

## HRKPM 을 이용한 키르히호프 판의 해석

### Kirchhoff Plate Analysis by Using Hermite Reproducing Kernel Particle Method

석병호\*

Seog, Byung-Ho

#### ABSTRACT

For the analysis of Kirchhoff plate bending problems, a new meshless method is implemented. For the satisfaction of the  $C^1$  continuity condition in which the first derivative is treated as another primary variable, Hermite interpolation is enforced on standard reproducing kernel particle method. In order to impose essential boundary conditions on solving  $C^1$  continuity problems, shape function modifications are adopted. Through numerical tests, the characteristics and accuracy of the HRKPM are investigated and compared with the finite element analysis. By this implementation, it is shown that high accuracy is achieved by using HRKPM for solving Kirchhoff plate bending problems.

#### 1. 서론

오늘날 유한요소법은 공학문제의 유용한 해석도구로 널리 이용되고 있다. 그러나 대변형문제의 해석에서는 요소의 찌그러짐이 과도하여 해의 정확도가 떨어지고, 균열진전문제의 해석에서는 균열진전의 각 단계에서 요소망을 재구성해야 하는 문제점을 안고 있다. 이것은 유한요소법의 근간인 요소로부터 발생하는 문제로써 현재 유한요소법의 큰 단점으로 대두되고 있다.

이와 같은 유한요소법의 단점을 극복하기 위한 새로운 방법으로 적절한 절점의 배치만으로 해석이 가능한 무요소법(meshless method)<sup>(1-3)</sup>이 제안되고 이에 대한 연구가 활발하게 진행되고 있으며 국내에서도 이에 관한 연구사례<sup>(4-11)</sup>가 속속 발표되고 있다.

무요소법의 최초의 원형은 SPH 법(smooth particle hydrodynamics)<sup>(12)</sup>으로 천문학문제의 해결을 위하여 제안되었으며 핵함수(kernel function)를 사용하여 함수의 근사화를 수행한 방법이다.

이 SPH 법은 경계치 문제에서는 해의 정확도가 떨어져서 고체역학 및 구조역학 등의 문제에는 적용하기 어려운 단점을 안고 있으며, 이런 SPH 의 단점을 보완하여 새롭게 제안된 방법이 RKPM(reproducing kernel particle method)<sup>(13-15)</sup>으로 선형일관성(linear consistency)조건을 충족하며 경계에서의 근사치를 향상시키기 위해 수정함수(correction function)를 도입하여 해석의 정확도를 향상시켰다. RKPM 은 유체해석 및 구조해석을 포함한 다양하고 넓은 영역의 해석에 적용되어 우수한 해석결과를 보여주고 있다.

무요소법을 이용한 보 및 평판의 해석으로는 최초 EFGM(element free Galerkin method)을 이용한 얇은 평판<sup>(16)</sup> 및 셸<sup>(17)</sup>의 해석사례가 있다. 이 연구에서는  $C^1$  연속조건으로서의 보와 평판으로 처리하였으며 필수경계조건을 만족시키기 위하여 라그랑지 승수법을 도입하여 사용하였다. Donning<sup>(18)</sup> 등은 무요소법에서 형상함수가 가중함수(weight function)의 특성에 크게 좌우되어 가중함수와 유사한 형태를 갖는데 착안하여 필수경계조건을 만족시키는 스플라인 함수를 제안하고 이를 형상함수로 사용하여 Mindlin 보, 평판 및 셸을 해석하였다. 그러나 이것은 무요소법의 일반적인 방법으로 취급하기는 어려우며 실험적인 시도라고 생각된다.

본 연구에서는 얇은 Kirchhoff 평판과 같은  $C^1$  연속조건이 요구되는 문제를 해석하기 위한 에르미트 보간

\* 회원, 한양대 기계기술연구소

에 근거한 HRKPM 을 제안하였고 필수경계조건을 만족시키기 위해서는 형상함수 수정법<sup>(8-9)</sup>을 도입하였다. 여러가지 수치실험을 수행하고 그 결과를 기존의 유한요소법의 결과와 비교하여 제안한 방법의 타당성과 정확도를 평가하고자 한다.

## 2. HRKPM 의 수식화

RKPM 에  $C^1$  연속조건의 에르미트 보간함수(Hermite interpolation)를 도입하여 근사식<sup>(15)</sup>을 표현하면 식 (1) 과 같이 1 차 미분항이 추가되어 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$f^R(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \overline{\Phi}(\mathbf{x}-\overline{\mathbf{x}})f(\overline{\mathbf{x}})d\overline{\mathbf{x}} + \int_{\Omega} \overline{\Psi}(\mathbf{x}-\overline{\mathbf{x}})\theta(\overline{\mathbf{x}})d\overline{\mathbf{x}} \quad (1)$$

$$\overline{\Phi}(\mathbf{x}-\overline{\mathbf{x}}) = C(\mathbf{x}; \mathbf{x}-\overline{\mathbf{x}})\Phi(\mathbf{x}-\overline{\mathbf{x}}) \quad (2)$$

이때  $\theta(\mathbf{x}) = df/d\mathbf{x}$  로 1 차 미분항을 나타내며 식 (2)의  $C(\mathbf{x}-\overline{\mathbf{x}})$ 는 수정함수를 나타낸다.

식 (1)에서  $\overline{\Phi}(\mathbf{x}-\overline{\mathbf{x}})$  와  $\overline{\Psi}(\mathbf{x}-\overline{\mathbf{x}})$  의 관계를 정립하기 위하여  $f(\overline{\mathbf{x}})$  와  $\theta(\overline{\mathbf{x}})$  를 테일러급수로 전개한 후 이를 식 (1)에 대입하여 함수  $f$  및 이의 도함수로 정리하면 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} f^R(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}) \int_{\Omega} \overline{\Phi}(\mathbf{x}-\overline{\mathbf{x}})d\overline{\mathbf{x}} \\ &\quad - f^{(1)}(\mathbf{x}) \int_{\Omega} [(\mathbf{x}-\overline{\mathbf{x}})\overline{\Phi}(\mathbf{x}-\overline{\mathbf{x}}) - \overline{\Psi}(\mathbf{x}-\overline{\mathbf{x}})]d\overline{\mathbf{x}} \\ &\quad + f^{(2)}(\mathbf{x}) \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{2!}(\mathbf{x}-\overline{\mathbf{x}})^2 \overline{\Phi}(\mathbf{x}-\overline{\mathbf{x}}) - (\mathbf{x}-\overline{\mathbf{x}})\overline{\Psi}(\mathbf{x}-\overline{\mathbf{x}}) \right]d\overline{\mathbf{x}} \\ &\quad - f^{(3)}(\mathbf{x}) \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{3!}(\mathbf{x}-\overline{\mathbf{x}})^3 \overline{\Phi}(\mathbf{x}-\overline{\mathbf{x}}) - \frac{1}{2!}(\mathbf{x}-\overline{\mathbf{x}})^2 \overline{\Psi}(\mathbf{x}-\overline{\mathbf{x}}) \right]d\overline{\mathbf{x}} \\ &\quad \vdots \\ &\quad + f^{(N)}(\mathbf{x}) \int_{\Omega} \left[ \frac{(-1)^N}{N!}(\mathbf{x}-\overline{\mathbf{x}})^N \overline{\Phi}(\mathbf{x}-\overline{\mathbf{x}}) + \frac{(-1)^{N-1}}{(N-1)!}(\mathbf{x}-\overline{\mathbf{x}})^{N-1} \overline{\Psi}(\mathbf{x}-\overline{\mathbf{x}}) \right]d\overline{\mathbf{x}} \end{aligned} \quad (3)$$

이때 함수  $f$  의 재생조건으로부터 다음의 관계식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \overline{\Phi}(\mathbf{x}-\overline{\mathbf{x}})d\overline{\mathbf{x}} &= 1 \\ \int_{\Omega} [(\mathbf{x}-\overline{\mathbf{x}})\overline{\Phi}(\mathbf{x}-\overline{\mathbf{x}}) - \overline{\Psi}(\mathbf{x}-\overline{\mathbf{x}})]d\overline{\mathbf{x}} &= 0 \\ \int_{\Omega} \left[ \frac{1}{2!}(\mathbf{x}-\overline{\mathbf{x}})^2 \overline{\Phi}(\mathbf{x}-\overline{\mathbf{x}}) - (\mathbf{x}-\overline{\mathbf{x}})\overline{\Psi}(\mathbf{x}-\overline{\mathbf{x}}) \right]d\overline{\mathbf{x}} &= 0 \\ &\vdots \\ \int_{\Omega} \left[ \frac{(-1)^N}{N!}(\mathbf{x}-\overline{\mathbf{x}})^N \overline{\Phi}(\mathbf{x}-\overline{\mathbf{x}}) + \frac{(-1)^{N-1}}{(N-1)!}(\mathbf{x}-\overline{\mathbf{x}})^{N-1} \overline{\Psi}(\mathbf{x}-\overline{\mathbf{x}}) \right]d\overline{\mathbf{x}} &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

식 (4)의 재생조건은 결국 다음과 같은 등식으로 표현된다.

$$\begin{aligned}\bar{\Psi}(\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}}) &= (\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}})\bar{\Phi}(\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}}) \\ \bar{\Psi}(\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}}) &= \frac{1}{2}(\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}})\bar{\Phi}(\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}}) \\ \bar{\Psi}(\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}}) &= \frac{1}{3}(\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}})\bar{\Phi}(\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}}) \\ &\vdots\end{aligned}\tag{5}$$

식 (5)에서 1차 미계수까지의 재생조건을 고려하면 식 (6)이 성립한다.

$$\bar{\Psi}(\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}}) = (\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}})\bar{\Phi}(\mathbf{x}-\bar{\mathbf{x}})\tag{6}$$

식 (1)의 근사식에 식 (6)을 대입하여 정리하고 이를 이산화하여 나타내면 식 (7)과 같고, 이때 형상함수는 식 (8)과 같다.

$$f^R(\mathbf{x}) = \sum_I N_I(\mathbf{x}) [f(\mathbf{x}_I) + (\mathbf{x}-\mathbf{x}_I)\theta(\mathbf{x}_I)]\tag{7}$$

$$N_I(\mathbf{x}) = \mathbf{H}^T(0)\mathbf{M}^{-1}\mathbf{H}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_I)\Phi(\mathbf{x}-\mathbf{x}_I)\tag{8}$$

식 (8)의 형상함수는 일반 RKPM의 수식화 과정<sup>(10-11)</sup>에서 구할 수 있으며, 식 (7)을 이용하여 1차 미분항  $\theta(\mathbf{x})$ 에 대한 형상함수를 구할 수 있다.

### 3. 형상함수 수정법

필수경계조건을 충족시키기 위하여 본 연구에서는 형상함수 수정법<sup>(8-9)</sup>을 사용하였다. 형상함수 수정법을  $C^1$  연속조건이 얇은 평판에 적용하기 위한 수식화 과정은 다음과 같다.

식 (7)의 근사식을 평판에 적용하기 위하여 처짐 및  $x, y$  양방향의 처짐각에 대한 형상함수가 포함된 식으로 표현하면 식 (9)와 같다.

$$f^R(\mathbf{x}) = [N^0(\mathbf{x})]\{f\} + [N^x(\mathbf{x})]\{\theta_x\} + [N^y(\mathbf{x})]\{\theta_y\}\tag{9}$$

식 (9)를 필수경계상의 근사절점치  $\{\tilde{f}_B\}$  와 이를 제외한 나머지 영역내의 근사절점치  $\{\tilde{f}_I\}$  로 구분하고 형상함수도 이에 따라서 구분하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$f^R(\mathbf{x}) = [\tilde{N}_I(\mathbf{x})]\{\tilde{f}_I\} + [\tilde{N}_B(\mathbf{x})]\{\tilde{f}_B\}\tag{10}$$

단,

$$[\tilde{N}_I(\mathbf{x})] = [N_I^0 \quad N_I^x \quad N_I^y]\tag{11}$$

$$[\tilde{N}_B(\mathbf{x})] = [N_B^0 \quad N_B^x \quad N_B^y]\tag{12}$$

$$\{\tilde{f}_I\} = \{f_I \quad \theta_{xI} \quad \theta_{yI}\}^T\tag{13}$$

$$\{\tilde{f}_B\} = \{f_B \quad \theta_{xB} \quad \theta_{yB}\}^T \quad (14)$$

이들 식에서 윗첨자는 각각 처짐 및 처짐각의 방향을 나타낸다. 이제 필수경계상의 절점좌표  $\mathbf{x}_B$ 에서 만족시켜야 하는 지정된 변위벡터를 다음과 같이 정의한다.

$$f^R(\mathbf{x}_B) = \delta_B \quad (15a)$$

$$f_x^R(\mathbf{x}_B) = \theta_B^x \quad (15b)$$

$$f_y^R(\mathbf{x}_B) = \theta_B^y \quad (15c)$$

식 (15b, c)에서  $f_x^R$ ,  $f_y^R$ 은  $f^R$ 을  $x, y$ 로 미분한 것을 의미하고 식 (10)을 식 (15)에 대입하여 정리하면 다음식을 얻을 수 있다.

$$\{\tilde{\delta}_B\} = [A]\{\tilde{f}_I\} + [B]\{\tilde{f}_B\} \quad (16)$$

식 (16)에서 각각의 행렬은 다음과 같이 표현된다.

$$\{\tilde{\delta}_B\} = \{\delta_B \quad \theta_B^x \quad \theta_B^y\}^T \quad (17)$$

$$[A] = \begin{bmatrix} N_I^0(\mathbf{x}_B) & N_I^x(\mathbf{x}_B) & N_I^y(\mathbf{x}_B) \\ N_{Ix}^0(\mathbf{x}_B) & N_{Ix}^x(\mathbf{x}_B) & N_{Ix}^y(\mathbf{x}_B) \\ N_{Iy}^0(\mathbf{x}_B) & N_{Iy}^x(\mathbf{x}_B) & N_{Iy}^y(\mathbf{x}_B) \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} N_B^0(\mathbf{x}_B) & N_B^x(\mathbf{x}_B) & N_B^y(\mathbf{x}_B) \\ N_{Bx}^0(\mathbf{x}_B) & N_{Bx}^x(\mathbf{x}_B) & N_{Bx}^y(\mathbf{x}_B) \\ N_{By}^0(\mathbf{x}_B) & N_{By}^x(\mathbf{x}_B) & N_{By}^y(\mathbf{x}_B) \end{bmatrix} \quad (19)$$

식 (18), (19)에서 하첨자  $x, y$ 는 이들 첨자에 관한 미분을 의미한다.

식 (16)에서  $\{\tilde{f}_B\}$ 를 구하면 식 (20)과 같고 이것을 식 (10)에 대입하여 정리하면 식 (21)과 같은 수정된 형상함수의 최종식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \{\tilde{f}_B\} &= [B]^{-1} \left( \{\tilde{\delta}_B\} - [A]\{\tilde{f}_I\} \right) \\ &= [B]^{-1} \{\tilde{\delta}_B\} - [B]^{-1}[A]\{\tilde{f}_I\} \end{aligned} \quad (20)$$

$$f^R(\mathbf{x}) = [\bar{N}_I(\mathbf{x})]\{\tilde{f}_I\} + [\bar{N}_B(\mathbf{x})]\{\tilde{\delta}_B\} \quad (21)$$

$$\text{단, } [\bar{N}_I(\mathbf{x})] = [\tilde{N}_I(\mathbf{x})] - [\tilde{N}_B(\mathbf{x})][B]^{-1}[A] \quad (22)$$

$$[\bar{N}_B(\mathbf{x})] = [\tilde{N}_B(\mathbf{x})][B]^{-1} \quad (23)$$

이다. 식 (21)을 사용하면 유한요소법과 같이 필수경계조건을 직접적으로 처리할 수 있다.

#### 4. 수치예제 및 검토

본 논문의 수치예제에서는 C' 연속조건이 적용되는 Kirchhoff 평판을 HRKPM 으로 해석하여 그 결과를 유한요소법의 결과와 비교하였으며, HRKPM 의 절점 및 적분점의 변화에 따른 영향도 함께 고찰하였다. Kirchhoff 평판의 해석에서 기저함수는 2 차 기저함수(quadratic basis function)를 사용하였고, 가중함수는 사차 스플라인 가중함수(quartic spline weight function)를 사용하였다.

##### 4.1 정사각형 평판의 해석

Fig. 1 과 같이 네변이 고정(clamped)된 정사각형 평판의 중앙에 집중하중이 작용하는 경우를 해석하였다. 해석모델은 Fig. 2 와 같이 대칭조건을 고려하여 1/4 모델을 각 방향으로 5 등분하고 절점을 기준으로 적분칸(cell)을 구성하였다. HRKPM 의 해의 정확도는 얇은 평판의 해석에서 매우 정확하여 우수한 요소로 잘 알려진 DKT(discrete Kirchhoff triangle)요소<sup>(19)</sup>를 사용한 유한요소해와 비교하였다.

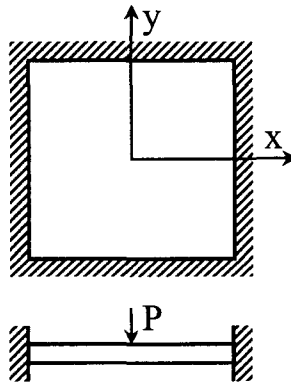


Fig. 1 Clamped square plate under a concentrated force.

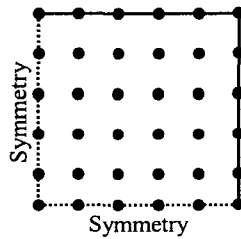


Fig. 2 Node arrangement for a quadrant of the clamped square plate.

Table 1 Normalized deflection of center of the clamped square plate with respect to node number.

Method	Node number				
	16	25	36	49	64
FEM(DKT)	1.029	1.019	1.014	1.011	1.009

HRKPM	1.038	0.998	1.030	1.013	0.961
-------	-------	-------	-------	-------	-------

**Table 2** Normalized deflection of center of the clamped square plate with respect to Gauss point.

Deflection	Gauss point				
	4	5	6	7	8
$w^R/w^{EXACT}$	1.048	1.030	1.045	1.035	1.041

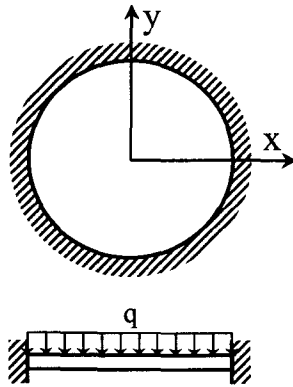
HRKPM에서는 첫번째 가까운 점의 거리에 수정계수 2.5를 곱한 값을 영향영역의 크기로 사용하였고, 적분점은 각 방향으로 각각 5개씩을 사용하였다. 해석결과는 엄밀해와 비교하였다.

Table 1에서 대칭조건을 고려한 1/4 모델의 각 방향으로의 등분수를 달리하여 절점수를 변화시켰을 때 각 해석방법에 의한 해석결과를 보여주고 있다. HRKPM의 해석결과가 매우 정확함을 확인할 수 있었다.

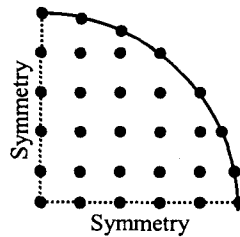
Table 2는 Fig. 2의 해석모델의 적분점의 수를 변화시켰을 때 HRKPM의 해석결과로 적분점의 수에 관계없이 정확한 결과를 보여주고 있음을 알 수 있다.

#### 4.2 원형 평판의 해석

Fig. 3과 같은 원형평판의 전영역에 분포하중이 작용하는 경우를 해석하였다. 이때 해석모델의 한가지 예는 대칭조건을 고려한 1/4 모델을 각 방향으로 5 등분한 Fig. 4와 같다.



**Fig. 3** Clamped circular plate under distributed load.



**Fig. 4** Node arrangement for a quadrant of the clamped circular plate.

**Table 3** Normalized deflection of center of the clamped circular plate with respect to node number.

Method	Node number			
	15	23	30	43
FEM(DKT)	1.024	1.021	1.016	1.009
HRKPM	0.970	0.980	0.960	0.962

Fig. 4 와 같이 등분수를 달리하여 절점수를 변화시켰을 때 이에 따른 해의 정확도를 DKT 요소를 사용한 유한요소법의 결과와 비교하였다. Table 3 으로부터 HRKPM 의 해석결과가 유한요소법의 결과와 비교하여 정확함을 알 수 있다.

## 5. 결론

RKPM 에  $C^1$  연속조건을 위하여 에르미트 보간법을 적용한 HRKPM 을 도입하여 얇은 Kirchhoff 평판을 해석하고 그 결과를 검토하여 다음의 결론을 얻었다.

(1)  $C^1$  연속조건이 요구되는 얇은 Kirchhoff 평판의 해석에서 HRKPM 은  $C^1$  연속조건을 잘 충족시키며 해석결과도 비교적 정확하다.

(2) 필수경계조건을 위한 형상함수 수정법은  $C^1$  연속조건인 Kirchhoff 평판에도 정확하게 적용될 수 있다.

## 참고문헌

- (1) Belytschko, T., Lu, Y. Y. and Gu L., 1994, "Element-free Galerkin methods," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, pp. 229~256.
- (2) Duarte, C. A. and Oden, J. T., 1996, "An h-p Adaptive Method Using Clouds," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 139, pp. 237~262
- (3) Babuska, I. and Melenk, J. M., 1997, "The Partition of Unity," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 40, pp. 727~758
- (4) 송태한, 임장근, 1998, "RKPM 에서의 변위 경계조건 처리법," 대한기계학회 '98 년도 춘계학술대회논문집, pp. 391~395
- (5) 석병호, 임장근, 1998, "갤러킨 정식화를 사용한 무요소법의 구성과 그 특성," 대한기계학회 '98 년도 춘계학술대회논문집, pp. 396~401
- (6) 석병호, 임장근, 1999, "갤러킨 정식화를 사용한 무요소법의 구성과 그 특성," 전산구조공학회는논문집 제 12 권, 제 1 호, pp. 47~56
- (7) 송태한, 임장근, 1999, "RKPM 의 새로운 구성법," 대한기계학회 '99 년도 춘계학술대회논문집, pp. 833~837
- (8) 석병호, 임장근, 1999, "EFGM 에서 필수경계조건을 위한 형상함수 수정법," 대한기계학회 '99 년도 춘계학술대회논문집, pp. 838~842
- (9) 석병호, 송태한, 임장근, 1999, "EFGM 에서 필수경계조건 처리를 위한 형상함수 수정법," 대한기계학회논문집, 제 24 권, 제 3 호, pp. 803~809
- (10) 석병호, 임장근, 1999, "HRKPM 을 이용한 오일러보의 해석," 대한기계학회 '99 년도 추계학술대회논문집, pp. 567~571
- (11) 송태한, 임장근, 1999, "특이커널함수를 사용한 RKPM," 대한기계학회 '99 년도 추계학술대회논문집, pp. 578~583
- (12) Monaghan, J. J., 1988, "An Introduction to SPH," *Computer Physics Communications*, Vol. 48, pp. 89~96
- (13) Liu, W. K., Jun, S. and Zhang, Y. F., 1995, "Reproducing Kernel Particle Methods," *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Vol. 20, pp. 1081~1106
- (14) Liu, W. K., Jun, S., Li, S., Adee, J., and Belytschko, T., 1995, "Reproducing Kernel Particle Methods for Structural Dynamics," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 38, pp. 1655~1679
- (15) Liu, W. K., Chen, Y., Uras, R. A., and Chang, C. T., 1996, "Generalized Multiple Scale Reproducing Kernel Particle Methods," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 139, pp. 91~157
- (16) Krysl, P. and Belytschko, T., 1996, "Analysis of Thin Plates by Element Free Galerkin Method," *Computational Mechanics*, Vol. 17, pp. 26~35
- (17) Krysl, P. and Belytschko, T., 1996, "Analysis of Thin Shells by Element Free Galerkin Method," *Int. J. Solids and Structures*, Vol. 33, pp. 3057~3080
- (18) Donning, B. and Liu, W. K., 1998, "Meshless Methods for Shear Deformable Beams and Plates," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 152, pp. 47~72
- (19) Jeyachandrabose, C., Kirkhope, J., and Babu, C. R., 1985, "An Alternative Explicit Formulation for the DKT Plate-Bending Element," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 21, pp. 1289~1293