

교환법칙을 만족하는 비다양체 모델의 선택적 불리안 작업의 개발

이상헌*(국민대 자동차공학대학원), 이강수(한밭대학교 기계공학부), 박상근

Development of the Selective Boolean Operations on Non-Manifold Models

S. H. Lee (Kookmin Univ.), K. S. Lee (Hanbat National Univ.), S. Park

ABSTRACT

This paper describes the selective Boolean operations on non-manifold geometric models whose union and subtraction operations are commutative. These operations guarantee the same resulting shape in spite of change of the order of Boolean operations, and the integrity of the model for omission of some features. In addition, a B-rep model for a modified modeling history is obtained in a short time, as no boundary evaluation is necessary. These features enable easy implementation of multi-resolution representation of B-rep models.

Key Words : Boolean Operation (불리안 작업), Non-Manifold (비다양체), Commutative Law (교환법칙), Multi-Resolution (다중해상도), Feature (특징형상)

1. 서론

1990 년대부터 컴퓨터 그래픽스 분야에서는 삼각형으로 이루어진 다면체 모델을 다중해상도 모델(multi-resolution model)로 저장한 후 필요한 상세 수준(Level Of Detail (LOD))에 대한 다면체 모델을 빠른 시간내에 얻어내는 방법에 대한 연구가 활발히 진행되어 왔다[1,2]. 이러한 연구의 주된 목적은 불필요한 다면체의 수를 감소시킴으로써 렌더링 속도를 향상시키기 위한 것이었다. 이러한 일반적인 다중해상도 모델에 대한 연구와 달리, 일반적인 솔리드 모델링 시스템에서 사용되는 B-rep 파트 모델을 대상으로 한 다중해상도 구현에 대한 연구가 최동혁 등[3]에 의해서 수행되었다. 이 논문에서는 원래의 모델링 히스토리의 특징형상 정보를 가지고 최종형상에 기여도가 높은 특징형상순으로 특징형상을 재배치하여 특정 상세 수준이 주어졌을 때 이를 만족시키는 솔리드 모델을 손쉽게 얻을 수 있도록 하였다. 즉, 저해상도(low-resolution)에서는 우선 순위가 높은 특징형상들만을, 고해상도(high-level)에서는 낮은 순위의 좀더 작고 상세한 특징형상들도 포함시키는 특징형상 트리를 만든 다음, 그로부터 솔리드 모델을 다시 생성시키는 방법을 사용

하였다. 그러나 특징형상의 적용 순서를 바꾸는 것은 불리안 작업중 합집합과 차집합 연산이 서로 교환 가능한 경우에만 가능한 것으로서 이 논문에서는 이에 대한 아무런 수학적 검증이 없이 이를 용인하고 있다. 하지만 일반적인 불리안 합집합과 차집합 사이에는 교환법칙이 성립하지 않는 것으로 알려져 있다. 따라서 [3]에서 제시한 연구 목적이 가능하기 위해서는 교환 법칙이 성립할 수 있는 새로운 불리안 작업을 개발하는 것이 선행되어야 한다. 또한, [3]에서 제시한 주어진 상세수준에 대한 특징형상 트리로부터 새로운 솔리드 모델을 생성시키는 방법은 솔리드 모델의 경계를 다시 계산해 내야하기 때문에 많은 시간이 소모된다.

이러한 문제점들을 해결하기 위하여 본 논문에서는 셀 구조를 갖는 비다양체 모델[4]을 다중해상도 구현을 위해 적합한 모델로 선택하였다. 이 모델은 병합 및 선택(merge and selection) 알고리즘을 적용하여 생성된 것으로서 특징형상들에 대한 모든 경계 정보들이 포함되어 있기 때문에[5], 이 가운데 필요한 특징형상들만을 추출하여 그에 대한 최종형상을 제공하는 것이 가능하다. 따라서 새로이 경계 계산을 할 필요가 없기 때문에 [3]에서 제시한 것과 같은 솔리드 모델 기반의 방식보다 신속하게

주어진 상세 수준의 솔리드 모델을 생성시킬 수 있다. 그러나 이 방법에서도 상세 수준에 따라 특징형상 트리를 재구성하기 위해서는 합집합과 차집합이 서로 교환될 수 있는 불리안 작업을 개발하는 것이 필요하며, 본 논문에서는 이에 대한 방법을 제시하고자 한다.

2. 선택적 불리안 작업 알고리즘

솔리드 모델에 대한 합집합과 차집합 불리안 작업은 적용 순서에 따라 그 결과가 다르다. 즉, 이들 불리안 작업은 교환 법칙이 성립하지 않는다. 이는 불리안 작업이 적용될 때에 이 작업의 영향을 받는 영역이 한정되어 있는데, 그 영역이 작업 순서에 따라 다르기 때문이다. 따라서 교환법칙이 성립되는 불리안 작업을 만들기 위해서는 각 불리안 작업이 적용되는 순간 그 영향이 미치는 영역을 함께 저장하여 두었다가, 나중에 그 순서가 바뀌더라도 그 작업에는 원래의 적용 영역에만 영향이 미치도록 하는 것이 필요하다. 이때, 영향이 미치는 영역은 그 작업의 결과에 기여하는 기본 입체들이라고 할 수 있다. 이와 같이 적용되는 영역이 한정되는 불리안 작업을 본 논문에서는 선택적 불리안 작업(Selective Boolean Operations)이라고 부르도록 하겠다. 이 선택적 불리안 작업의 더하기 작업은 $\oplus_{\{S_i\}}$, 빼기 작업은 $\psi_{\{S_i\}}$ 로 나타내며 여기서 $\{S_i\}$ 는 불리안 작업에 관계되는 모든 기본 입체들의 집합을 나타낸다. 단, 주의할 점은 합집합, 교집합, 차집합의

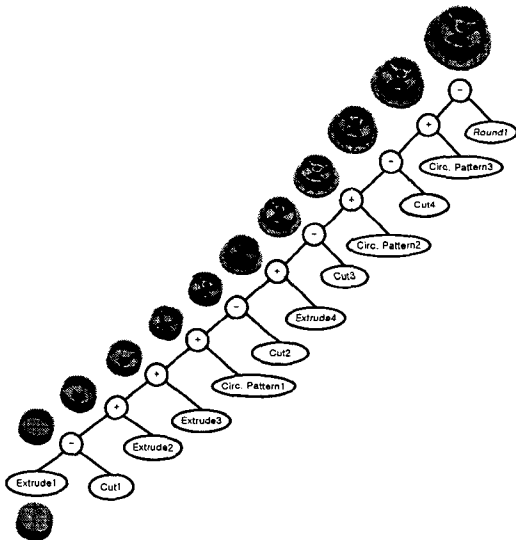


Fig. 1 An example of CSG trees for feature-based modeling [3]

세 가지 불리안 작업가운데 교집합은 본 논문의 범위에서 제외하고 있다. 이는 특징형상 기반 모델링은 합집합과 차집합을 사용하여 구현 가능하기 때문이다.

일반적으로 비다양체 불리안 작업은 병합 및 선택 알고리즘에 따라 구현되어 있다. 병합 단계에서는 불리안 작업이 적용된 모든 물체를 하나의 비다양체 모델로 만들어 놓고, 선택 단계에서 주어진 불리안 트리에 따라 경계를 구성하는 위상 요소들을 추출하는 방식을 취하고 있다. 본 논문의 선택적 불리안 작업은 병합 단계는 기존의 방법과 동일하며, 선택 단계에서는 본 작업의 취지에 맞도록 기존의 알고리즘을 수정하였다. 그러면 이제부터 선택 알고리즘에 대하여 설명하도록 하겠다.

솔리드 모델링 시스템에서 사용되는 특징형상은 가법 특징형상(additive feature)과 감법 특징형상(subtractive feature)로 분류될 수 있으며, 특징형상 기반 모델러에서는 이들 특징형상을 기본 단위로 이들을 기본 입체에 더해 나감으로써 소기의 물체를 모델링하는 방법을 채택하고 있다. 따라서 모델링 과정은 그림 1에 나타난 것과 같은 트리 형태로 나타낼 수 있다. 여기서 단말노드는 기본 입체들이며, 내부 노드는 모두 합집합과 차집합가운데 하나를 나타내는 연산자 노드이다.

본 논문에서 제안된 특징형상의 불리안 트리는 연산자 노드에 자신의 아래에 위치하는 모든 자식 특징형상의 기본 입체에 대한 리스트를 저장하고 있으며, 이러한 정보는 모델링 작업시 생성된다. 초기에 생성된 특징형상의 트리는 다중해상도 모델을 만드는 과정에서 변형될 수 있다. 즉, 적용되는 특징형상의 순서가 바뀔 수 있다. 이러한 특징형상 트리로부터 경계 표현 모델을 얻어내는 방법은 다음과 같다.

먼저 선택의 대상이 되는 위상요소들은 꼭지점, 모서리, 면, 그리고 영역의 4 가지 요소이다. 선택 작업은 병합체내의 모든 꼭지점, 모서리, 면 및 영역 가운데 최종 형상에 기여하는 위상 요소들을 찾아 alive 로 표시하는 작업이라고 할 수 있다. 이를 수행하기 위하여 먼저 모든 요소들을 dead 로 초기화시킨 후, 불리안 트리의 루트노드(root node)에 대해 다음 함수를 호출하여 필요한 위상 요소들을 선택하도록 한다.[5]

procedure select_entities

input: 병합체, 특징형상 트리의 한 노드;

output: 선택된 위상요소들의 리스트

```
{
  if (주어진 노드의 내용이 기본 물체이면)
    병합체의 모든 셀 요소에 대해 연혁 표시
```

로 가지고 있는 `part_of`의 내용이 기본 입체의 위상 요소를 가리킨 것이 있으면 선택된 위상요소 리스트에 넣는다.

else (주어진 노드의 내용이 불리안 연산자 이면)

1. 좌측 자식노드에 대해 `select_entities`를 재귀 호출하여 결과 `left_alives`를 얻는다.
2. 우측 자식노드에 대해 `select_entities`를 재귀호출하여 결과 `right_alives`를 얻는다. 이때 셀 요소들의 조상이 불리안 연산자가 저장하고 있는 기본 입체에 포함되지 않는 것은 소거시킨다.
3. 불리안 연산자의 종류에 따라 `left_alives` 리스트와 `right_alives` 간의 불리안 연산을 수행한다. 이때 두개의 리스트간의 합집합은 적어도 한쪽에 있는 요소를 찾는 것이고, 차집합은 앞의 것에는 있고 뒤의 것에는 없는 요소를 찾는 것을 말한다.
4. 불리안 연산자의 종류가 차집합인 경우에는 `closure` 연산을 수행한다. 여기서 `closure` 연산이란 현재 리스트에 선택되어 있는 위상요소의 경계가 되는 요소 중 리스트에서 빠진 것이 있으면 보충해 넣는 작업을 말한다

endif

}

3. 선택적 불리안 작업의 교환법칙

Fig.2에 나타난 것과 같이 세 기본입체 A, B, C로부터 생성된 병합체 M은 다음과 같이 구성되어 있다.

$$M = \{R_A, R_B, R_C, R_{AB}, R_{AC}, R_{BC}, R_{ABC}\}$$

여기서 $R_{ij} = R_i \cap R_j$ 인 영역을 뜻한다. 따라서 각 기본 입체들은 다음과 같이 구성되어 있다고 할 수 있다.

$$A = \{R_A, R_{AB}, R_{AC}, R_{ABC}\}$$

$$B = \{R_B, R_{AB}, R_{BC}, R_{ABC}\}$$

$$C = \{R_C, R_{AC}, R_{BC}, R_{ABC}\}$$

그러면 먼저 일반적인 불리안 작업의 합집합과 차집합 작업사이에 교환법칙이 성립하지 않음을 먼저 보이도록 하겠다. 위 세 기본입체에 대해서 합집합과 차집합의 적용 순서를 달리해서 그 결과를 산출해보면 다음과 같다. (Fig.3 및 Fig.4 참조)

$$\begin{aligned} A \oplus B \psi C &= \{\{R_A, R_{AB}, R_{AC}, R_{ABC}\} \oplus \{R_B, R_{AB}, R_{BC}, R_{ABC}\}\} \psi \{R_C, R_{AC}, R_{BC}, R_{ABC}\} \\ &= \{R_A, R_{AB}, R_{AC}, R_{ABC}, R_B, R_{BC}\} \psi \{R_C, R_{AC}, R_{BC}, R_{ABC}\} \\ &= \{R_A, R_{AB}, R_B\} \end{aligned}$$

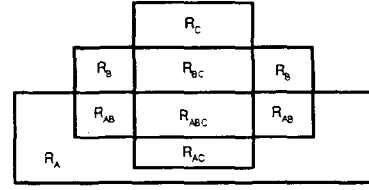


Fig. 2 A merged set of three primitives A, B, and C

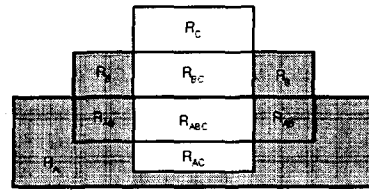


Fig. 3 Result of $A \oplus B \psi C$

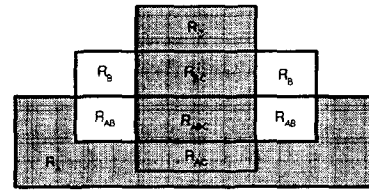


Fig. 4 Result of $A \psi B \oplus C$

$$\begin{aligned} A \psi B \oplus C &= \{\{R_A, R_{AB}, R_{AC}, R_{ABC}\} \psi \{R_B, R_{AB}, R_{BC}, R_{ABC}\}\} \oplus \{R_C, R_{AC}, R_{BC}, R_{ABC}\} \\ &= \{R_A, R_{AC}\} \oplus \{R_C, R_{AC}, R_{BC}, R_{ABC}\} \\ &= \{R_A, R_{AC}, R_C, R_{BC}, R_{ABC}\} \end{aligned}$$

따라서 불리안 작업의 합집합과 차집합 사이에는 교환법칙이 성립하지 않는다.

그러면 이제 선택적 불리안 작업에서는 이 교환법칙이 성립하는 것을 보이도록 하겠다. 만일 세 기본입체 사이에 $A \oplus B \psi C$ 의 순서로 불리안 작업이 적용되는 경우, 본 시스템에서는 $A \oplus_{(A,B)} B \psi_{(A,B,C)} C$ 형태의 선택적 불리안 작업으로 저장된다. 그러면 이후에는 선택적 불리안 작업의 순서를 바꾼다하더라도 원래와 같은 결과가 나온다. 또한, 세 기본입체 사이에 $A \psi B \oplus C$ 의 순서로 불리안 작업이 적용되는 경우, 본 시스템에서는 $A \psi_{(A,B)} B \oplus_{(A,B,C)} C$ 형태의 선택적 불리안 작업으로 저장된다. 그러면 이후에는 선택적 불리안 작업의 순서를 바꾼다하더라도 원래와 같은 결과가 나온다. 따라서 이 두가지 경우에 대하여 각각 교환법칙이 성립하는 것을 보인다면, 선택적 불리안 작업의 합집합과 차집합사이에 교환법칙이 성립함을 증명하는 것

이라고 할 수 있다. 그러면 각각의 경우를 살펴 보도록 하겠다.

3.1 $A \oplus B \psi C$ 의 불리안 작업 적용시의 교환 법칙 성립

$$A \oplus_{(A,B)} B \psi_{(A,B,C)} C = A \psi_{(A,B,C)} C \oplus_{(A,B)} B$$

먼저, 좌변에 대해 그 불리안 작업 결과를 산출해 보면,

$$\begin{aligned} A \oplus_{(A,B)} B &= \{ R_A, R_{AB}, R_{AC}, R_{ABC} \} \oplus_{(A,B)} \{ R_B, R_{AB}, R_{BC}, R_{ABC} \} \\ &= \{ R_A, R_{AB}, R_{AC}, R_{ABC} \} \oplus \{ R_B, R_{AB} \} \\ &= \{ R_A, R_{AB}, R_{AC}, R_{ABC}, R_B \} \\ (A \oplus_{(A,B)} B) \psi_{(A,B,C)} C &= \{ R_A, R_{AB}, R_{AC}, R_{ABC}, R_B \} \psi_{(A,B,C)} \{ R_C, R_{AC}, R_{BC}, R_{ABC} \} \\ &= \{ R_A, R_{AB}, R_{AC}, R_{ABC}, R_B \} \psi \{ R_C, R_{AC}, R_{BC}, R_{ABC} \} \\ &= \{ R_A, R_B, R_{AB} \} \end{aligned}$$

다음, 우변에 대해 그 작업 결과를 산출해 보면,

$$\begin{aligned} A \psi_{(A,B,C)} C &= \{ R_A, R_{AB}, R_{AC}, R_{ABC} \} \psi_{(A,B,C)} \{ R_C, R_{AC}, R_{BC}, R_{ABC} \} \\ &= \{ R_A, R_{AB}, R_{AC}, R_{ABC} \} \psi \{ R_C, R_{AC}, R_{BC}, R_{ABC} \} \\ &= \{ R_A, R_{AB} \} \\ (A \psi_{(A,B,C)} C) \oplus_{(A,B)} B &= \{ R_A, R_{AB} \} \oplus_{(A,B)} \{ R_B, R_{AB}, R_{BC}, R_{ABC} \} \\ &= \{ R_A, R_{AB} \} \oplus \{ R_B, R_{AB} \} \\ &= \{ R_A, R_B, R_{AB} \} \end{aligned}$$

따라서 $A \oplus_{(A,B)} B \psi_{(A,B,C)} C = A \psi_{(A,B,C)} C \oplus_{(A,B)} B$ 이 성립함을 알 수 있다.

3.2 $A \psi B \oplus C$ 의 불리안 작업 적용시의 교환 법칙 성립

$$A \psi_{(A,B)} B \oplus_{(A,B,C)} C = A \oplus_{(A,B,C)} C \psi_{(A,B)} B$$

먼저, 좌변에 대해 그 불리안 작업 결과를 산출해 보면,

$$\begin{aligned} A \psi_{(A,B)} B &= \{ R_A, R_{AB}, R_{AC}, R_{ABC} \} \psi_{(A,B)} \{ R_B, R_{AB}, R_{BC}, R_{ABC} \} \\ &= \{ R_A, R_{AB}, R_{AC}, R_{ABC} \} \psi \{ R_B, R_{AB} \} \\ &= \{ R_A, R_{AC}, R_{ABC} \} \\ (A \psi_{(A,B)} B) \oplus_{(A,B,C)} C &= \{ R_A, R_{AC}, R_{ABC} \} \oplus_{(A,B,C)} \{ R_C, R_{AC}, R_{BC}, R_{ABC} \} \\ &= \{ R_A, R_{AC}, R_{ABC} \} \oplus \{ R_C, R_{AC}, R_{BC}, R_{ABC} \} \\ &= \{ R_A, R_C, R_{AC}, R_{BC}, R_{ABC} \} \end{aligned}$$

다음, 우변에 대해 그 작업 결과를 산출해 보면,

$$A \oplus_{(A,B,C)} C = \{ R_A, R_{AB}, R_{AC}, R_{ABC} \} \oplus_{(A,B,C)} \{ R_C, R_{AC}, R_{BC}, R_{ABC} \}$$

$$\begin{aligned} &= \{ R_A, R_{AB}, R_{AC}, R_{ABC} \} \oplus \{ R_C, R_{AC}, R_{BC}, R_{ABC} \} \\ &= \{ R_A, R_{AB}, R_{AC}, R_{ABC}, R_C, R_{BC} \} \\ (A \oplus_{(A,B,C)} C) \psi_{(A,B)} B &= \{ R_A, R_{AB}, R_{AC}, R_{ABC}, R_C, R_{BC} \} \psi_{(A,B)} \{ R_B, R_{AB}, R_{BC}, R_{ABC} \} \\ &= \{ R_A, R_{AB}, R_{AC}, R_{ABC}, R_C, R_{BC} \} \psi \{ R_B, R_{AB} \} \\ &= \{ R_A, R_{AC}, R_{ABC}, R_C, R_{BC} \} \end{aligned}$$

따라서 $A \psi_{(A,B)} B \oplus_{(A,B,C)} C = A \oplus_{(A,B,C)} C \psi_{(A,B)} B$ 이 성립함을 알 수 있다.

앞의 두가지 경우를 바탕으로 선택적 불리안 작업자 $\oplus_{(S_i)}$ 와 $\psi_{(S_i)}$ 에 대한 교환법칙이 성립함을 증명할 수 있다.

4. 결론

본 논문에서는 비다양체 모델의 불리안 작업의 합집합과 차집합 작업 사이에 상호 교환법칙이 성립되는 선택적 불리안 작업을 제시하였다. 이 방법을 사용함으로써 초기 모델링 작업시 적용된 특징형상의 적용 순서를 자유로이 바꾸더라도 같은 결과를 보장하며, 그 가운데 필요한 특징형상만을 선택하는 경우에도 적합한 솔리드 모델을 제공해 줄 수 있게 되었다. 그럼으로써 선택적 불리안 작업을 이용한 비다양체 모델링 기반 다중해상도 모델의 구현이 가능하게 되었으며 이에 대한 연구를 현재 진행중이다.

참고문헌

1. Hoppe H., "Progressive Meshes," Proceedings of ACM SIGGRAPH '96, pp. 99-108, 1996.
2. Hoppe H., "View-dependent Refinement of Progressive Meshes," Proceedings of ACM SIGGRAPH '97, pp. 189-198, 1997.
3. 최동혁, 김태완, 이건우, "Feature conversion 을 이용한 B-rep model 의 다중해상도 구현", 2001 한국 CAD/CAM 학회 학술발표회 논문집, pp.57-64, 2001.2
4. Sang Hun Lee and Kunwoo Lee, "Partial Entity Structure: A Compact Boundary Representation for Non-Manifold Geometric Modeling", ASME Journal of Computing & Information Science in Engineering, Vol.1, No.4, pp.356-365, 2001. 12.
5. 김성환, 이건우, 김영진, "비다양체 모델을 수용하는 CAD 시스템 커널을 위한 불리안 조작의 개발", Vol.1, No.1, pp.20-32, 1996.