

유체로 연성된 두 직사각 평판의 고유진동에 관한 해석적 연구

유계형*(전북대원), 정경훈**(한국원자력연구소), 이성철*** (전북대, 공업기술연구소)

Analytical Study on the Free Vibration of Two Rectangular Plates Coupled with Fluid

Gye-Hyoung Yoo*(Graduate School Chonbuk Univ.), Kyeong-Hoon Jeong**(KAERI),
and Seong-Cheol Lee***(Chonbuk Univ. RIIT)

ABSTRACT

This study dealt with the free vibration of two identical rectangular plates coupled with fluid. In order to investigate the vibration characteristics of fluid-coupled rectangular plates, an analytical method based on the finite Fourier series expansion and Rayleigh-Ritz method was suggested. A commercial computer code, ANSYS was used to perform finite element analysis and we investigated the vibration characteristics with mode shapes and natural frequencies. As a result, the transverse vibration modes, in-phase and out-of-phase, were observed alternately in the fluid-coupled system. The effect of fluid bounding and plate boundary condition on the fluid-coupled natural frequency were investigated. It was shown that the mode numbers increased, the normalized natural frequencies monotonically increased.

Key Words : Rectangular plate(직사각 평판), Rayleigh-Ritz Method(Rayleigh-Ritz 방법), FEM(유한요소법), Fluid-coupled(유체 연성), In-phase mode(동위상 모드), Out-of-phase mode(역위상 모드)

1. 서 론

유체와 접하고 있는 구조물들은 유체에 의한 유체연성(fluid-coupled) 및 부가질량(added mass) 효과에 의하여 진공 중에서도 다른 거동을 하게 된다. 이러한 유체-구조물 상호작용(fluid-structure interaction) 문제는 열교환기, 원자력발전소, 대형 유체 저장탱크 등과 같이 유체와 접하는 구조물에서 유체의 영향이 커짐에 따라 그 중요성이 증대되고 있다. 특히 원자로에서 중성자 조사에 의한 손상을 피하기 위해 사용되는 동축 원통형 셀 구조물이나 평판 구조물과 같이 구조물 사이의 간격이 작고 유체와 접하는 경우에 유체연성 및 부가질량 효과는 복잡하게 나타난다. 따라서 이와 같은 구조물의 건전성을 확보하기 위해서는 유체와 접하고 있는 구조물에 대한 정확한 동특성을 이해할 필요가 있고, 이를 위해 고유진동 해석이 요구되고 있다.

최근 유체와 접하고 있는 다양한 형태의 평판 구조물 진동에 대한 연구가 수행되는데⁽¹⁻⁴⁾, 이들 연구는 모두 유체와 접하고 있는 단일 평판의 문제만을 고려하고 있거나 구속되지 않은 무한 유체영역을 가정하기 때문에 두 평판사이에 유체가 채워진 경우와

는 근본적으로 다른 성질을 갖는다.

하지만 Jeong⁽⁵⁾ 등은 마주 보고있는 동일 크기의 두 원판 사이에 유체가 채워진 경우를 해석하여 역위상 모드의 오차 원인이 역위상 모드에서 진공 중의 모드와 다른 모드형상을 갖기 때문임을 밝혔고, 정명준⁽⁶⁾ 등은 두 원형평판이 강체 벽에 구속된 유체로 연성된 경우의 고유진동을 해석하기 위해 Rayleigh-Ritz 방법을 이용하여 고유진동수를 구하고, 유한요소 해석으로 유량에 따른 진동특성을 분석하였다.

본 연구는 동일 크기의 두 직사각 평판 사이에 유체가 가득 채워진 경우의 고유진동을 해석하기 위해 진공 중의 모드를 조합하는 Rayleigh-Ritz 방법에 의한 이론적인 해석방법을 제시하고, 유한요소 해석으로 유체연성 구조물의 동특성과 직사각 평판과 유체를 구속하는 벽의 경계조건을 달리하여 이에 따른 유체와 연성된 직사각 평판 구조물의 동특성을 알아보았다.

2. Rayleigh-Ritz Method 정식화

Fig.1은 유체로 연성된 두 직사각 평판을 나타내는 시스템으로 a, b, h 는 각각 직사각형의 가로, 세로

와 두께를 나타낸다. 이론 해석에서 유체 운동은 매우 작아 선형으로 취급할 수 있고, 유체는 비압축성, 비점성, 비회전성 이상유체로, 직사각 평판은 선형 탄성범위 내에 있다고 가정하였다.

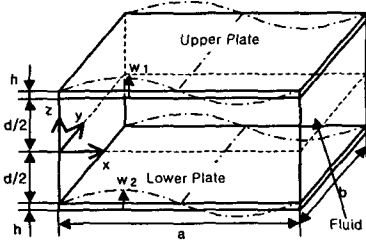


Fig. 1 Two rectangular plates coupled with fluid

유체와 접하는 직사각 평판의 횡방향 변위 w_j 에 대한 운동방정식은 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$D\nabla^4 w_j + \rho h w_{j,tt} = p_j, \quad j=1, 2 \quad (1)$$

여기서, $D = Eh^3/12(1 - \mu^2)$ 은 직사각 평판의 강성도이고, ρ , μ , p_j , E 는 각각 판의 밀도, 포아송비, 판에 작용하는 유체압력, 탄성계수를 나타낸다. 식에서 첨자 1은 상부 평판을 첨자 2는 하부 평판을 나타낸다.

유체와 접하는 두 직사각 평판의 모드형상을 계산하기 위해 Rayleigh-Ritz 방법을 사용하여 접수진동 변위 w_1 과 w_2 를 나타내면 접수 모드형상은 유한 개의 적합함수(admissible function) W_{mn} ($m=0, 1, 2, \dots, M$; $n=0, 1, 2, \dots, N$)와 적절한 미정계수 q_{mn} 과 p_{mn} 를 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$w_1(x, y, t) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M q_{mn} W_{mn}(x, y) \exp(i\omega t) \quad (2-a)$$

$$w_2(x, y, t) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M p_{mn} W_{mn}(x, y) \exp(i\omega t) \quad (2-b)$$

여기서, w_1 과 w_2 는 각각 상부 평판과 하부 평판의 진동 변위이고, $i = \sqrt{-1}$, ω 는 유체로 연성된 직사각 평판의 유체연성 고유진동수이다. 접수 시의 진동 모드형상이 진공 중의 모드형상과 같다고 가정하면 적합함수 $W_{mn}(x, y)$ 는 경계조건을 만족하는 진공 중에 있는 보에 대한 고유함수의 합으로 나타낼 수 있다. 따라서 완전고정 경계조건을 갖는 직사각 평판의 동적 변위는 다음과 같이 가정할 수 있다.

$$W_{mn}(x, y) = \left[\cosh\left(\frac{\lambda_m x}{a}\right) - \cos\left(\frac{\lambda_m x}{a}\right) - \sigma_m \left\{ \sinh\left(\frac{\lambda_m x}{a}\right) - \sin\left(\frac{\lambda_m x}{a}\right) \right\} \right] \times \left[\cosh\left(\frac{\lambda_n y}{b}\right) - \cos\left(\frac{\lambda_n y}{b}\right) - \sigma_n \left\{ \sinh\left(\frac{\lambda_n y}{b}\right) - \sin\left(\frac{\lambda_n y}{b}\right) \right\} \right] \quad (3)$$

여기서 m, n 은 각 변에 대한 모드 수를 나타내고, 계수는 $m, n=1, 2, 3, \dots$ 일 때, $\lambda_m, \lambda_n = 4.73004, 7.85320, 10.99561, 14.13717, 17.27876, (2m+1)\pi/2$ ($m,$

$n > 5$)이고, $\sigma_m, \sigma_n = 0.98205, 1.00078, 0.99997, 1.00000$ ($m, n > 3$)이다.

또한 두 직사각 평판과 강체벽으로 구속된 유체 운동은 이상유체라는 가정으로부터 다음과 같은 속도포텐셜의 Laplace 방정식으로 나타낼 수 있다.

$$\nabla^2 \phi(x, y, z, t) = 0 \quad (4)$$

유동의 대칭성과 강체벽에 수직인 방향의 유속이 0이라는 경계조건으로부터 속도포텐셜 $\phi(x, y, z)$ 의 일반해는 다음과 같이 주어진다.

$$\text{동위상 모드의 경우} \quad (5-a)$$

$$\phi(x, y, z) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} E_{rs} \cos(\alpha_r x) \cos(\beta_s y) \sinh(\gamma_{rs} z)$$

$$\text{역위상 모드의 경우} \quad (5-b)$$

$$\phi(x, y, z) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} F_{rs} \cos(\alpha_r x) \cos(\beta_s y) \cosh(\gamma_{rs} z)$$

여기서, E_{rs}, F_{rs} 는 미정계수이고, $\alpha_r, \beta_s, \gamma_{rs}$ 는 다음과 같다.

$$\alpha_r = r\pi/a, \quad \beta_s = s\pi/b, \quad \gamma_{rs} = \sqrt{\alpha_r^2 + \beta_s^2} \quad (6-a,b,c)$$

두 직사각 평판의 진동 변위가 대칭이고, 두 평판과 유체가 접하는 접수면에서 연직 방향 유속이 같다는 적합조건으로부터 유체운동에 대한 계수 E_{rs}, F_{rs} 는 식 (7-a,b)와 같이 직사각 평판의 운동을 계수 q 로 나타낼 수 있다. 따라서 미정계수 벡터 q 를 다음과 같이 정의하면 벡터 q 에 대한 유체의 운동에너지와 평판의 운동에너지, 평판의 최대변형에너지를 구할 수 있다.

$$q = \{ q_1 \ q_2 \ q_3 \ \dots \ q_n \}^T \quad (7-a)$$

여기서, $q_n = \{ q_{1n} \ q_{2n} \ q_{3n} \ \dots \ q_{Mn} \}^T$,

$$n = 1, 2, 3, \dots, N \text{ 이다.} \quad (7-b)$$

계의 연성된 고유진동수는 직사각 평판과 유체의 운동에너지를 계산해야 있다. 비회전 유체라는 가정으로부터 유체의 기준 운동에너지(reference kinetic energy)는 직사각 평판 경계의 운동으로부터 식 (8)과 같이 계산된다.

$$T_F^* = -\frac{1}{2} \rho_0 \left(\int_0^b \int_0^a q_{mn} W_{mn} \phi(x, y, d/2) dx dy + \int_0^b \int_0^a q_{mn} W_{mn} \phi(x, y, -d/2) dx dy \right) \quad (8)$$

여기서, ρ_0 는 유체 밀도이고, 유체의 기준 운동에너지는 다음과 같다.

$$T_F^* = \rho_0 q^T G q \quad (9)$$

여기서, 행렬 G 는 $(M \times N) \times (M \times N)$ 대칭행렬로서, 부가 가상 질량증가 행렬(Added Virtual Mass Incremental (AVMI) matrix)이라 부르고, 다음과 같이 계산된다.

$$G_{ik} = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \Lambda_{ikrs} H_{rs} \quad (10)$$

여기서, $(11-a)$

$$A_{ikrs} = - \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M \frac{ab}{\gamma_{rs}} [(a_{mr} - b_{mr}) - \sigma_m(c_{mr} - g_{mr})]^2 [(a_{ns} - b_{ns}) - \sigma_n(c_{ns} - g_{ns})]^2$$

$$H_{rs} = \tanh(\gamma_{rs}d/2) ; \text{동위상 모드} \quad (11-b)$$

$$H_{rs} = \coth(\gamma_{rs}d/2) ; \text{역위상 모드} \quad (11-c)$$

이다. 또한, 두 직사각 평판의 기준 운동에너지는 진동모드의 직교성을 이용하면 다음과 같다.

$$T_d^* = \rho h a b \mathbf{q}^T \mathbf{Z} \mathbf{q} \quad (12)$$

여기서, 행렬 \mathbf{Z} 는 $(M \times N) \times (M \times N)$ 행렬로서, 다음과 같이 주어진다.

$$Z_{ik} = \frac{\delta_{ik}}{ab} \int_0^b \int_0^a W_{mn}^2 dx dy, \quad \delta_{ik} : \text{Kronecker delta} \quad (13)$$

두 평판의 최대변형에너지는 다음과 같이 공기중 원판의 변형에 대한 합으로부터 계산될 수 있다.

$$V_d = D \int_0^b \int_0^a \left[\nabla^4 w_1 - 2(1-\mu) \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} \right)^2 \right) \right] dx dy \quad (14)$$

식(20)의 첫 번째 항 $\nabla^4 w_1$ 이외의 항은 첫 번째 항에 비해 무시할 수 있으므로 최대변형에너지는 식(21)과 같이 근사화시킬 수 있다.

$$V_d = D \mathbf{q}^T \mathbf{P} \mathbf{q} \quad (15)$$

여기서, \mathbf{P} 는 $(M \times N) \times (M \times N)$ 대각행렬로서 다음과 같다.

$$P_{ik} = \frac{\delta_{ik}}{(ab)^3} U_i U_k \quad (16)$$

여기서, U_i 는 다음 식과 같이 표현된다.

$$U_i = \lambda_i^3 [\sinh(\lambda_i) + \sin(\lambda_i) - \sigma_i (\cosh(\lambda_i) - \cos(\lambda_i))] \quad (17)$$

유체로 연성된 두 직사각평판의 고유진동수와 모드형상을 구하기 위해 미정계수 q_{mm} 에 대하여 Rayleigh 지수 $V_d / (T_d + T_f)$ 를 최소화시키는 Galerkin 방정식을 구하면 식 (18)과 같고, 이로부터 유체연성 고유진동수 ω 와 모드형상을 구할 수 있다.

$$D \mathbf{P} \mathbf{q} - \omega^2 (\rho h a b \mathbf{Z} + \rho_o G) \mathbf{q} = \{0\} \quad (18)$$

3. 유한요소 해석

유체로 연성된 두 직사각 평판의 동특성을 알아 보기 위해 상용유한요소해석 프로그램인 ANSYS를 이용하여 3차원 유한요소 모델을 만들고 해석하였다. 사용된 모델은 320mm × 240mm의 직사각 평판과 320mm × 240mm × 40mm의 체적을 갖는 유체로 구성된다. 직사각평판은 1536개의 탄성 쉘요소(SHELL 63)를 이용하였고, 직사각평판 사이의 유체는 4068개의 3차원 유체요소(FLUID80)를 이용하여 모델링하였다. 직사각형 평판은 알루미늄으로 두께 $t=2.5\text{mm}$, 탄성계수 $E=68\text{GPa}$, 포아송비 $\nu=0.34$, 밀도 $\rho=2730$

kg/m³을, 평판사이의 유체는 상온의 물로 체적탄성 계수 $B=2.22\text{GPa}$, 밀도 $\rho=1000 \text{ kg/m}^3$ 를 사용하였다.

유체와 구조물의 연성 해석을 위해서는 두 요소 사이의 적합조건이 필요한데, 이를 위해 유체와 판의 인접하는 노드 쌍에서 선택된 자유도를 연결하여 횡방향으로만 같이 움직이도록 하였다.

해석 모델은 경계조건에 따라 크게 4가지로 구분하였다. 직사각 평판 가장자리의 경계조건이 완전고정인 경우를 C, 단순 지지인 경우를 S라 하였고, 두 평판 사이의 유체가 강체벽에 의해 구속된 경우를 B, 구속되지 않은 경우를 UB라 하여 해석하였다.

직사각 평판 가장자리의 완전고정 경계조건은 모든 자유도를 구속하였고, 단순지지 경계조건은 가장자리 변에 수직인 변위 자유도만을 구속하여 경계조건을 부여하였다. 또한, 두 평판 사이의 유체가 강체벽에 구속된 경우는 강체벽에 접하는 면에서 강체벽 면에 수직인 방향의 변위만을 구속하여 경계조건을 부여하였고, 구속되지 않은 경우는 유체의 가장자리의 자유도를 구속하지 않음으로써 경계조건을 만족하도록 하였다.

모드해석은 Block Lanczos법을 이용하여 80개의 모드를 구하였고, 모드형상에 따라 역위상 모드와 동위상 모드로 분류하였다.

4. 해석 결과 및 고찰

유한요소 해석으로 고유진동수와 모드형상을 검토한 결과, 모든 모드형상은 두 평판 사이의 상대적인 움직임에 따라 동위상 모드와 역위상 모드의 횡방향 진동모드를 가지고 있었고, 대응하는 모드에서 동위상 모드의 고유진동수가 역위상 모드의 고유진동수보다 항상 높게 나타나고 있었다.

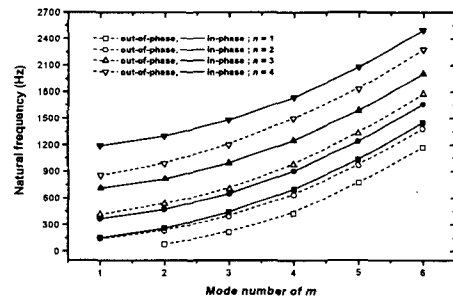


Fig. 2 Natural frequencies of the fluid-coupled two rectangular plates

Fig. 2는 평판의 가장자리가 완전 고정되고 평판 사이의 유체가 강체벽에 구속된 경우에 대해 유체와 연성된 평판의 고유진동수를 도시한 것으로, 실선은 동위상 모드를, 점선은 역위상 모드를 나타내고 있

다. 그림에서 동위상 모드의 고유진동수가 이에 대응되는 역위상 모드의 고유진동수보다 높게 나타나고 있는데, 이는 두 평판 사이의 유체 운동에 기인하고 있다. 이와 같은 유체 움직임은 계의 운동에너지를 증가시키고, 운동에너지의 증가는 유체연성 구조물의 진동수를 감소시키고 있다.

4.1 유체 구속의 영향

유체와 접한 두 평판의 고유진동수는 유체의 영향에 의해 진공 중에 있는 평판의 고유진동수보다 항상 작게 나타나는데, 진공 중의 고유진동수로 유체와 연성된 고유진동수를 나눈 정규 고유진동수(normalized natural frequency)는 0과 1 사이의 값을 갖게 되고, 이 값을 이용하여 유체연성 고유진동수를 일반화시킬 수 있다.

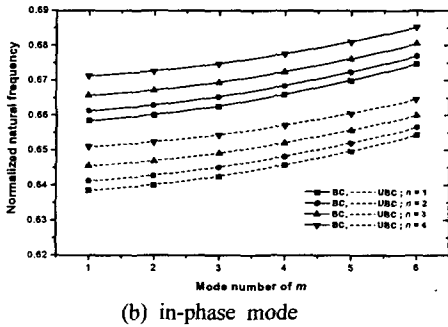
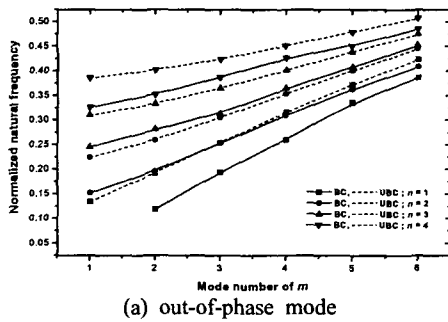


Fig. 3 Effect of fluid bounding on normalized natural frequencies (BC=Bounded fluid & clamped plates boundary condition, UBC=Unbounded fluid & clamped plates boundary condition)

Fig. 3은 두 평판의 경계조건이 완전고정일 때 유체를 둘러싸고있는 벽의 영향을 비교한 것으로 이에 대한 정규고유진동수를 각 모드별로 도시하였다. 역위상 모드의 경우 유체가 강제벽에 의해 구속되었을 때, 정규고유진동수는 모드 수에 상관없이 구속되지 않았을 때보다 낮게 나타난다. 이는 강제벽이 유체 움직임을 구속하여 유체의 부가질량 효과를 증

가시킴으로써 유체와 접하고 있는 경우의 고유진동수를 감소시키기 때문이다. 하지만 동위상 모드의 경우 유체가 강제벽에 구속되었을 때와 구속되지 않았을 때의 정규고유진동수가 큰 차이를 나타내지 않는데, 이는 동위상 모드에서 발생하는 수직방향 유체 유동을 강제벽이 효과적으로 제한하지 못하기 때문이다.

4.2 평판 경계조건의 영향

유체연성 고유진동수에 대한 평판 경계조건의 영향을 알아보기 위해 완전고정 경계조건과 단순지지 경계조건에 대하여 해석하고 비교하였다. 유체가 강제벽에 구속되었을 때, 완전고정 경계조건과 단순지지 경계조건의 역위상 모드의 고유진동수를 비교하면 완전고정 경계조건일 때 (2,1)모드의 고유진동수는 81.9Hz인 반면, 단순지지 경계조건일 때 동일 모드의 고유진동수는 47.7Hz로 작게 나타났다.

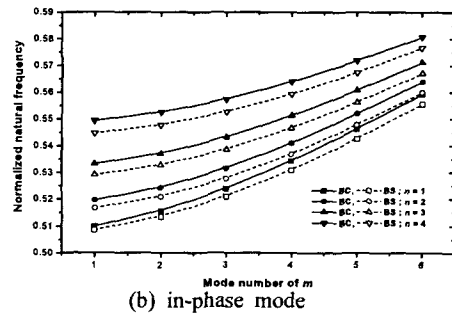
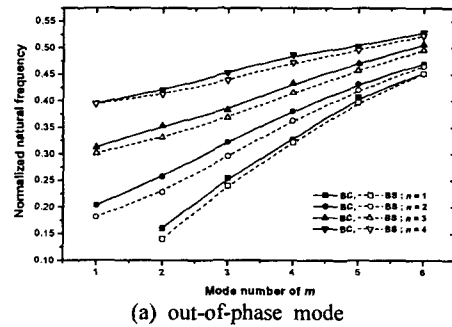


Fig. 4 Effect of boundary condition on normalized natural frequencies (BC=Bounded fluid & clamped plates boundary condition, BS=Bounded fluid & simply supported plates boundary condition)

하지만 Fig. 4에서 보는 바와 같이 각각의 경우에 대해 동일한 경계조건을 갖는 진공 중의 직사각 평판의 고유진동수로 정규화시킨 정규고유진동수의 차이는 그리 크게 나타나지 않았다. 또한 단순지지 경계조건의 정규고유진동수가 완전고정인 경우보다 작게 나타났다.

5. 결 론

동일한 두 직사각 평판 사이에 유체가 가득 채워진 유체 연성 구조물의 고유진동을 해석하기 위해 진공 중의 모드를 조합하는 Rayleigh-Ritz 방법에 의한 이론적인 해석방법을 제시하고, 유한요소 해석으로 유체연성 구조물의 동특성과 직사각 평판과 유체를 구속하는 벽의 경계조건을 달리하여 유체와 연성된 직사각 평판 구조물의 동특성을 알아보았다.

해석 결과, 유체와 연성된 두 직사각 평판의 고유진동에서 동위상 모드와 역위상 모드가 나타났고, 평판 사이의 거리에 관계없이 항상 동위상 모드의 고유진동수가 이에 해당되는 역위상 모드의 고유진동수보다 크게 나타났다. 또한 유체 경계조건의 영향은 모드 수에 상관없이 유체가 강체벽에 구속되었을 때가 구속되지 않았을 때보다 낮은 정규 고유진동수로 나타났고, 직사각 평판의 경계조건은 정규 고유진동수에 큰 영향을 주지 않음을 확인하였다.

참고문헌

1. M. K. Kwak, "Hydroelastic Vibration of Rectangular Plates," *J. of Applied Mechanics*, Vol.63, pp.110~115, 1996.
2. M. K. Kwak, "Vibration of Circular Plates in Contact with Water," *J. of Applied Mechanics*, Vol.58, pp.480~483, 1991.
3. Y. K. Cheung, and D. Zhou, "Coupled Vibratory Characteristics of a Rectangular Container Bottom Plate," *J. of Fluids and Structures*, Vol.14, No.3, pp.339-357, 2000.
4. K. F. Bauer, and W. Eidel, "Non-Linear Hydroelastic Vibration in Rectangular Container," *J. of Sound and Vibrations*, Vol.125, No.1, pp.93~114, 1988.
5. K. H. Jeong, T. W. Kim, S. Choi, and K. B. Park, "Free Vibration Analysis of Two Circular Disks Coupled with Fluid," *PVP-Vol.366*, pp.157~164, 1998.
6. 정명조, 정경훈, "간힌 유체로 연성된 두 원판의 고유진동 해석," *한국소음진동공학회 논문집 제 11권, 제9호*, pp.439~453, 2001.
7. 유계형, 정경훈, 이성철, "유체와 연성된 두 직사각 평판의 유한요소 해석," *한국정밀공학회 2001년도 추계학술대회 논문집*, pp.668~671, 2001.
8. P. Kohnke, "ANSYS Theory Reference, ANSYS Element Reference, ANSYS Command Reference, Release 5.5," SAS IP, Inc., 1998.