

# 사면에서 발달하는 이차원 하층밀도류의 수치모의

## Numerical Simulation of 2-D Dense Underflows Spreading on a Sloped Surface

최성욱<sup>1)</sup>, 강형식<sup>2)</sup>

### 1. 서론

주변수역에 비하여 밀도가 더 큰 하층밀도류는 중력에 의하여 경사진 방향으로 진행한다. 협곡을 지나 해저평원에 도달한 하층밀도류는 양측의 수로에 제한을 받지 않기 때문에 주흐름방향인 종방향 뿐만 아니라 횡방향으로도 자유롭게 흐른다. 이때 횡방향 흐름 및 물 유입은 선단부 유속에 영향을 주어 밀도류의 종방향 도달거리를 감소시킬 수 있다.

밀도류의 수치모형화 기법은 크게 수직모형과 적분모형으로 구분할 수 있다. 수직모형은 밀도류의 속도 및 농도의 미시적인 구조를 자세히 살펴볼 수 있으나 실제 문제에 적용하기에 어렵다는 단점이 있다. 또한 통상적인 수리학 분야에서 많이 쓰이는 적분모형은 실제 스케일에서의 밀도류 거동을 예측할 수 있다. 밀도류의 층적분 모형에 관한 연구로는 Alavian (1986), Parker 등 (1987), Choi와 Garcia (1995), 그리고 Imran 등 (1998)을 들 수 있다. 또한 Altinakar 등 (1990), Garcia (1993), Choi와 Garcia (2001), 그리고 Imran 등 (2002)은 실험을 통하여 하층밀도류를 관측한 바 있다.

본 연구의 목적은 사면에서 2차원적으로 발달하는 하층밀도류를 수치모의 하는 것이다. 이를 위하여 경계층 좌표계에서 Navier-Stokes 방정식을 수심방향으로 적분한 층적분모형의 지배방정식을 구성하였으며, 지배방정식의 수치모의를 위하여 Beam과 Warming 기법을 이용하였다. 먼저 1차원적으로 진행되는 하층밀도류를 수치모의 하여 Choi와 Garcia (1995)의 유한요소법에 의한 결과와 비교하였다. 또한 사면에서 양 방향으로 진행되는 하층밀도류의 두께, 유속, 그리고 밀도비를 계산하였으며, 기존의 실험을 통해 제시된 밀도류의 선단부 유속 및 최대 반폭 산정식과 비교하였다.

### 2. 지배방정식

사면에서 발달하는 하층밀도류에 관한 수치모형을 구축하기 위하여 2차원 층적분 모형을 이용하였다. 층적분 모형의 지배방정식은 연속방정식과  $x$ -와  $y$ -방향으로의 운동량 방정식, 그리고 부유사 보존방정식으로 구성된다. 지배방정식을 행렬의 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + S = 0 \quad (1)$$

<sup>1)</sup> 연세대학교 공과대학 사회환경시스템공학부 부교수 (E-mail: schoi@yonsei.ac.kr)

<sup>2)</sup> 연세대학교 대학원 토목공학과 박사과정 (E-mail: kanghs@yonsei.ac.kr)

$$U = \begin{bmatrix} h \\ uh \\ vh \\ \Delta h \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} uh \\ u^2h + \frac{1}{2}\Delta gh^2 \\ uvh \\ u\Delta h \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} vh \\ uvh \\ v^2h + \frac{1}{2}\Delta gh^2 \\ v\Delta h \end{bmatrix}, S = \begin{bmatrix} -e_w(u^2 + v^2)^{0.5} \\ -\Delta ghS_o + C_f u(u^2 + v^2)^{0.5} \\ C_f v(u^2 + v^2)^{0.5} \\ D - \varepsilon \end{bmatrix} \quad (2a,b,c,d)$$

여기서  $h$ 는 밀도류 두께,  $u$ 와  $v$ 는 각각  $x$ -와  $y$ -방향으로의 적분유속,  $\Delta$ 는 밀도비 (fractional density),  $S_o$ 는 하상경사,  $C_f$ 는 하상의 흐름저항계수,  $e_w$ 는 물유입 계수, 그리고  $D$ 와  $\varepsilon$ 은 각각 퇴적물과 침식물이다. 본 연구에서는 퇴적물과 침식물을 영으로 함으로써 부력흐름틀이 보존되는 보존성 밀도류 (conservative current)를 수치모의하였다. 또한 식 (2)에서 물유입 계수는 다음과 같이 Parker 등 (1986)이 제시한 식을 이용하였다.

$$e_w = \frac{0.075}{(1 + 718 Ri^{2.4})^{0.5}} \quad (3)$$

여기서  $Ri$ 는 Richardson 수 ( $= \Delta gh \cos \theta / [u^2 + v^2]$ )이다.

본 연구에서는 지배방정식을 수치모의하기 위하여 Beam과 Warming의 방법을 이용하였다. Beam과 Warming의 방법은 음해적으로 해를 구하는 방법으로서 시간이 진행함에 따라 반복 계산할 필요가 없는 장점이 있다. 또한 Beam과 Warming의 방법은 기존의 많은 연구에 적용된 바 있다. 특히 Fennema와 Chaudhry (1989)는 2차원의 댐 파괴 흐름에 적용하였으며, Imran 등 (1998)은 부유사 밀도류에 의한 해저 하상의 변화를 수치모의 하였다. 지배방정식을 Beam과 Warming의 기법을 이용하여 수치모의하기 위한 차분식은 다음과 같이 구성된다.

$$\left[ I + \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{\theta}{1 + \xi} (A_{i,j} - A_{i-1,j}) \right]^k \Delta_t U_{i,j}^* = - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{1}{1 + \xi} \left[ A_{i,j} (U_{i,j} - U_{i-1,j}) \right]^k - \frac{\Delta t}{\Delta y} \frac{1}{1 + \xi} \left[ B_{i,j} (U_{i,j} - U_{i,j-1}) \right]^k - \Delta t \frac{1}{1 + \xi} S_{i,j}^k + \frac{\xi}{1 + \xi} \Delta t U_{i,j}^k \quad (4)$$

$$\left\{ I + \Delta t \frac{\theta}{1 + \xi} \left[ \frac{1}{\Delta y} (B_{i,j} - B_{i,j-1}) + Q_{i,j} \right] \right\}^k \Delta_t U_{i,j}^{k+1} = \Delta_t U_{i,j}^* \quad (5)$$

$$U_{i,j}^{k+1} = U_{i,j}^k + \Delta_t U_{i,j}^{k+1} \quad (6)$$

여기서  $I$ 는 단위 행렬,  $A$ ,  $B$ 와  $Q$ 는 각각  $E$ ,  $F$ 와  $S$ 의 Jacobian 행렬, 그리고  $\theta$ 와  $\xi$ 는 각각 가중계수로서 Crank-Nicolson 기법의 경우  $\theta = 0.5$ 와  $\xi = 0$ 이다.

### 3. 수치모형의 적용

본 연구에서는 사면에서 양방향으로 발달하는 하층밀도류를 모의하기에 앞서 양측 수로에 제한을 받아 일차원적으로 진행되는 밀도류를 수치모의 하였다. 이를 위하여 Altinakar 등 (1990)의 SALTH6003 실험조건을 이용하였다. 유입부 조건으로는 밀도류 두께 ( $h_0$ ) 0.04 m, 적분유속 ( $u_0$ ) 0.135 m/s, 밀도비 ( $\Delta_o$ ) 0.0102, 하상경사 ( $S_o$ ) 0.03 ( $\theta \approx 1.7^\circ$ )이다. 이에 따른 Richardson 수 ( $Ri_o$ )와 레이놀즈 수 ( $Re_o$ )는 각각 0.22와 4200로서 흐름은 사류이며, 충분히 난류 상태임을 알 수 있다.

그림 1(a)-(c)는 시간에 따른 사면에서 발달하는 하층밀도류의 두께, 적분유속, 그리고 밀도비의 변화를 나타낸다. 수치모의 결과의 비교를 위하여 Choi와 Garcia (1995)의 유한요소법에 의한 계산결과를 이용하였다.

계산에 사용된 하상의 흐름저항계수는 Choi와 Garcia (1995)와 동일하게  $C_f = 0.01$ 을 사용하였다. 또한 하류단 부분에 수치적으로 건조하상 (dry bed) 조건을 부여하기 위하여 하류단에서의 흐름두께, 적분유속, 그리고 밀도비는 각각  $0.1h_0$ ,  $0.2u_0$  와  $0.2\Delta_0$ 를 부여하였다. 그림 1을 살펴보면 Beam과 Warming 기법에 의한 결과와 Choi와 Garcia (1995)에 의한 계산결과가 매우 잘 일치하는 것을 확인할 수 있다. 그러나 선단부에서의 흐름두께와 적분유속을 살펴보면 Beam과 Warming 기법에 의한 계산결과가 유한요소법 보다 흐름두께가 더 크고, 적분유속은 더 작은 것을 볼 수 있다. 이는 Beam과 Warming 기법 자체가 완전한 보존성의 형태로 해를 구하지 못하기 때문이다 (Fennema와 Chaudhry, 1987).

그림 2는 사면에서 발달하는 밀도류의 시간에 따른 선단부 유속의 변화를 나타낸다. 그림에서 실선은 수치모의에 의한 결과이고, 점선은 Altinakar 등 (1990)의 실험결과로서 밀도류가 거의 정상상태로 진행할 때 측정된 선단부 유속을 나타낸다. 그림 2를 살펴보면 실험에 의한 선단부 유속은 약 0.1 m/s로서 수치모의에 의한 계산결과가 실험결과 매우 잘 일치하는 것을 볼 수 있다. 그림 3은 하류단에 부여한 건조하상 조건의 민감도를 나타낸다. 하류단에서의 밀도류 두께  $0.1h_0$ 에 대하여  $u/u_0$ 와  $\Delta/\Delta_0$ 의 값이 0.05-0.2일 때 계산된 선단부 유속을 비교하였다. 그림 3을 살펴보면  $u/u_0$ 와  $\Delta/\Delta_0$ 의 값이 증가할수록 선단부 유속이 증가하며, 점차 수렴해가는 것을 볼 수 있다.

사면에서 발달하는 하층밀도류의 2차원 흐름을 수치모의 하기 위하여 Choi (1996)의 DEN04 실험조건을 이용하였다. 수치모의에 사용된 유입부 조건으로는 밀도류 두께 0.03 m, 적분유속 0.167 m/s, 밀도비 0.005, 하상경사  $5^\circ$ 이며, 이에 대한 Richardson 수와 레이놀즈 수는 각각 약 0.053과 4000이다. 그림 4는 사면에서 2차원적으로 발달하는 하층밀도류의 두께를 나타낸다. 그림 4를 살펴보면 하층밀도류 두께는 시간에 따라 점차 증가하며, 종방향 뿐만 아니라 횡방향으로 흐름이 진행되어 타원형의 형상을 나타내고 있다. 그림 4와 같은 하층밀도류의 형태는 Imran 등 (1998)의 결과와 유사하다. 그림 5는 시간에 따른 하층밀도류의 밀도비 분포를 나타낸다. 그림 5를 살펴보면 밀도류가 사면을 따라 진행하면서 흐름방향 및 횡방향으로 동일한 밀도층이 확대되는 것을 볼 수 있다. 그림 6은 시간에 따라 사면에서 발달하는 하층밀도류의 유속벡터를 나타낸다. 유속벡터도를 살펴보면 밀도류가 사면을 따라서 양방향으로 발달되는 것을 알 수 있다.

Choi와 Garcia (2001)는 사면에서 발달하는 밀도류의 시간에 따른 선단부 유속과 최대 반폭에 대해 다음과 같은 식을 제시하였다.

$$u_f = c \left( \frac{B_{f0}}{b} \right)^{1/3} \quad (7)$$

여기서  $u_f$ 는 선단부 유속,  $b$ 는 밀도류의 최대 폭,  $B_{f0}$ 는 부력흐름률, 그리고  $c$ 는 상수로서 Choi와 Garcia (1995)는 하상경사가  $5^\circ$  이상과 이하인 경우 각각 1.5와 1.0을 제시하였다. 또한 Choi와 Garcia (2001)는 다음과 같이 시간에 따른 밀도류의 최대 반폭 산정식을 제시하였다.

$$\frac{db_{1/2}}{dt} = \frac{l_p}{t_p} \frac{0.37}{1 + 0.022t/t_p} \quad (8)$$

여기서  $b_{1/2}$ 는 밀도류의 최대 반폭,  $l_p$ 는 특성길이, 그리고  $t_p$ 는 특성시간이다.

식 (7)-(8)과 같이 Choi와 Garcia (2001)가 제안한 밀도류의 선단부 유속 및 최대 반폭의 산정식과 수치해석을 통해 얻은 결과를 그림 7과 8에 도시하였다. 그림 7은 시간에 따른 밀도류 선단부의 유속을 나타낸다. 그림에서 실선과 점선은 각각 수치모의와 식 (7)을 이용하여 계산된 선단부 유속이고, 기호는 Choi

(1996)의 실험결과를 나타낸다. 그림 7을 살펴보면 수치모의에 의한 결과가 식 (7) 및 실험값과 매우 잘 일치하는 것을 볼 수 있다. 그러나 식 (7)에 의한 선단부 유속은 급격하게 평형속도에 도달하는 것을 알 수 있는데, 이것은 식 (7)이 부력류에 대해서 유도되었기 때문으로 판단된다. 그림 8은 수치모의와 식 (8)에 의한 밀도류의 최대 반폭을 나타낸다. 그림을 살펴보면 수치모의에 의한 최대 반폭이 계단 형식으로 나타나는데, 이는 횡방향으로의 격자 크기가 조밀하지 않기 때문이다. 그러나 수치모의와 식 (8)에 의해 계산된 결과가 비교적 잘 일치하는 것을 볼 수 있다.

#### 4. 결론

본 연구에서는 사면에서 시간에 따라 진행되는 2차원 하층밀도류를 수치모의 하였다. 이를 위하여 2차원 층적분모형의 지배방정식을 구성하고, 구성된 지배방정식을 수치모의 하기 위해 Beam과 Warming 기법을 이용하였다. 수치모의를 통해 얻은 결론은 다음과 같다.

1. 구성된 수치모형을 사면에서 1차원적으로 진행되는 하층밀도류에 적용하고, Choi와 Garcia (1995)의 유한요소법에 의한 계산결과 및 Altinakar 등 (1990)의 실험결과와 비교하였다. 그 결과 Beam과 Warming 기법과 유한요소법에 의한 계산결과가 매우 잘 일치하는 것으로 나타났으며, 수치모의에 의해 산정된 선단부 유속이 실험결과와 잘 일치하였다.
2. 사면에서 2차원적으로 발달하는 하층밀도류를 수치모의한 결과, 밀도류의 상층 경계면에서의 물유입에 의해 흐름두께는 시간에 따라 점차 증가하며, 종방향 뿐만 아니라 횡방향으로 흐름이 진행되는 것을 알 수 있었다. 또한 기존에 제시된 시간에 따른 선단부 유속 및 최대 반폭 산정식과 수치모의에 의한 계산결과를 비교한 결과 매우 잘 일치하는 것을 확인하였다

#### 감사의 글

본 연구는 교육부의 “두뇌한국 21 (Brain Korea 21)” 지원에 의해 수행되었으며 지원에 감사드립니다.

#### 참고문헌

- Alavian, V. (1986). "Behavior of density currents on an incline." *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, 112(1), 27-42.
- Altinakar, S., Graf, W.H., and Hopfinger, E.J. (1990). "Weakly depositing turbidity current on a small slope." *Journal of Hydraulic Research*, IAHR, 28, 55-80.
- Choi, S.-U. and Garcia, M.H. (1995). "Modeling of one-dimensional turbidity currents with a dissipative-Galerkin finite element method." *Journal of Hydraulic Research*, IAHR, 33(5), 623-648.
- Choi, S.-U. (1996). "Layer-averaged modeling of turbidity currents with a finite element method." Ph.D. thesis, Department of Civil Engineering, University of Illinois, Urbana, IL.
- Choi, S.-U. and Garcia, M.H. (2001). "Spreading of gravity plumes on an incline." *Coastal Engineering Journal*, 43(4), 221-237.
- Fennema, R.J. and Chaudhry, M.H. (1987). "Simulation of one-dimensional dam break flows." *Journal of Hydraulic Research*, IAHR, 25(1), 41-51.
- Fennema, R.J. and Chaudhry, M.H. (1989). "Implicit methods for two-dimensional unsteady free-surface flows." *Journal of*

*Hydraulic Research*, IAHR, 27(3), 321-332.

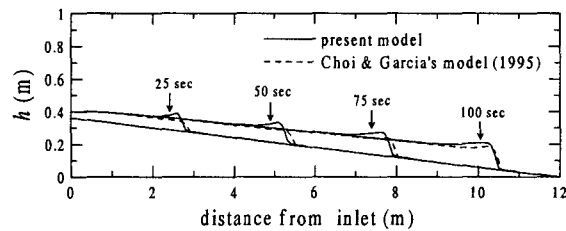
Garcia, M.H. (1993). "Hydraulic jumps in sediment-driven bottom current." *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, 119(10), 1094-1117.

Imran, J., Parker, G., and Katopodes, N.D. (1998). "A numerical model of channel inception on submarine fans." *Journal of Geophysical Research*, AGU, 103(C1), 1219-1238.

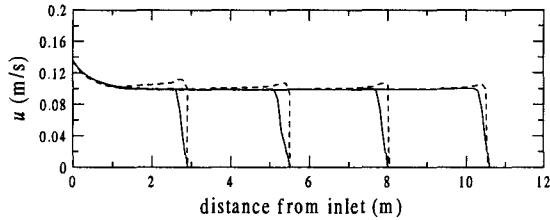
Imran, J., Parker, G., and Haref, P. (2002). "Experiments on incipient channelization of submarine fan." *Journal of Hydraulic Research*, IAHR, 40(1), 21-32.

Parker, G., Fukushima, Y., and Pantin, H.M. (1986). "Self-accelerating turbidity current." *Journal of Fluid Mechanics*, 171, 145-181.

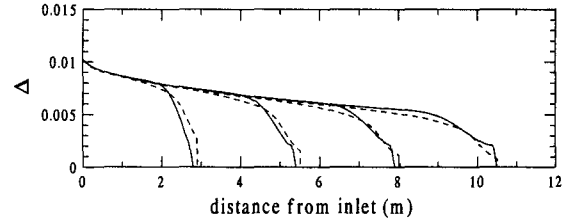
Parker, G., Garcia, M., Fukushima, Y., and Yu, W. (1987). "Experiments on turbidity currents over an erodible bed." *Journal of Hydraulic Research*, IAHR, 25, 123-147.



(a) 흐름두께



(b) 적분유속



(c) 밑도비

그림 1. 사면에서 발달하는 1차원 하층밀도류의 진행

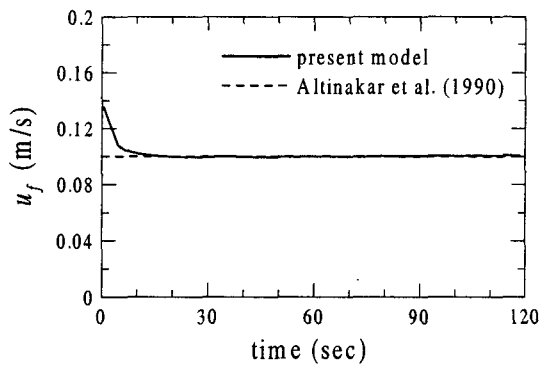


그림 2. 시간에 따른 선단부 유속의 변화

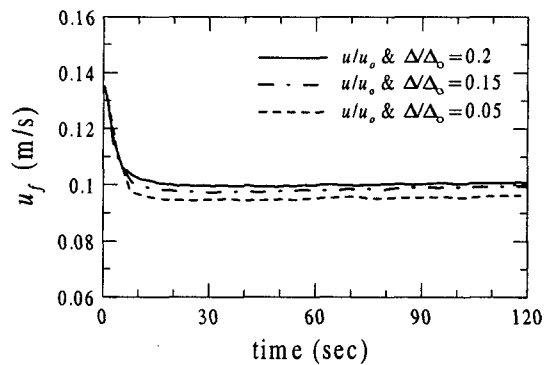
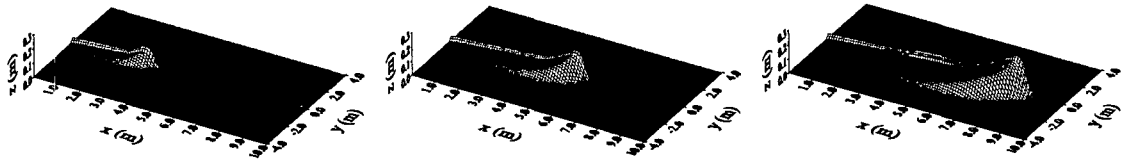


그림 3. 하류단 조건의 민감도

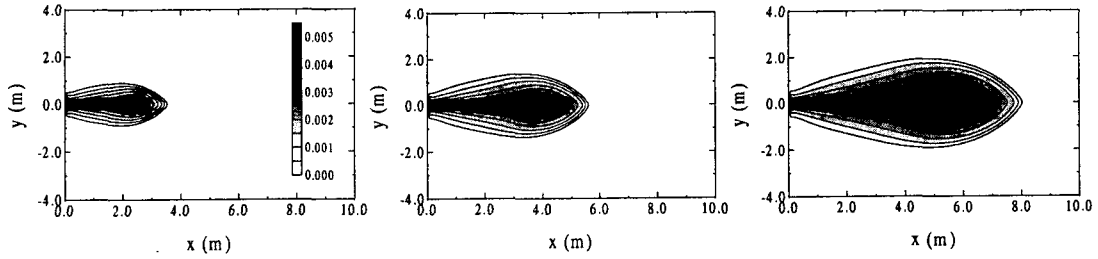


(a) 20초 후

(b) 30초 후

(c) 40초 후

그림 4. 사면에서 양방향으로 발달하는 하층밀도류의 진행

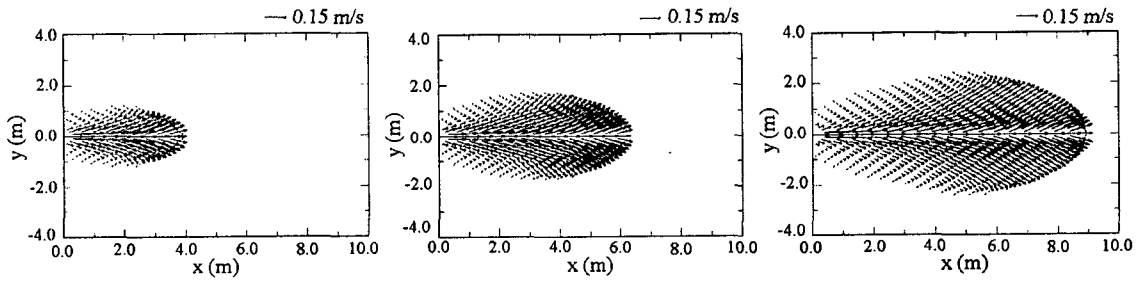


(a) 20초 후

(b) 30초 후

(c) 40초 후

그림 5. 하층밀도류의 밀도비



(a) 20초 후

(b) 30초 후

(c) 40초 후

그림 6. 하층밀도류의 유속 벡터도

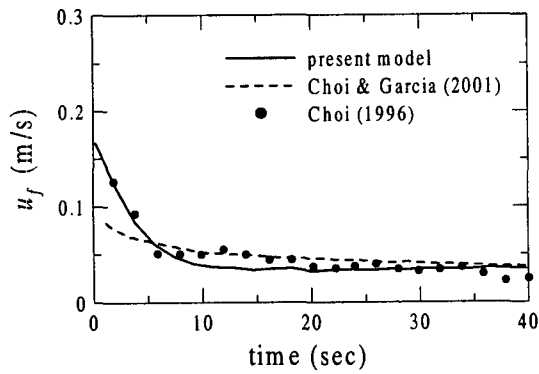


그림 7. 시간에 따른 선단부 유속의 변화

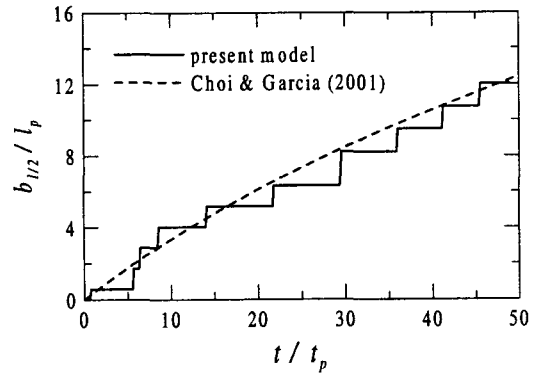


그림 8. 시간에 따른 최대 반폭의 변화