선단주변에서 EFG 형상함수를 부드럽게 하는 기법과 함께 이미 알려진 균열주변 변위장에 대한 closed form 해로부터 추출한 기저함수를 이용하여 EFG 근사함수와 다항기저함수를 확장할 수 있는 몇 가지 방법들을 제안하였다. 또한 Belytschko와 Fleming[5]도 유사한 방법으로 EFG 근사함수를 확장하여 기존의 EFG법과 조합하는 기법을 제안하였다. 그러나 이 방법들이 기존의 확장되지 않은 EFG법에 비해 정확하게 균열선단의 특이성을 잡아낼 수 있다는 장점을 부각시켰지만, 계방정식을 구성하는 과정의 복잡성, 계산시간의 상당한 증가, 또 기저함수를 확장하는 경우 해석영역 전체에 대해 특이기저함수를 적용해야 하는 불편함 등의 단점을 드러내기도 했다.

한편, 이러한 단점을 극복하려는 시도로 partition of unity 개념[6]에 바탕을 두고 전형적인 유한요소법의 근사변위함수에 균열선단의 특이성을 표현할 수 있는 항과 불연속면을 근사할 수 있는 항

* 정회원, 연세대학교 토목공학과 부교수
** 정회원, 연세대학교 토목공학과 박사과정

을 추가적으로 고려하여 요소망의 재구성 없이도 균열전파현상을 해석할 수 있는 기법이 제안되기에 이르렀다[7]. 국내에서도 EFG법을 이용하여 균열전파 현상을 해석하려는 시도가 계속적으로 있었으며[8-9], 최근에는 partition of unity 개념에 근거하여 EFG 근사변위함수에 특이기저함수를 갖는 보조받침(auxiliary support)을 더하여 확장한 기법이 제안되었다[10].

본 연구에서는 기존의 균열선단주변 변위에 대한 정해를 바탕으로 기저함수를 부분적, 그리고 완전하게 확장한 해석기법들과 본 연구자에 의해 제안된 바 있는 partition of unity 개념에 근거하여 근사변위함수를 확장한 기법에 대해 응력확대계수와 상대오차의 산정을 통해서 그 정확도와 특성을 분석하고자 한다.

2. 이동최소제곱법에 의한 Element-Free Galerkin 법

2차원 문제에 대한 EFG법에서 국부적인 근사함수 $u^h(\boldsymbol{x})$ 는 이동최소제곱법에 의해서 식 (1)과 같이 근사화 될 수 있다.[1]

$$u^h(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_m \end{pmatrix} = \boldsymbol{p}^T(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{q} \tag{1}$$

여기서, $\boldsymbol{p}^T(\boldsymbol{x})$ 는 임의의 차수를 갖는 다항기저함수이고, $\boldsymbol{q}$ 는 이에 상응하는 미지의 절점변수벡터이다. 각 절점에서의 미지계수 q_i 는 가중함수가 곱해진 잔차를 최소화시키는 stationary조건을 이용해서 구하며, 결과적으로 식 (2b)와 같은 형상함수를 갖는 EFG 근사함수를 식(2a)에 나타냈다.

$$u^h(\boldsymbol{x}) = \sum_{I=1}^{n_N} N_I(\boldsymbol{x}) d_I = \boldsymbol{N}\boldsymbol{d} \tag{2a}$$

$$N_I(\boldsymbol{x}) = \sum_{j}^{m} \boldsymbol{p}_j(\boldsymbol{x}) (\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x}))_{jI} \tag{2b}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \sum_{I=1}^{n_N} w(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_I)\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}_I)\boldsymbol{p}^T(\boldsymbol{x}_I), \tag{2c}$$

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x}) = \left[w(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_I)\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}_I), \cdots, w(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_{n_N})\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}_{n_N}) \right] \tag{2d}$$

여기서, $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$와 $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{x})$는 형상함수를 구성하는 행렬식이고, n_N 은 이동최소제곱보간에 사용된 절점의 개수이며 m은 다항기저함수의 개수이다. 가중함수, $w(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_I)$ 는 영향영역에 포함된 절점들의 상대적인 가중치를 결정한다. 본 연구에서는 원형의 compact support를 갖는 Gauss지수함수 형태의 가중함수를 사용하였다.

이와 같은 근사변위함수를 2차원 탄성문제에 관한 변분식에 전통적인 Galerkin 정식화 과정을 적용하여 계방정식을 구성할 수 있다. 한편, EFG법의 형상함수가 kronecker delta 조건을 만족시키지 못하기 때문에 필수경계조건을 완벽하게 만족시키지 못하기 때문에 특별한 처리를 해주어야 하는데 본 연구에서는 penalty 기법을 사용하였다[8, 10].

3. 균열선단의 특이성을 반영하는 개선된 EFG 기법

3.1. 기저함수의 $\sqrt{r}$ 확장

균열선단 주변에서 알려진 변위해의 성분요소 중 가장 중요한 성분으로써, 응력성분의 계산시 특이성의 차수를 지배하는 $\sqrt{r}$ 성분을 식 (3)과 같이 선형기저함수에 추가하는 방법이다[5].

$$\boldsymbol{p}^T(\boldsymbol{x}) = \left\{1, x, y, \sqrt{r}\right\} \tag{3}$$

$\sqrt{r}$ 성분은 균열선단을 중심으로 국부 좌표계에서의 거리를 포함하는데, 이동최소제곱법에 의한 국부적인(local) 근사변위함수를 구성할 때에도 균열선단에 대응하는 거동을 한다. 완전확장에 비해 계산이 간단하지만, 원주방향의 불연속성과 sine, cosine 성분의 조합에 의한 정확한 변위장을 재생하지 못하는 단점이 있다.

3.2. 기저함수의 완전확장

균열선단 주변에서 알려진 변위에 대한 정해를 완전히 재생할 수 있도록 식 (4)와 같이 변위해로부터 국부 좌표계에서의 거리성분 $\sqrt{r}$ 과 각에 대응하는 sine, cosine 성분을 모두 선형기저함수에 추가하는 방법이다[4-5].

$$\boldsymbol{p}^T(\boldsymbol{x}) = \left\{1, x, y, \sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}, \sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}, \sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}\sin\theta, \sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}\sin\theta\right\} \tag{4}$$

위식에서 앞의 세 항은 균열의 거동과는 상관없이 선형 consistency를 만족하면서 선형 변위장을 재생하고, 뒤의 네 항은 균열선단 주변에서의 응력확대계수가 지배적인 영역의 변위를 재생하게 된다. 이와 같이 기저함수를 확장하는 경우에는 역행렬을 계산해야 하는 모멘트 행렬 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ 의 크기가 커지기는 하지만, 형상함수를 구성하는 과정이 기존의 EFG법과 같고 근사변위함수를 확장하는 경우와 같이 추가의 미지계수가 필요치 않다. 그러나 이 방법은 전체 절점에 대해 고려하면서 동시에 균열 한 개당 네 개의 항이 기저함수에 추가되므로 다수의 균열이 존재하는 경우에는 계산량이 상당히 증가하게 되는 단점이 있다.

3.3. Partition of unity 에 근거한 근사변위함수의 확장

Partition of unity개념에 근거해서 식 (5)와 같이 보조받침(auxiliary support)을 이용하여 EFG 근사변위함수를 확장하면 균열선단의 특이성을 표현할 수 있으며 확장에 관련된 식들이 모두 절점들 위에서 고려되므로 전체 절점에 고려하지 않고 균열선단에서 가까운 몇몇 절점에 대해 국부적으로 자유롭게 확장항을 사용할 수 있다[10].

$$u^h(\boldsymbol{x}) = \sum_{I=1}^{n_N} N_I d_I + \sum_{I=1}^{n_E}\sum_{k=1}^{4} \overline{N}_I g_k(\boldsymbol{x}) a_{Ik} = \boldsymbol{N}\boldsymbol{d} + \overline{\boldsymbol{N}}\boldsymbol{g}\boldsymbol{a} \tag{5}$$

여기서, N_I 는 기존의 EFG 형상함수이고, $\overline{N}_I$ 는 보조받침을 덮는 형상함수이다. n_N 은 영향영역내에 포함된 이웃한 모든 절점들의 갯수이며, n_E 는 영향영역에 포함된 절점 중에서 확장된 형상함수의 계산에 고려되는 균열선단주변의 확장이 필요한 절점들의 개수이다. 이 근사변위함수를 약형

식에 적용하고 Galerkin 정식화 과정을 통하여 최종적인 계방정식을 얻을 수 있다. 확장기저함수 $g_k(x)$는 식 (6)과 같이 정의하는데, 이 함수는 기저함수를 완전확장하기 위해 사용한 항들과 그 형태가 같으며, 마찬가지로 r은 균열선단에서의 거리, θ는 균열면에 대한 각을 나타낸다.

$$g_k(x)=\left\{\sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2},\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2},\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}\sin\theta,\sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}\sin\theta\right\} \tag{6}$$

4. 균열을 갖는 문제에 대한 patch 시험과 오차평가

4.1. Patch 시험의 개요와 상대오차의 정의

균열을 포함한 patch 시험을 위해 이론해로 알려져 있는 모드 I에 대한 변위식인 식 (7a)와 (7b)를 이용하여 해석모형의 경계에 이 정해로 변위값을 미리 규정하고 해석을 수행하여 결과값으로 얻어지는 해석모형 내부의 응력값을 응역에 대한 정해와 역으로 비교하였다. 정해로 미리 규정한 변위에 의한 해석모형 내부의 응력값은 응력값에 대한 정해와 평형을 이루는 것을 이용한 것이다[4, 10].

$$u_x=\frac{K_I}{2\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[\kappa-1+2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \tag{7a}$$

$$u_y=\frac{K_I}{2\mu}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left[\kappa+1-2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right] \tag{7b}$$

균열선단의 특이성이 반영된 확장개선된 EFG 기법들의 정도를 평가하기 위하여 응력에 대한 L_2 노름에 대한 정의로부터 식 (8)과 같은 상대오차를 정의하여 오차평가에 사용하였다. 이때, σ_{ex}와 $\hat{\sigma}$는 각각 응력에 대한 정해와 수치해를 나타낸다.

$$\eta=\frac{\left[\int_{\Omega_e}(\sigma_{ex}-\hat{\sigma})^T(\sigma_{ex}-\hat{\sigma})\,d\Omega\right]^{\frac{1}{2}}}{\left[\int_{\Omega_e}\sigma_{ex}{}^T\sigma_{ex}\,d\Omega\right]^{\frac{1}{2}}}=\frac{\|e_\sigma\|_{L_2}}{\|\sigma\|_{L_2}} \tag{8}$$

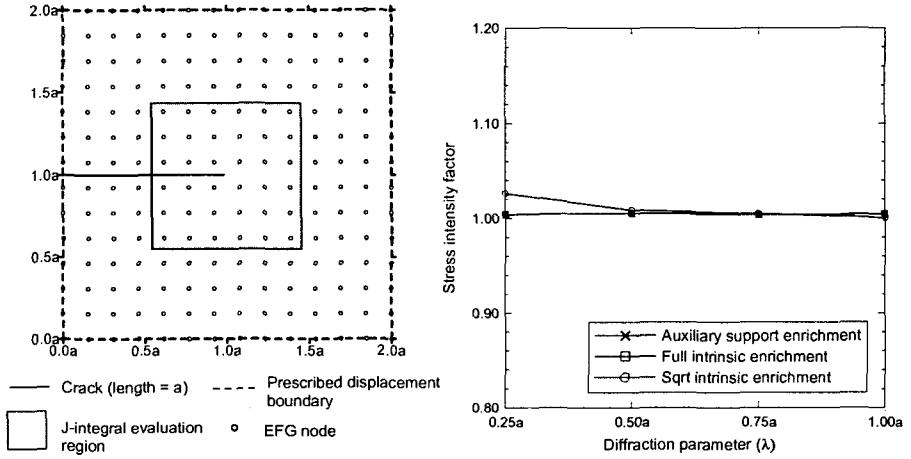
수치해석에 사용한 patch는 그림 1(a)와 같이 균열길이가 a이고, 균열선단은 좌표 (1.0a, 1.0a)에 위치하며, 가로, 세로의 길이가 각각 2a인 모형을 사용하였다. 응력확대계수는 단위값 '1'로 미리 규정하였고 필수경계조건은 penalty 기법을 이용하여 만족시켜 주었다. 균열선단이 영향영역내에 포함되는 경우에는 부드러운 해를 얻기 위해 형상함수를 smoothing해주는 기법을 적용하였으며,[4, 5] 응력확대계수의 산정은 선형탄성파괴를 가정하므로 J-적분을 영역적분의 형태로 변환한 M-적분 기법을 이용하였다.[11]

4.2. 기저함수의 확장과 근사변위함수의 확장에 대한 분석

(1) J-적분의 경로에 대한 의존성

기저함수나 근사변위함수의 확장에 의해 개선된 EFG 해석기법의 J-적분 경로에 대한 의존성을

조사하기 위하여 정사각형 모양의 J-적분의 영역을 균열선단으로부터 $0.25a$, $0.50a$, $0.75a$, $1.00a$의 거리로 늘리면서 응력확대계수를 계산한 결과를 그림 1(b)에 도시하였다. 세 가지 확장방법들 모두 J-적분영역의 크기에 상관없이 안정적이고 정확한 결과를 주는 것을 확인할 수 있다.



(a) (b)

그림 1 (a) 균열문제를 위한 path 시험 모형과 (b) 확장기법에 따른 응력확대계수의 J-적분 산정경로에 따른 의존성

(2) Compact support 크기와 팽창계수(dilation parameter)의 영향

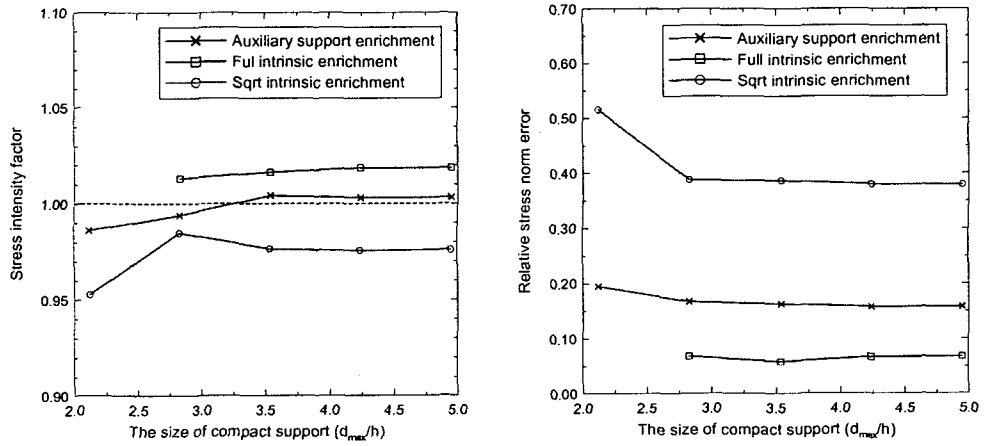
팽창계수 값을 고정하고 각 절점의 영향영역(형상함수가 0이 아닌 값을 갖는 영역)을 의미하는 compact support의 크기를 변화시킬 때와 그 반대의 경우에 대해 각 확장방법을 이용하여 응력확대계수와 상대오차를 산정하였다. 기저함수를 완전확장 하는 경우와 보조받침을 이용하여 근사변위함수를 확장한 기법은 그림 2(a), 그림 3(a)와 같이 compact support의 크기나 팽창계수의 변화에 큰 영향을 받지 않으며 정확한 응력확대계수 값을 주었으며, $\sqrt{r}$ 에 의한 기저함수 부분확장 기법에 비해 상대적으로 작은 오차를 발생시켰다. 한편, $\sqrt{r}$ 에 의한 기저함수의 확장은 compact support 크기와 팽창계수의 크기변화에 따라 부정확한 응력확대계수 값을 주는 경우도 있었는데, 이는 균열선단의 변위장이나 응력장에 포함된 sine함수와 cosine함수 항에 의한 각(angular)방향의 해를 적절하게 재생시켜주지 못하기 때문에 발생한 오차인 것으로 사료된다 (그림 2(b), 그림 3(b)).

(3) 회절(diffraction)계수의 영향

EFG 균열해석기법에서는 균열면과 그 선단주변에서 불연속한 형상함수를 사용하기 때문에 선단에서 가까운 응력값이 중요한 파괴역학 문제에서는 큰 오차의 원인이 될 수 있다. 이러한 문제를 해결하기 위하여 Belytschko와 Fleming[4]은 식 (9)와 같이 기준점과 절점 사이의 거리를 수정하여 형상함수를 부드럽게 바꾸어주는 회절(diffraction) 기법을 제안하였다.

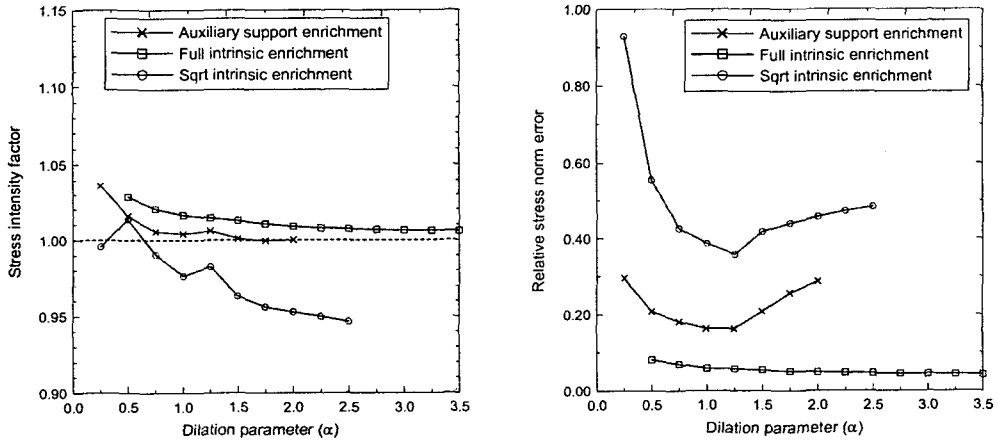
$$d_I(x) = \left(\frac{d_1 + d_2(x)}{d_0(x)} \right)^{\lambda} d_0(x) \tag{9}$$

여기서, d_0, d_1, d_2는 각각 기준점과 절점 사이의 거리, 절점과 균열선단 사이의 거리, 기준점과 균열선단 사이의 거리를, λ는 회절계수를 나타낸다. 그림 4(a) 와 그림 4(b)를 보면, 균열선단 주변에서 부드러운 특이함수를 이용하여 EFG법의 기저함수나 근사변위함수를 확장한다 할지라도 불연속한 형상함수로 인해 해의 정도가 떨어질 수 있다는 것을 알 수 있다. 특히 보조받침을 사용하여 근사변위함수를 확장시킨 경우에는 회절계수의 크기에는 영향을 받지 않지만 반드시 회절기법을 사용해야 정확한 해를 얻을 수 있음을 보여주고 있다. 단, 기저함수 자체를 완전확장 시키는 경우에는 회절계수에 상관없이 정확한 해석을 수행할 수 있었는데, 이것은 형상함수의 생성과정에서 이미 확장된 기저함수 자체가 균열선단 주변에서 충분한 smoothness를 갖도록 해주기 때문이다



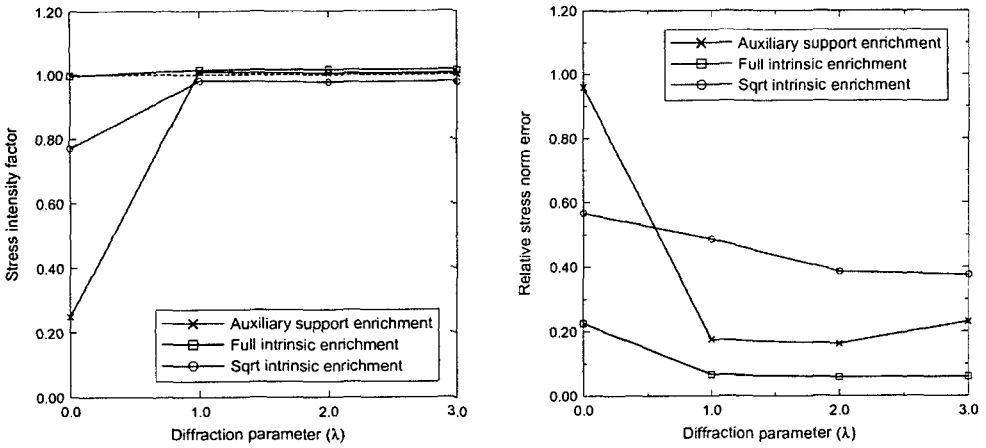
(a) (b)

그림 2 Compact support 크기에 따른 (a) 응력확대계수와 (b) 상대오차



(a) (b)

그림 3 팽창계수에 따른 (a) 응력확대계수와 (b) 상대오차



(a) (b)

그림 4 각 확장방법에서 회절계수에 따른 (a) 응력확대계수와 (b) 상대응력노름오차

5. 토의 및 결론

본 연구는 균열선단의 특이성을 반영하기 위하여 균열선단 주변의 변위에 대한 정해를 이용하여 EFG 기저함수 자체를 수정한 두 가지 기법과 partition of unity개념에 근거하여 보조받침을 추가함으로써 근사변위함수를 수정한 기법의 정확성 및 그 특성을 분석하기 위하여 상대 응력노름오차와 응력확대계수를 산정하여 비교· 분석하였다.

먼저, J-적분 영역의 크기에 대한 의존성을 조사한 결과, 세가지 기법 모두 J-적분 경로 또는 영역의 크기에 상관없이 매우 정확하고 안정적인 응력확대계수 값을 주었다. 또한, compact support의 크기와 팽창계수 값을 변화시키면서 patch 시험을 수행한 결과, 기저함수를 완전확장한 기법이나 보조받침을 추가하여 근사변위함수를 확장한 기법은 상대적으로 작은 오차를 발생시키면서 매우 정확한 응력확대계수 값을 주었지만, $\sqrt{r}$ 에 의한 기저함수의 부분확장은 비교적 큰 오차와 함께 응력확대계수 값이 compact support의 크기와 팽창계수 값에 따라 민감한 거동을 보였다. 특히, 기저함수의 완전확장은 대체로 팽창계수가 커지면 오차가 감소하고 상당히 큰 팽창계수 값에도 정확한 응력확대계수 값을 얻게 해 주었다. 마지막으로 회절기법이 보조받침을 사용하는 확장기법에 있어서는 필수적인 고려사항 이었지만, 기저함수를 완전확장하는 경우에는 그 정확도에 거의 영향을 주지 않았음을 주목할 필요가 있다.

결론적으로, EFG법과 같은 mesh-free기법이 요소망의 구성제약이 없기 때문에 균열전파문제에 매우 유용할 뿐만 아니라, 본 연구에서 보여진 바와 같이 균열선단의 특이성을 표현할 수 있도록 기저함수나 근사변위함수를 상당히 유연하게 개선할 수 있다는 장점이 있지만, 동시에 이와 같은 해석을 수행할 때 해석에 필요한 가중함수나 기타 여러 가지 계수를 선택할 때에 매우 신중을 기할 필요가 있다는 것을 주의해야 한다. 또한 본 연구에서 접근하는 비교 분석 방식이 EFG 균열해석에 필요한 계수들을 어떻게 선택할 것인지에 대한 하나의 방법론을 제시할 수 있을 것으로 사료된다.

감사의 글

본 연구는 한국과학기술평가원(KISTEP)의 원자력기초 연구사업 연구비 지원으로 이루어졌으며 이에 깊은 감사를 드립니다.

참고문헌

1. Belytschko, T., Lu, Y. Y. and Gu, L., "Element-free Galerkin methods," *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol.37, 1994, pp.229-256.

2. Belytschko, T., Lu, Y. Y., Gu, L. and Tabbara, M., "Element-free Galerkin methods for static and dynamic fracture," *International Journal of Solids and Structures*, Vol.32, 1995, pp.2547-2570.

3. Belytschko, T. and Tabbara, M., "Dynamic fracture using element-free Galerkin Methods," *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol.39, 1996, pp.923-938.

4. Flemming, M., Chu, Y. A., Moran, B. and Belytschko, T., "Enrichment Element-Free Galerkin methods for crack tip fields," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.40, 1997, pp.1483-1504.

5. Belytschko, T. and Fleming, M., "Smoothing, enrichment and contact in the element-free Galerkin method," *Computer and Structures*, Vol.71, 1999, pp.173-195.

6. Melenk J M and Babuška I. "The partition of unity finite element method: Basic theory and applications," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.139, 1996, pp.289-314.

7. Moës, N., Dolbow, J. and Belytschko, T., "A finite element method for crack growth without remeshing," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol.46, 1999, pp.131-150.

8. 이상호, 윤영철, "Element-Free Galerkin 법을 이용한 혼합모드상태 균열의 균열진전해석", 한국전산구조공학회 논문집, 제 12 권 제 3 호, 1999a, pp.485-494.

9. 이상호, 윤영철, "EFG 법을 사용한 다수균열 함유 강부재의 피로균열 성장거동해석", 한국전산구조공학회 논문집, 제 12 권 제 4 호, 1999b, pp.691-700.

10. 이상호, 윤영철, "특이기저함수를 이용하여 개선한 Mesh-Free 균열해석기법", 한국전산구조공학회 논문집, 제 14 권 제 3 호, 2001, pp.381-390.

11. Moran, B. and Shih C. F., "Crack tip and associated domain integrals from momentum and energy balance," *Engineering Fracture Mechanics*, Vol.27, 1987, pp.615-641.