

# 시뮬레이티드 어닐링 알고리즘을 이용한 기어열의 최적 기어비 분할법 개발

배인호\*(한양대학교 대학원 기계설계학과), 정태형(한양대학교 기계공학부)

## A New Method to Find the Best Gear Ratio Using the Simulated Annealing Algorithm

Inho Bae\*(Graduate School, Hanyang Univ.), Tae Hyong Chong(Hanyang Univ.)

### Abstract

This paper reviews the existing methods to divide the gear ratios of a multi-stage gear train, and proposes a simulated annealing-based algorithm to find the best gear ratios. The existing methods have their own limitations to be used in practical design, and are also problematic to be automated in a design system. However, the proposed algorithm is a general one which can be applied to gear trains having any number of stages, and offers a satisfactory result in a very short time. It is expected to be useful as a design sub-module of the design system for multi-stage gear drives.

**Keywords:** Gear(기어), Gear Train(기어열), Gear Ratio(기어비), Simulated Annealing Algorithm(시뮬레이티드 어닐링 알고리즘)

### 1 서론

고속도비 기어장치인 경우에는 유성기어 감속기(planetary gear drive) 등과 같은 특수한 감속장치를 제외하면 다단으로 구성하는 것이 유리하다. 다단 기어열의 기어비 분할은 기어 장치의 설계 시 가장 문제가 되는 부분으로 다음 설계 단계인 제원 설계와 배치 설계에 직접적으로 영향을 미치는 중요한 설계 과정이 된다. 기어 본체의 구조와 크기 등에 따라 다르지만, 일반적으로 기어의 종류에 따라 한 단에서 사용할 수 있는 기어비의 한계가 제시되어 있다. 그러나, 이들은 다만 경험적으로 정립된 일반적인 지침에

불과하고, 기어비의 분할에 관한 실제적이고 구체적인 방법을 제공하는 것은 아니다. 더욱이 기어비는 각 기어의 제원 및 배치와도 직접적인 관련을 가지기 때문에 이를 적절히 분할하는 것은 상당히 어려운 문제이다.

본 논문에서는 기어열의 기어비를 분할하기 위한 기존의 방법론에 대해 그 장단점을 분석하고, 어떠한 단수를 가지는 다단 기어열에도 모두 적용할 수 있는 범용적인 기어비 분할법을 개발한다. 개발한 알고리즘은 시뮬레이티드 어닐링 알고리즘에 기반하고 있으며, 기어비 분할 예를 통해 그 유용성과 안정성을 검증한다.

### 2 기존의 기어비 분할법에 관한 고찰

현재까지 다단 기어열의 기어비 분할을 위한 몇 가지 특징적인 방법론이 제시되고 있는 바, 본 논문에서 제안한 기어비 분할 알고리즘과의 비교를 위해 이들에 대해 자세히 고찰한다.

#### 2.1 관성 모멘트 최소화에 의한 방법<sup>[4]</sup>

기어열을 포함한 서보 기구의 주파수 응답을 좋게 하기 위해 기어열의 관성 모멘트가 최소로 되도록 각 기어쌍의 기어비를 선정하는 경우가 있다. Fig. 1은 서보 기구에 많이 사용되는 대표적인 기어열이다. 여기서,  $J_m$  을 전동기 회전자의 관성 모멘트,  $J_1$  은 부하측의 관성 모멘트로 하고, 전동기 축에 대한서의 등가 관성 모멘트  $J_e$  를 구하면 식 (1)과 같다.

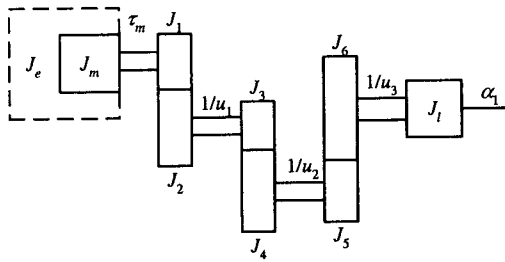


Fig. 1 Schematic diagram of a gear train

$$J_e = J_m + J_1 + \frac{1}{u_1^2}(J_2 + J_3) + \frac{1}{u_1^2 \cdot u_2^2}(J_4 + J_5) + \frac{1}{u_1^2 \cdot u_2^2 \cdot u_3^2}(J_6 + J_I) \quad (1)$$

피니언의 관성 모멘트를  $J_1 = J_3 = J_5 = \dots = J_0$ 로 하면, 기어의 두께가 일정할 경우의 관성 모멘트는 기어비의 4승에 비례하므로, 휠의 관성 모멘트를  $J_2 = u_1^4 \cdot J_0$ ,  $J_4 = u_2^4 \cdot J_0$ ,  $J_6 = u_3^4 \cdot J_0$ 로 할 수 있다. 또한, 식 (1)에서 2단 감속  $u_1$ ,  $u_2$  만을 고려하여  $J_m = J_I = 0$ 로 하고 기어열만의 등가 관성 모멘트를 구하면 식 (2)와 같다.

$$J_e = J_0 \left( 1 + u_1^2 + \frac{1}{u_1^2} + \frac{1}{u_2^2} + \frac{u_2^2}{u_1^4} \right) \quad (2)$$

전 기어비가 일정하다고 하고  $u_1$  을 변화시켜 최소 관성 모멘트를 얻기 위해 식 (2)를  $u_1$  으로 미분하여 0으로 놓으면(식 (3)), 식 (4)의 관계를 얻을 수 있다.

$$\frac{dJ_e}{du_1} = J_0 \left( 2u_1 - \frac{2}{u_1^3} - \frac{4u_1^2 \cdot u_2^2}{u_1^5} \right) = 0 \quad (3)$$

$$u_2 = \sqrt{\frac{u_1^4 - 1}{2}} \approx \frac{u_1^2}{\sqrt{2}} \quad (u_1 \gg 1) \quad (4)$$

마찬가지로 2단 이상의 기어열에 대해 각 단의 기어비를 정리하면 식 (5)와 같다.

$$u_1 = u_1 \quad (5-1)$$

$$u_2 = \frac{u_1^2}{\sqrt{2}} \quad (5-2)$$

$$u_3 = \frac{u_2^2}{\sqrt{2}} = \frac{u_1^4}{2\sqrt{2}} \quad (5-3)$$

$$u_4 = \frac{u_3^2}{\sqrt{2}} = \frac{u_1^8}{2^2 \cdot 2\sqrt{2}} \quad (5-4)$$

$$u_n = \frac{(u_1)^{2^{n-1}}}{(\sqrt{2})^{(2^{n-1}-1)}} \quad (5-5)$$

여기서, 전 기어비  $u = u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n$  이므로 식 (6)을 구할 수 있다.

$$u = (\sqrt{2})^n \left( \frac{u_1}{\sqrt{2}} \right)^{2^{n-1}} \quad (6)$$

따라서, 식 (5)와 (6)에서 전 기어비  $u$  와 단수  $n$  을 주어, 각 단의 기어비를 구할 수 있다.

그러나, 이상과 같은 방법은 정밀 서보 기구의 설계에 한정된 목적으로만 사용할 수 있는 것으로, 1단의 기어비를 크게 하고, 마지막 단의 기어비를 작게 하는 일반적인 다단 기어열의 기어비 분할 방법과는 배치되는 경향을 나타낸다. 예를 들어, 전 기어비  $u = 50$ , 단수  $n = 3$  인 다단 기어열에 대해 이상의 방법으로 계산한 기어비는 각각  $u_1 = 2.1317$ ,  $u_2 = 3.2131$ ,  $u_3 = 7.3001$  로서, 이와 같은 경향을 명백히 알 수 있다. 따라서, 일반적인 다단 기어열의 기어비 분할을 수행할 수 있는 보다 확장된 방법이 필요하다.

## 2.2 Niemann에 의한 방법<sup>[6]</sup>

Niemann은 기어비 분할을 위해 기어장치의 전달동력 및 부피로부터 관계 수식을 유도하고, 이로부터 2단 및 3단 기어 전동장치의 기어비 분할에 관한 선도를 작성하여 지침으로 하도록 하고 있다.

각 단의 기어비를 각각  $u_1, u_2, \dots$ , 축간 거리를  $a_1, a_2, \dots$ , 치폭을  $b_1, b_2, \dots$ , 피니언의 회전수를  $n_1, n_2, \dots$ , 접촉 응력을  $\sigma_{H1}, \sigma_{H2}, \dots$  라고 하면, 피니언의 회전수  $n_1 = u_1 n_2 = \dots$  이므로 최적해를 위해 다음 두 가지 조건을 적용한다.

(조건 1) 각 감속단에서의 전달 동력이 같다.

각 감속단에서의 전달 동력이 같다고 하고 정리하면 식 (7)을 구할 수 있다.

$$P = P_1 = P_2 = \dots \sim$$

$$\sigma_{H1}^2 \frac{u_1}{(u_1+1)^3} n_1 b_1 a_1^2 = \sigma_{H2}^2 \frac{u_2}{(u_2+1)^3} n_2 b_2 a_2^2 = \dots \quad (7)$$

여기서, 전달 동력  $P = \text{const.} \cdot W_i d_p n$ , 접촉 응력

$$\sigma_H = \text{const.} \cdot \sqrt{\frac{W_i}{b \cdot d_p} \left( \frac{u+1}{u} \right)}, \text{ 피니언의 피치원 지름}$$

$$d_p = 2a/(u+1) \text{이다.}$$

식 (7)의 관계로부터 2단 감속인 경우의 기어비 배분은 식 (8)과 같이 구할 수 있다.

$$u_1 = \frac{u - (u f_{12})^{1/3}}{(u f_{12})^{1/3} - 1} \quad (8)$$

여기서,  $f_{12} = \left( \frac{\sigma_{H2}}{\sigma_{H1}} \right)^2 \frac{b_2}{b_1} \left( \frac{a_2}{a_1} \right)^2$ 이다.

3단 감속의 기어비에 대해서도 마찬가지로 방 식으로 식 (9)와 같이 정리할 수 있으나, 결과가 양함수적으로 표현되지 않으므로 수치해석적 방법을 통해 구하여야 한다. 즉, 식 (9)에서  $u_1^*$ 을 선택하여  $u_2^*$ 를 계산한 후,  $u_1^{**}$ 을 가지고 수렴할 때까지 계산을 되풀이하여 추산한다.

$$u_2^* = \frac{\frac{u}{u_1^*} - \left( f_{23} \frac{u}{u_1^*} \right)^{1/3}}{\left( f_{23} \frac{u}{u_1^*} \right)^{1/3} - 1} \quad (9-1)$$

$$u_1^{**} = \frac{u_1^* u_2^* - \left( f_{12} u_1^* u_2^* \right)^{1/3}}{\left( f_{12} u_1^* u_2^* \right)^{1/3} - 1} \quad (9-2)$$

여기서,  $f_{23} = \left( \frac{\sigma_{H3}}{\sigma_{H2}} \right)^2 \frac{b_3}{b_2} \left( \frac{a_3}{a_2} \right)^2$ 이다.

(조건 2) 기어의 전 체적이 최소가 된다.

$$\text{각 단의 기어쌍의 부피는 } V = \frac{\pi}{4} (d_p^2 + d_g^2) b,$$

기어비는  $u = d_g/d_p$  이므로 기어가 점유한 전 체 적은 식 (10)으로 표현할 수 있다.

$$V = V_1 + V_2 + \dots$$

$$= b_1 a_1^2 \frac{u_1^2 + 1}{(u_1 + 1)^2} + b_2 a_2^2 \frac{u_2^2 + 1}{(u_2 + 1)^2} + \dots \quad (10)$$

따라서, 식 (10)이 최소로 되는 때가 기어비 분할이 가장 적절한 상태로 된다고 볼 수 있으므로, 2단 감속인 경우 식 (11)이 성립하고, 이를 정리하면 식 (12)와 같다.

$$\frac{d}{du_1} \left\{ b_1 a_1^2 \frac{u_1^2 + 1}{(u_1 + 1)^2} + b_2 a_2^2 \frac{u_2^2 + 1}{(u_2 + 1)^2} \right\} = 0 \quad (11)$$

$$u_1 \approx 0.8 \left( u \frac{\sigma_{H1}}{\sigma_{H2}} \right)^{2/3} \quad (12)$$

마찬가지로, 3단 감속에 대한 기어비는 식 (13)과 같이 표현할 수 있다.

$$u_1 \approx 0.6 u^{4/7} \left( \frac{\sigma_{H1}}{\sigma_{H2}} \right)^{2/7} \left( \frac{\sigma_{H1}}{\sigma_{H3}} \right)^{4/7} \quad (13-1)$$

$$u_2 \approx 1.1 u^{2/7} \left( \frac{\sigma_{H2}}{\sigma_{H1}} \right)^{4/7} \left( \frac{\sigma_{H2}}{\sigma_{H3}} \right)^{2/7} \quad (13-2)$$

Niemann은 이상의 식과 재료 등에 관한 경험적인 조건을 부가하여 작성한 2단 및 3단 기어 전동장치의 기어비 분할에 관한 선도를 Fig. 2와 같이 제공하고 있다. 즉, Fig. 2에서 굵은 실선은 최소 체적 조건과  $\sigma_{H1} = \sigma_{H2} = \sigma_{H3}$ 을 적용한 경우이며, 얇은 실선은 동일 전달동력 조건과  $a_1 = a_2 = a_3$ ,  $b_2 = 2b_1$ ,  $b_3 = 2b_2$ ,  $\sigma_{H2} = u_1^{1/3} \sigma_{H1}$ ,  $\sigma_{H3} = u_2^{1/3} \sigma_{H2}$ 을 적용한 경우이다. Niemann은 이 두 실선을 한계치로 하여 각 실선 사이의 영역에 속하는 기어비를 사용할 것을 추천하고 있다.

그러나, 이 선도가 기어비에 관한 특정한 설계값을 제공하는 것은 아니며, 더욱이 사용 가능한 기어비의 범위가 상당히 크기 때문에 설계에 실질적인 도움을 주기 어렵다. 또한, 이상의 수식은 2단 및 3단 기어열에 국한되어 있기 때문에

실제로 기어비 설정이 어려운 문제로 대두되는 4 단 이상의 기어열에 대해서는 적용이 불가능하다.

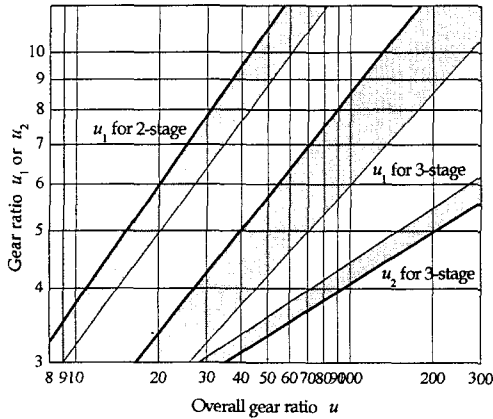


Fig. 2 Ranges of  $u$  for 2- and 3-stage gearing

### 2.3 연분수를 이용한 방법<sup>[6]</sup>

연분수(continued fraction)를 이용한 기어비 결정 방법은 연분수의 성질을 이용해 주어진 기어비에 가장 근사한 값을 얻기 위한 체계적인 방법이다. 연분수는 식 (14)와 같이 분모에 다른 분모를 계속해서 부가해 가는 것이다. 주어진 수가 소수라면 상분수(common fraction)로 변환하여 처리한다.

$$\frac{1423}{3123} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5}}}}}} \quad (14)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{5}$$

임의의 값을 기어비의 집합으로 표현하는 것은 그 값을 유리분수(rational fraction)로 치환하는 것과 같다. 이 유리분수의 분자는 피니언의 잇수의 곱이고, 분모는 휠의 잇수의 곱이다. 보통 한 기어열에 몇 개의 기어가 있어야 하는지, 그리고 한 기어에 몇 개의 잇수가 있어야 하는지에 대한 제한이 있다. 이것은 그 유리분수의 분자

또는 분모가 가질 수 있는 최대값을 제한한다. 원하는 값에 가장 가까우면서 동시에 분자와 분모의 크기 기준에 위배되지 않는 유리분수가 원하는 기어비가 된다. 일반적으로, 이 기어비는 적절한 크기의 숫자로 인수 분해할 수 없다. 따라서, 두 번째, 세 번째, 등의 유리분수에 대해 적절히 인수 분해할 수 있는지 살펴보아야 한다. 첫 번째 분수가 사용할 수 있는 인수로 인수 분해할 수 있다면, 이 분수가 주어진 제한에 관해서 원하는 숫자에 가장 근사한 값으로 만들어질 수 있는 것이다.

원하는 값은 연분수로 확장한 후, 그 연분수의 일련의 부분합(convergent)을 계산하여 그 부분합의 분자 또는 분모가 사용 가능한 최대값을 넘을 때까지 계속한다. 이를 기어열에 적용하기 위해서는 분수의 분자와 분모에 적절한 인자를 곱하여 사용할 수 있는 크기의 수로 변환한다.

연분수를 이용한 기어비 분할 방식은 순수한 대수적 방법에 따라 엄밀한 수학적 검증 하에 개발된 것이지만, 실제로 사용하기 위해서는 많은 수작업을 거쳐야 한다. 즉, 실제 사용되는 기어의 잇수를 얻기 위해서는 각 부분합을 적절히 조합한다거나, 적절한 인수를 곱해주어야 하며, 이는 수작업에 의존할 수 밖에 없다는 단점을 가진다.

## 3 SA를 이용한 최적 기어비 분할법의 개발

### 3.1 기어비 분할 알고리즘

기어열의 기어비를 분할하기 위해 본 논문에서 제시한 방법은 시뮬레이티드 어닐링 알고리즘(Simulated Annealing algorithm)에 기반한 기어비 분할 알고리즘이다. 개발한 알고리즘은 정수 변수(integer variable)인 각 단의 피니언과 휠의 잇수를 결정함으로써 기어비를 분할하도록 한 것으로, Fig. 3에 자세한 알고리즘을 보인다.

Fig. 3에서  $X$ 는 결정해야 할 각 단의 기어 잇수이다. 기어 잇수는 정수 변수이기 때문에 변수  $X$ 를 정수로 만들기 위하여 반올림(round off)

하여  $F_{ratio}(X)$ 의 값을 구한다.  $F_{ratio}(X)$ 는 각 단의 잇수를 결정하기 위해 사용한 목적함수로서 식(15)에 보이는 바와 같다.

$$\text{Minimize } F_{ratio} = \left| u - \frac{z_{w1}}{z_{p1}} \times \frac{z_{w2}}{z_{p2}} \times \dots \times \frac{z_{wn}}{z_{pn}} \right| \quad (15)$$

subject to  $z_{p, lower} \leq z_{pi} \leq z_{p, upper}$

여기서,  $z_{pi}$ ,  $z_{gi}$ 은 각각  $i$ 번째 단의 피니언과 휠의 잇수,  $u$ 는 전 기어비를 나타낸다.

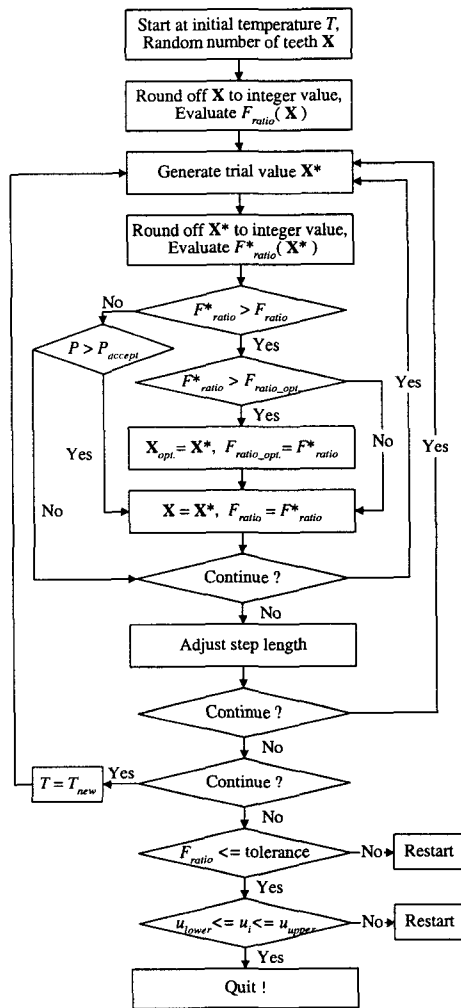


Fig. 3 Design algorithm to find the number of teeth based on the simulated annealing algorithm

식 (15)에서 보이는 바와 같이 목적함수는 설계자가 원하는 전 기어비와 최적화 과정에서

구해지는 잇수로부터 계산된 전 기어비와의 차를 최소화하도록 하였다. 잇수의 경우 정수 변수 (integer variable)로서 압력각에 따라 피니언의 최소 한계 잇수와 최대 한계 잇수를 설정할 수 있으므로, 해의 탐색영역을 피니언의 한계 잇수 조건으로 제한한다. 다음은 잇수의 상하한치 범위에서 시험값(trial value)  $X^*$ 를 생성시키고 다시 변수  $X^*$ 를 정수로 만들기 위하여 반올림을 한다. 이 값으로부터  $F_{ratio}(X^*)$ 를 구해내고  $F_{ratio}(X)$ 와 크기를 비교하여 새로운 해로 받아들이기가 적당한지를 판단하기 위해 Metropolis 기준을 거친다. 이후  $F_{ratio}$  값을 허용 오차(tolerance)와 비교하여 작으면 다음 단계로 넘어가고 그렇지 않으면 다시 알고리즘을 수행한다. 이 조건을 만족하면 마지막으로 기어비의 상한치, 하한치의 조건을 검사하여 만족하면 설계를 종료하고 그렇지 않으면 다시 알고리즘을 수행한다.

### 3.2 기어비 분할 예 및 평가

이상의 기어비 분할 알고리즘을 기반으로 구현한 프로그램의 성능을 검증하기 위해, 실제 기어열의 잇수 결정을 수행해 본 결과를 보인다.

기어비 분할은 전 기어비가 1000인 5단 기어열에 적용하였으며, 허용 오차(tolerance)는 전 기어비의 1%로 하였다. 또한, 한 단의 기어비의 범위는 1~7로 하였고, 피니언 잇수의 범위는 14~25로 하였다. 기어비 분할 결과는 Table 1에 정리하여 나타내었으며, 프로그램의 실제 수행은 Fig. 4에 보인다.

Table 1 Output result of the example

Stage	1	2	3	4	5
Gear ratio	5.833	5.278	4.765	3.810	1.789
No. of teeth in pinion	18	18	17	21	19
No. of teeth in wheel	105	95	81	80	34

Table 1의 결과에서 각 단의 피니언과 기어의 잇수가 전 기어비 1000이 되도록 적절하게 결정되었음을 알 수 있다. 또한 각 단의 기어비도

1단에서 5단으로 갈수록 작은 값을 취하게 되어, 일반적인 기어비 설정 방식에 부합하는 결과를 주고 있다.

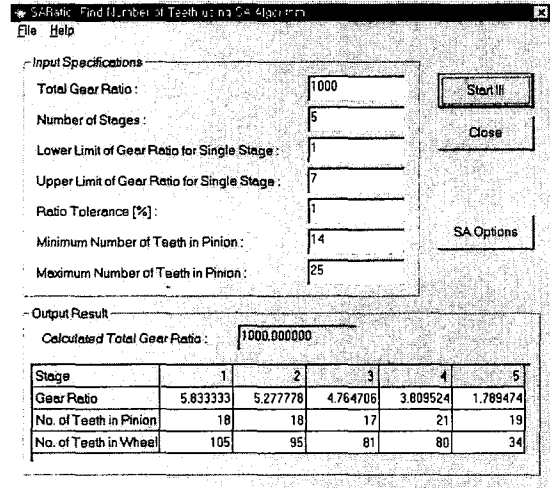


Fig. 4 Program window of the example

또한, 개발한 알고리즘의 성능과 안정성을 검증하기 위해 이상의 분할 예를 10회 수행했을 경우의 수행 시간과 전 기어비 및 오차를 Table 2에 보인다.

Table 2 Results of ten trial executions

Trial number	Elapsed time [sec.]	Calculated total gear ratio	Error
1	0.140	1000.000000	0.000000
2	0.210	1000.000000	0.000000
3	0.120	999.990234	-0.009766
4	0.601	999.993922	-0.006078
5	0.461	1000.000000	0.000000
6	0.451	1000.000000	0.000000
7	0.341	999.994256	-0.005744
8	0.110	1000.000000	0.000000
9	0.120	999.983072	-0.016928
10	0.241	1000.004685	0.004685
Average	0.280	999.996617	

모든 시행 횟수에 있어서 상당히 짧은 시간 내에 기어비 설정이 수행되었음을 보여주고 있으며, 또한 계산된 전 기어비들도 무시할 수 있는 수준의 오차 범위 내에 들고 있음을 알 수 있다.

프로그램은 Pentium III 800MHz 프로세서로 수행되었다.

#### 4 결론

본 논문에서는 다단 기어열의 기어비 분할에 관한 기존의 방법론을 분석하고, 시뮬레이티드 어닐링 알고리즘에 기반한 기어비 설정 알고리즘을 제시하였다. 기존의 방법론들은 각각의 단점들로 인해 실제 설계 상황에 이용할 수 있는 범위가 제한되어 있고, 특히 설계 자동화의 관점에서 그 유용성이 크게 떨어지는 문제점이 있다. 반면, 본 논문에서 제시한 알고리즘은 모든 단수의 기어열에 이용할 수 있는 범용적인 설계 방법일 뿐만 아니라, 특히 빠른 수행 시간 내에 만족할 만한 결과를 주고 있다. 따라서, 본 알고리즘은 독립적인 기어비 분할 프로그램으로도 유용하게 사용될 수 있으나, 다단 기어열 설계의 자동화에 더욱 유용하게 사용할 수 있을 것으로 기대된다. 실제 본 알고리즘은 저자들이 개발하고 있는 다단 기어장치 자동화 프로그램의 일부 모듈로서 개발된 것이다.

#### 참고문헌

- [1] Townsend, D. P., 1992, *Dudley's Gear Handbook*, 2nd ed., McGraw-Hill Inc..
- [2] Chong, T. H., Bae, I., and Park, G. J., 2002, "A New and Generalized Methodology to Design Multi-Stage Gear Drives by Integrating the Dimensional and the Configuration Design Process," *Mechanism and Machine Theory*, 37, pp. 295-310.
- [3] AGMA 917-B97, 1997, *Design Manual for Parallel Shaft Fine-itch Gearing*, American Gear Manufacturers Association.
- [4] 齒車便覽編集委員會, 1973, *齒車便覽*, 日本日刊工業新聞社.
- [5] Niemann, G., 1978, *Machine Elements*, Springer-Verlag.
- [6] Piper, C. A., 1953, "Approximating Arbitrary Ratios with Gears," *Machinery*.