

# 유한요소법을 이용한 교각 주위에서의 2차원 수치적 흐름분석

## A Numerical Analysis of 2-Dimensional Flow around Bridge Pier for Using Finite Element Method

○정요한\* · 정우창\*\* · 박영진\*\*\* · 송재우\*\*\*\*

### 1. 서론

하천 내에 교량과 같은 수공구조물을 설치할 경우 수공구조물로 인한 흐름의 변화를 분석하고 예측하는 것은 매우 중요하다. 이를 위해 물리적 상사성에 기초를 둔 수리모형실험과 수학적 표현에 기초를 둔 수치모형실험은 지금까지 많은 연구자들에 의해 수행되어져 왔다. 이 중 특히 수치모형실험은 수리모형실험보다 시간 및 비용의 절감 등의 효과로 인해 관심 및 연구가 더욱 증가되고 있는 실정이다(Samuels, 1985; Wang, 1985, 한건연 등, 1993; 한건연 등, 2001).

본 연구에서는 기하학적으로 다양한 형태의 교량교각 주위에서의 흐름에 대한 거동을 수치적 기법을 통해 분석하였다. 지배방정식으로 2차원 연속방정식과 Navier-Stokes 방정식이 사용되었으며, 이를 상류이송문제를 해결하기 위해 감쇠항이 포함된 Galerkin 유한요소법을 적용하였다.

### 2. 연구방법

본 연구에서 사용된 지배방정식인 연속방정식과 Navier-Stokes 방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1)$$

$$\rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ -P\delta_{ij} + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] + \rho f_i = 0 \quad (2)$$

위 식에서는 2차원 문제일 경우  $i=1, 2$ 가 된다. 식(1)과 (2)에 유한요소기법을 적용하면 격자망을 구성하는 각각의 요소에 대해 다음과 같은 형태가 된다.

연속 방정식

$$- \left[ \int_{\Omega^e} M \frac{\partial N^T}{\partial x_i} d\Omega \right] u_i = 0 \quad (3)$$

운동량 방정식

---

\* 삼안건설기술공사 수력부  
 \*\* 홍익대학교 토목공학과 겸임교수  
 \*\*\* 서일대학 토목과 조교수  
 \*\*\*\* 홍익대학교 토목공학과 교수

$$\begin{aligned}
& \left[ \int_{\Omega^e} \rho NN^T d\Omega \right] \frac{\partial u_i}{\partial t} + \left[ \int_{\Omega^e} \rho N(N^T u_j) \frac{\partial N^T}{\partial x_j} d\Omega \right] u_i \\
& + \left[ \int_{\Omega^e} \mu \frac{\partial N}{\partial x_j} \frac{\partial N^T}{\partial x_j} d\Omega \right] u_i + \left[ \int_{\Omega^e} \mu \frac{\partial N}{\partial x_j} \frac{\partial N^T}{\partial x_i} d\Omega \right] u_j \\
& - \left[ \int_{\Omega^e} \frac{\partial N}{\partial x_i} M^T d\Omega \right] P = \left[ \int_{\Omega^e} \rho N f_i d\Omega \right] + \left\{ \oint_{\Gamma^e} t_i N d\Gamma \right\}
\end{aligned} \quad (4)$$

여기서  $N$ 과  $M$ 은 형상함수 또는 기저함수이며,  $\Omega$ 는 2차원 문제영역,  $\Gamma$ 는 경계영역이다. 또한  $t_i = \left( 2\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_i} - P \right) n_i + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) n_j$ 가 된다.

Galerkin 유한요소기법에서 발생하는 상류이송문제를 해결하기 위해 감쇠항을 식(4)에 도입하여 행렬형태로 표현하면 식(5)와 같다.

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} [M] & [0] \\ [0] & [M] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \left[ \frac{\partial u}{\partial t} \right] \\ \left[ \frac{\partial v}{\partial t} \right] \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [C(u)_{11}] & [0] \\ [0] & [C(u)_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} [u] \\ [v] \end{Bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} 2[K_{11}] + [K_{22}] & [K_{21}] \\ [K_{12}] & [K_{11}] + 2[K_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} [u] \\ [v] \end{Bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} [\hat{K}_{11}] & [\hat{K}_{12}] \\ [\hat{K}_{21}] & [\hat{K}_{22}] \end{bmatrix} = \{ [F_1] [F_2] \}
\end{aligned} \quad (5)$$

여기서  $[\hat{K}]$ 는 감쇠항에 해당되는 행렬계수이며, 각각의 요소에 대해 다음과 같이 나타낼 수 있다(Reddy, 1993).

$$\begin{aligned}
\hat{K}_{11} &= \int_{\Omega^e} \gamma_e \frac{\partial N_x}{\partial x} \frac{\partial N_x}{\partial x} d\Omega, & \hat{K}_{12} &= \int_{\Omega^e} \gamma_e \frac{\partial N_x}{\partial x} \frac{\partial N_y}{\partial y} d\Omega \\
\hat{K}_{21} &= \int_{\Omega^e} \gamma_e \frac{\partial N_y}{\partial y} \frac{\partial N_x}{\partial x} d\Omega, & \hat{K}_{22} &= \int_{\Omega^e} \gamma_e \frac{\partial N_y}{\partial y} \frac{\partial N_y}{\partial y} d\Omega
\end{aligned}$$

여기서  $\gamma_e$ 는 매개변수이다.

압력항에 대해서는 아래의 식(6)과 같이 쓸 수 있다.

$$P = -\gamma_e M_p^{-1} Q^T u \quad (6)$$

여기서  $Q_i = \int_{\Omega^e} \frac{\partial N_x}{\partial x_i} M_y d\Omega$  그리고  $M_p = \int_{\Omega^e} M_x M_y d\Omega$ 이다.

### 3. 모형의 검증 및 적용

본 연구에서 개발한 수치모형을 검증하기 위하여 그림 1과 같은 수치모형실험장치를 이용하여 교각 주위의 유속분포를 측정하였으며, 측정지점은 그림2와 같다. 사용된 교각모형은 직경이 60mm인 원통형 관을 사용하였으며 교각을 중심으로 흐름방향과 흐름의 연직방향을 따라 30cm 간격으로 측정하였다. 유속은 3차원 ADV(Acoustic Doppler Velocimeter) 유속계를 이용하였으며, 총368개 지점에서 유속이 측정되었다(그림 3).

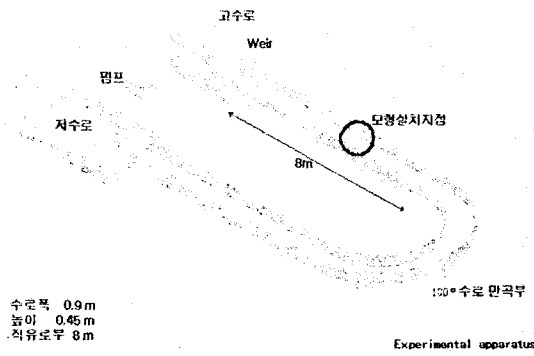


그림 1. 수리모형 실험장치

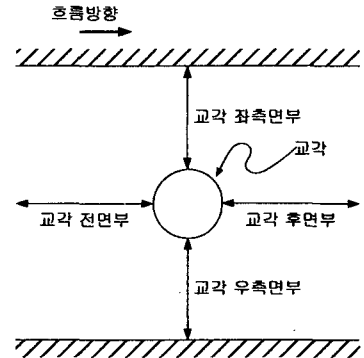


그림 2. 유속측정지점

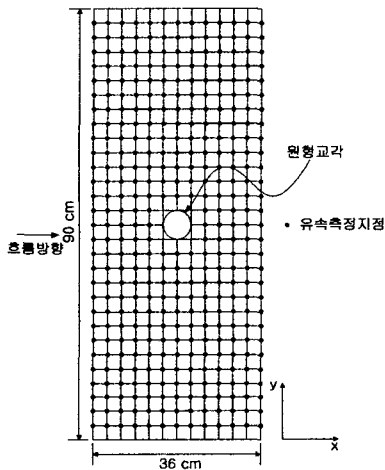


그림 3. 유속측정을 위한 격자망

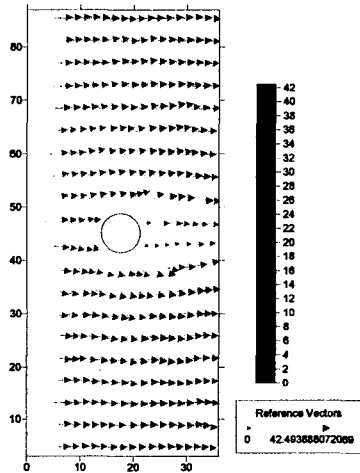


그림 4. 수리모형실험의 결과(유속분포, cm/sec)

본 모형에서 상류이송문제를 해결하기 위하여 사용된 감쇠항의 매개변수에 따른 유속의 변화 양상을 살펴보았다. 감쇠항의 값은  $1.0 \sim 10^{10}$ 까지 증가시켰으며, 계산된 유속분포를 수리모형실험으로부터 측정된 교각의 우측면부에서의 유속분포와 비교하였다(그림 2).

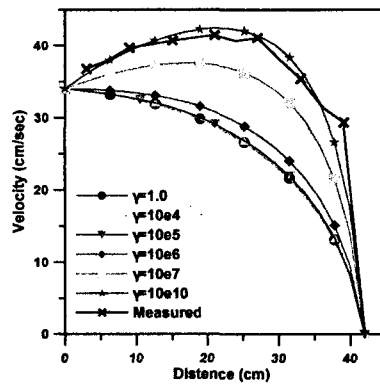


그림 5. 감쇠항의 매개변수에 따른 유속분포의 계산값과 실측값과 비교

그림 5에서 볼 수 있듯이 매개변수  $\gamma_e$  값이 증가함에 따라 측정된 유속분포에 점차적으로 접근해 감을 알 수 있으며, 본 연구에서는  $\gamma_e = 10^{10}$  일 때 측정값과 가장 잘 일치하였다. 따라서 이후에 소개된 본 모형을 통한 수치모의는  $\gamma_e$  값을  $10^{10}$  으로 고정시키면서 수행되었다.

수리모형실험으로부터 측정된 교각 주위의 유속분포의 결과와 비교하기 위해 수행된 본 모형을 이용한 모의실험에서 유입부 경계에 유량이 30 l/sec에 해당되는 34.0cm/sec의 유속값이 적용되었다. 본 모의실험에 사용된 유한요소망과 그림 2의 4지점에서의 계산된 유속분포에 대한 결과가 각각 그림 6과 7에 나타나 있다. 사용된 요소는 9절점 isoparametric 사각형 요소이며, 총 절점수와 요소수는 각각 2520개와 600개이다(그림 6).

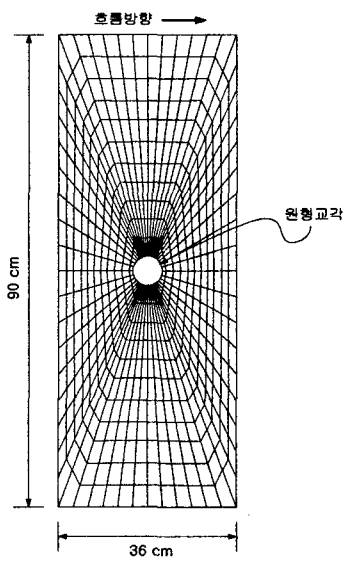


그림 6. 유한요소망

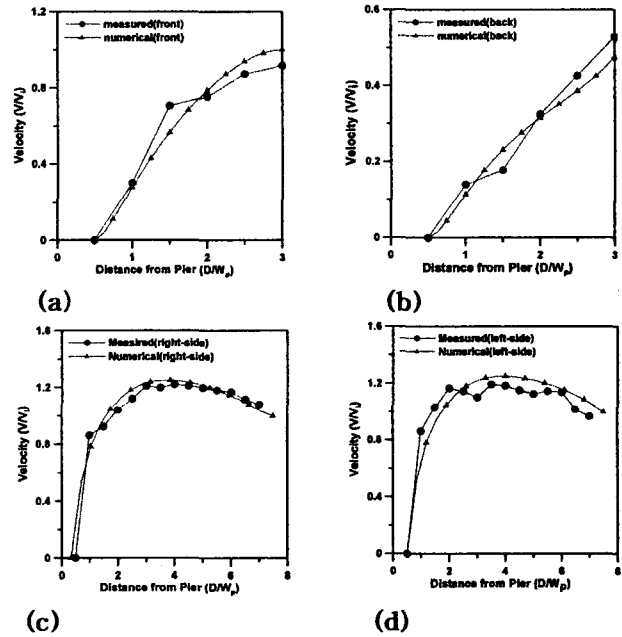
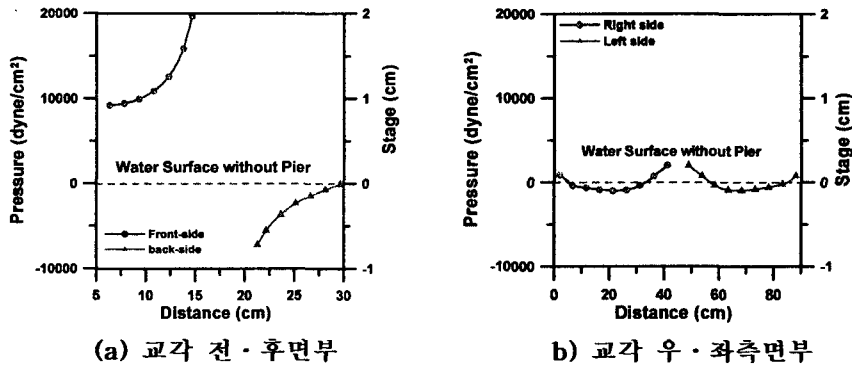


그림 7. 교각 전면(a), 좌우측면(c,d), 후면부(b)에서의 실측값과 계산값의 비교

계산된 압력은 그림 8과 같다. 압력을 수위로 치환하였을 때 정류상태의 수면을 기준으로 교각 전면부에서는 약 2cm의 상승 그리고 후면부에서는 약 0.8cm의 하강이 발생하였다. 이는 실제 측정된 값과 거의 일치하는 것이다.



(a) 교각 전·후면부

(b) 교각 우·좌측면부

그림 8. 교각주위의 압력(또는 수위)

본 모형을 원형, 직사각형, 트랙형 교각에 적용시켰으며, 세 경우 모두 흐름방향으로 100cm 그리고 흐름의 연직방향으로 90cm 크기의 영역을 사용하였으며, 총 절점수와 요소는 각각 2520개와 600개이다. 그림 9-16은 원형, 직사각형 그리고 트랙형 교각에 대해 계산된 유속분포와 압력분포를 나타낸 것이다.

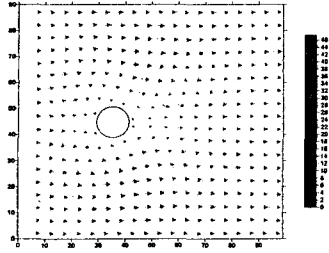


그림 9. 원형 교각의 유속분포(cm/sec)

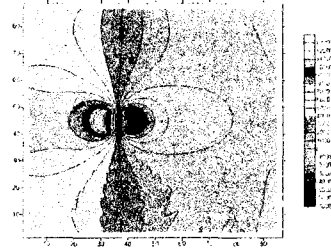


그림 10. 원형 교각의 압력분포(dyne/cm<sup>2</sup>)

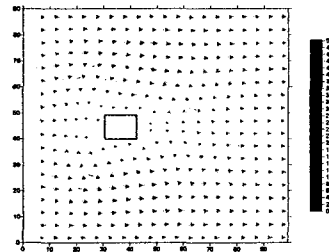


그림 11. 직사각형 교각의 유속분포(cm/sec)

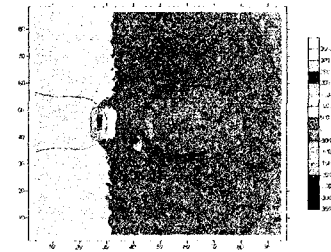


그림 12. 직사각형 교각의 압력분포(dyne/cm<sup>2</sup>)

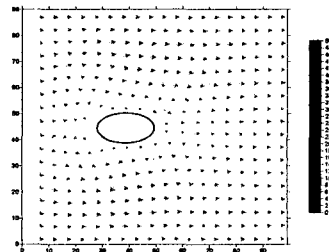


그림 13. 트랙형 교각의 유속분포(cm/sec)

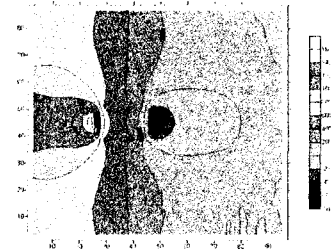
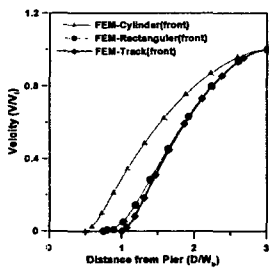
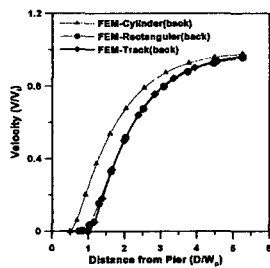


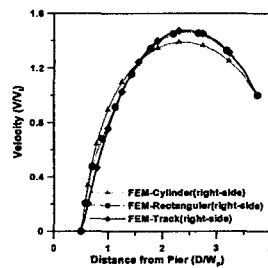
그림 14. 트랙형 교각의 압력분포(dyne/cm<sup>2</sup>)



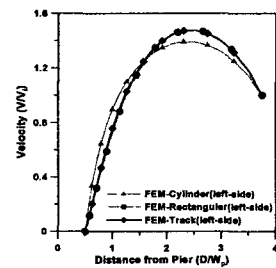
(a) 교각 전면부



(b) 교각 후면부



(c) 교각 우측면부



(d) 교각 좌측면부

그림 15. 세 가지 교각 형상에 대한 유속분포

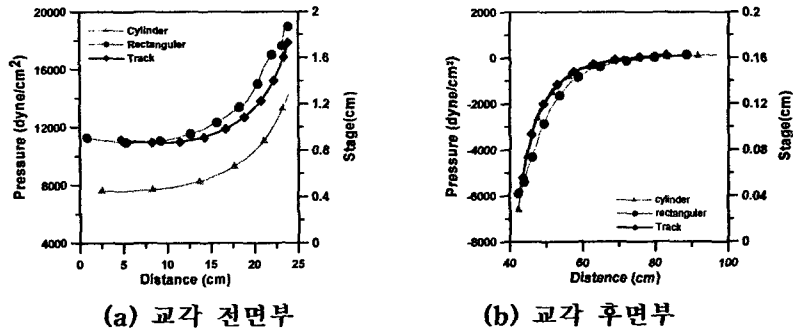


그림 16. 세 가지 교각 형상의 압력분포

#### 4. 결론

교각 주위의 흐름특성을 분석하기 위해 2차원 Navier-Stokes 방정식에 상류이송문제를 해결하기 위한 감쇠항이 포함된 유한요소법을 적용한 수치모형을 개발하였으며, 이를 다양한 기하학적 형상의 교각에 대한 수치모의실험으로부터 다음과 같은 결론은 얻었다.

1. 본 수치모형의 적용성을 검토하기 위하여 수리모형실험에서 측정된 교각 전·후, 좌·우 측면부의 유속값과 비교하였다. 비교 결과 본 모형으로부터 계산된 유속분포는 수리모형실험을 통해 측정된 유속분포와 거의 유사한 경향을 보였다.
2. 본 연구에서 개발한 수치모형을 사각형, 트랙형 그리고 원형교각에 대하여 적용시킨 결과, 세 경우 모두 유사한 유속분포를 나타냈으며, 전면부에서는 유속이 교각에 접근함에 따라 급속히 감소한 경향을 나타낸 반면, 후면부에서의 유속은 직사각형과 트랙형의 경우 교각 폭의 약 2.4배되는 지점까지, 원형교각은 교각 직경의 약 2.2배 되는 지점까지 급속히 증가하였다가 그 이후부터 완만하게 증가하면서 유입부 경계에 적용된 유속값에 도달함을 알 수 있었다.
3. 직사각형, 원형 그리고 트랙형 교각의 전·후면부에서 계산된 압력분포를 분석한 결과, 전면부의 경우, 유속에 대한 결과와는 반대로 원형 교각에서의 압력이 다른 두 교각의 경우에 비해 작았다. 또한 후면부에서의 압력은 세 경우 모두 교각으로부터 3배의 폭에 해당되는 거리까지 급격히 증가하였다가 일정한 값에 접근하는 경향을 나타내었다.

#### 5. 참고문헌

- 한건연, 이종태, 김홍태 (1993), “하천에서의 동수역학적 유동해석을 위한 유한요소모형 개발”, 한국수문학회지, 제26권, 제3호, pp. 87-101.
- 한건연, 이재영, 최성렬, 정동원 (2001), “지표면 홍수류 해석을 위한 유한요소모형의 개발”, 한국수자원학회 학술발표회 논문집(II), pp. 955-960.
- Samuels, P. G. (1985), “Modeling of river and floodplain flow using the finite element method”, Hydraulic Research Ltd., Research Report No. SR 61, Wallingford, UK, pp. 1-198.
- Reddy, J. N., Gartling, D. K. (2000), “The Finite Element Method in Heat Transfer and Fluid Dynamics, 2nd edition”, CRC press LCC, pp. 1-469.