2계 선형상미방 경계치문제의 퍼지시스템 해법

Solution of the boundary value problem for the second order ordinary differential equations by a fuzzy system

문병수, 정종은, 황인구, 김정수

B. S. Moon, C. E. Chung, I. K. Hwang, J. S. Kim

한국원자력연구소

Korea Atomic Energy Research Institute

요 약

2계 선형 상미분방정식의 경계치 문제는 보통 해를 구하고자 하는 구간의 양 끝점에서 도함수의 값을 임의로 선정한 후 각 점에서 초기치 문제의 해를 구한 다음 적절한 1차 결합을 이용하여 구하게 된다. 이 경우 초기값과 도함수 값을 사용한 반복연산이 수반되며 따라서 오차의 누적이 불가피 하게 된다. 이 논문에서는 이같은 오차의 누적을 피할 뿐 아니라 3차 Spline 함수를 사용함으로써 오차가 $O(h^2)$인 해를 구하는 방법에 대하여 기술한다. 두 개의 경계조건과 근사값을 구하고자 하는 점에서의 함수 값을 "If x is B_i, then f is C_i"와 같은 Fuzzy Rule들로 변형하고 주어진 미분방정식을 상수 C_i들의 관계식으로 변형하여 해를 구하였다. 산출된 결과로 부터의 보간 연산은 Fuzzy System사용에 의하여 대체되었다. 이상의 방법으로 산출한 해의 근사오차가 $O(h^2)$임을 증명하였으며 3개의 예제에 대한 계산결과를 4계 Runge-Kutta 방법에 의한 해와 비교하여 기술하였다.

Key Words : Fuzzy System, 미분방정식. 경계치 문제. 3차 Spline함수, Fuzzy Rules

1. 서 론

상미분방정식의 초기치문제는 Euler방법, Runge-Kutta방법과 같은 One-step 방법이외에도 Adams-Moulton 또는 Adams-Bashforth등 방법과 같은 Multistep방법 등을 사용하여 해를 구할 수 있다[1]. 경계치문제는 2계 상미분 방정식의 경우 구간의 양 끝점에서 필요한 도함수 초기값을 임의로 설정한 후 두 개의 초기치 문제에 대한 해를 구한후 이들 두 해의 적절한 일차결합으로 부터 경계치문제의 해를 구하게 된다. 이 때 임의로 설정한 도함수의 값에 따라 근사해의 오차 값에 많은 차이가 나며 반복 연산으로 부터 발생되는 오차의 누적을 피할수 없는 어려움이다.

이 논문에서는 3차 Spline함수를 사용하여 구하고자 하는 해에 대한 근사 함수를 도출함으로써 근사오차가 $O(h^2)$인 Algorithm에 대하여 기술한다. 주어진 미분방정식을

$$y'' + G(x)y' + H(x)y = Q(x) \qquad \text{--------} \qquad (1)$$

라 하고 편의상 해를 구하고자 하는 구간을 $[0,1]$로 두고 이 구간을 N등분한 후 $h=\frac{1}{N}$, $x_i = ih$라 두고 구간 $[x_{i-2}, x_{i+2}]$을 Support으로 갖는 3차 B-Spline함수 $B_i(x)$라 할 때 $6h^2B_i(x)$는 다음 식과 같이 정의 된다.

$$\begin{cases} (x-x_{i-2})^3 \\ h^3+3h^2(x-x_{i-1})+3h(x-x_{i-1})^2-3(x-x_{i-1})^3 \\ h^3+3h^2(x_{i+1}-x)+3h(x_{i+1}-x)^2-3(x_{i+1}-x)^3 \\ (x_{i+2}-x)^3 \\ 0 \end{cases} \quad -(1)$$

방정식 (1)의 해로서, 구하고자 하는 3차 Spline함수는

$$S(x) = \sum_{i=-1}^{N+1} C_iB_i(x) \qquad \text{---------} \qquad (3)$$

형태이며 이를 Fuzzy rule로 표현하면

"If x is B_i, then y is C_i" ------- (4)

이 된다. 경계조건 $y(0)=a$와 $y(1)=b$는 각각 "If x is B_0, then y is a"와 "If x is B_N, then y is b"가 된다. 따라서 $C_0=a$, $C_N=b$로 두고 미분방정식 (1)의 y에 (3)식의 $S(x)$를 대입한 후 C_i들에 대한 선형연립방정식의 해를 구하면 된다.

미분방정식의 Fuzzy초기치 문제에 대한 연구결과는 Buckley(2,3) 등의 연구를 비롯하여 상당수 있으나, 미분

방정식의 해를 Fuzzy System형태 또는 Fuzzy Rule Base형태로 구하는 문제에 대한 연구결과는 A. Shmilovici와 O. Maimon의 연구결과[4,5] 가 대표적인 것으로 조사되었다. A. Shmilovici등은 Fuzzy Wavelet을 사용하여 적정 근사오차를 얻을 때까지의 반복연산 과정을 용이하게 수행하는 방법을 기술하고 있으나 1,2차 Spline함수를 사용했기 때문에 계산오차는 $O(h^1)$수준이다. 이 논문에서는 3차 Spline함수를 사용할 경우 근사오차가 $O(h^2)$임을 증명하였으며 예제를 통한 이의 검증결과를 기술하였다.

2. 3차Spline함수에 의한 근사표현

이 절에서는 3차 Spline함수를 사용하여 임의의 함수에 대한 근사함수를 구하는 방법에 대하여 기술한다. 편의상 구간을 $[0,1]$로 두고 이를 N등분하여 $x_j=jh$, $j=-1,0,\cdots,N+1$이라한다. Support구간이 $[x_{i-2},x_{i+2}]$이고 중심이 x_i인 B-Spline함수를 $B_i(x)$라 하면 $B_i(x)$는 식(2)와 같이 정의 된다. 임의의 3차 Spline함수는 이들의 일차결합인 $S(x)=\sum_{i=-1}^{N+1} C_iB_i(x)$으로 표현된다. 미분가능한 함수 $f(x)$가 주어져 있을 때 $N+1$개의 점 x_i, $i=0,1,2,\cdots,N$에서 $S(x_i)=f(x_i)$를 만족하고 양 끝점에서의 도함수 조건인 $S'(0)=f'(0)$와 $S'(1)=f'(1)$를 만족하는 보간함수의 경우 근사오차가 $O(h^4)$임은 널리 알려진 사실이다.

정리 1. 만약 $f(x)$가 구간 $[0,1]$에서 3회 미분가능한 함수이고 $S(x)=\sum_{i=-1}^{N+1} C_iB_i(x)$가 위에 기술한 보간 조건들을 만족하는 3차 Spline 보간함수이면 보간 오차는 $O(h^4)$이다. 즉, $f(x)-S(x)=O(h^4)$가 성립한다.

위 정리의 증명은 참고문헌 [8]에서 찾아 볼수 있다. 미분방정식의 해에 대한 3차 Spline보간함수를 구하기 위해서는 양끝점에서의 도함수 값들이 경계조건과 함께 주어져 있어야 하며 Dirichlet 경계조건의 경우 두 경계점에서의 함수 값만이 주어지기 때문에 정리1 대신 다음 정리를 사용하여 보간함수 대신 근사함수를 고려토록 한다.

정리 2. 만약 $f(x)$가 구간 $[0,1]$에서 3회 미분가능한 함수이고 $S(x)=\sum_{i=-1}^{N+1} C_iB_i(x)$가 3차 Spline함수로서 모든 $i=-1,0,1,\cdots,N+1$에 대하여 $C_i=f(x_i)$가 만족할 경우 근사오차는 $O(h^2)$이다. 즉, $f(x)-S(x)=O(h^2)$이 성립한다.

위 정리의 증명은 참고문헌 [9]에서 찾아 볼수 있다. 중요한 사실은 위와 같이 정의한 3차 Spline 함수는 Node들의 어느점에서도 $f(x_i)$와 $S(x_i)$의 값이 같지 않다는 점이다.

3. Fuzzy System에 의한 상미방의 해

주어진 2계 상미방의 경계치 문제를

$$y''+G(x)y'+H(x)y=Q(x) \qquad \text{-----} \ (5)$$

$$y(0)=a, \quad y(1)=b \qquad \text{--------} \ (6)$$

라 하자. 미분방정식 (5)를 만족하는 3차 Spline함수 $S(x)=\sum_{i=-1}^{N+1} C_iB_i(x)$를 구하고자 한다.

식(1)에 의하여 정의된 B-Spline함수는 Node점들에서

$$B_k(x_{k-1})=\frac{1}{6},\ B_k(x_k)=\frac{2}{3},\ B_k(x_{k+1})=\frac{1}{6} \ \text{--} \ (7)$$

을 만족한다. 한편, $B_i(x)$의 도함수는

$$B_k'(x_{k-1})=\frac{1}{2h},\ B_k'(x_k)=0,\ B_k'(x_{k+1})=\frac{1}{2h} \ \text{---} \ (8)$$

을 만족하며 기타 모든 Node에서는 $B_k'(x_j)=0$를 만족한다. 2차 도함수의 경우

$$B_k''(x_k)=-\frac{2}{h^2},\ B_k''(x_{k+1})=\frac{1}{h^2}\ B_k''(x_{k-1})=\frac{1}{h^2} \ \text{--} \ (9)$$

가 성립한다.

이제 이상의 관계식(7), (8), (9)를 이용하여 Node점들에서 $S(x)$의 값을 산출하면

$$S(x_k)=\sum_{j=-1}^{N+1} C_jB_j(x_k)=\frac{1}{6}(C_{k-1}+4C_k+C_{k+1}) \ \text{-} \ (10)$$

$$S'(x_k)=\sum_{j=-1}^{N+1} C_iB_i(x_k)=\frac{1}{2h}(C_{k+1}-C_{k-1}) \ \text{--} \ (11)$$

$$S''(x_k)=\sum_{j=-1}^{N+1} C_jB_j(x_k)=\frac{1}{h^2}(C_{k-1}-2C_k+C_{k+1}) \text{--} (12)$$

가 된다. 미분방정식 (5)에 $y=S(x)$를 대입하고 $x=x_k$에서의 값을 산출하면, 위 식(10), (11), (12)를 사용하여

$$\frac{1}{h^2}(C_{k-1}-2C_k+C_{k+1})+\frac{g_k}{2h}(C_{k+1}-C_{k-1}) + \frac{h_k}{6}(C_{k-1}+4C_k+C_{k+1})=q_k \qquad \text{-----} \ (13)$$

가 된다. 여기서 $g_k=G(x_k)$, $h_k=H(x_k)$, $q_k=Q(x_k)$이다. 식(13)을 정리하여

$$(6-3hg_k+h^2h_k)C_{k-1}-(12-4h^2h_k)C_k+ (6+3hg_k+h^2h_k)C_{k+1}=6h^2q_k \qquad \text{-----} \ (14)$$

를 얻는다.

위식에서 $k=1$일 경우 $C_0=y(0)$의 값이 주어져 있기 때문에 우변으로 옮기면

$$-(12-4h^2h_1)C_1+(6+3hg_1+h^2h_1)C_2=$$
$$6h^2q_1-(6-3hg_1+h^2h_1)C_0 \quad ----- (15)$$

가 된다. 한편, 맨 마지막 식에 해당하는 $k=N-1$의 경우에 $C_N=y(1)$의 값이 주어져 있기 때문에

$$(6-3hg_{N-1}+h^2h_{N-1})C_{N-2}-(12-4h^2h_{N-1})C_{N-1}=$$
$$6h^2q_{N-1}-(6+3hg_{N-1}+h^2h_{N-1})C_N \quad ---- (16)$$

이 된다. 이제까지 얻은 식은 $k=1$에 관한 식(15)와 $k=2,3,\cdots,N-2$에 대한 $N-3$개의 식(14), 그리고 $k=N-1$일 경우에 대한 식(16)등 모두 $N-1$개의 관계식이며 미지수는 $C_1,C_2,\cdots,C_{N-1}$등 모두 $N-1$개인 선형연립 방정식이 된다.

계수행렬은 Tridiagonal행렬일 뿐아니라 부분구간의 크기 h를 g_k와 h_k의 최대값의 역수 보다 작게 취하면 Diagonally Dominant행렬이 된다. 따라서, 역 행렬 산출시 계산오차는 우려대상이 아니며 다음절에 기술한 예제들의 계산 결과들로 부터 이를 확인할수 있다. 다음 정리는 이상의 방법으로 산출한 해 $S(x)$는 해석적인 해 $f(x)$로 부터의 근사오차가 $O(h^2)$임을 증명한다.

정리 3. 함수 $f(x)$가 구간 [0,1]에서 미분방정식 (5)와 경계조건 (6)을 만족하는 함수라 하자. 앞서 기술한 방법에 의해 산출된 C_i값을 사용하여 정의된 3차 Spline함수를 $S(x)=\sum_{i=-1}^{N+1}C_iB_i(x)$라 하면 근사오차는 $O(h^2)$이다. 즉, $f(x)-S(x)=O(h^2)$이 성립한다.

증명. 지정된 Node들에서 함수 $f(x)$의 3차 Spline보간함수를 $Q(x)=\sum_{i=-1}^{N+1}d_iB_i(x)$라하면 정리1에 의하여 $f(x)=Q(x)+O(h^4)$이 성립한다. 한편, 두 경계점에서는 $C_0=f_0$, $C_N=f_N$로 부터

$$d_0=f_0+O(h^4)=c_0+O(h^4),$$
$$d_N=f_N+O(h^4)=c_N+O(h^4)$$

가 성립한다. 또한, 식 (14),(15),(16)을 만족하는 C_i는 유일하다. 한편, 계수 d_i는 함수 $f(x)$의 보간 다항식으로서 같은 관계식을 만족해야한다. 따라서, 이들 식의 우변에 C_0와 C_N대신 $d_0+O(h^4)$과 $d_N+O(h^4)$을 대입한후 Gauss소거법을 적용하여 해를 구하면 우변에 적용되는 연산의 수는 $(N-1)^2$수준이며 따라서 $d_i=C_i+O(N^2h^4)$이 된다. 즉, $d_i=C_i+O(h^2)$이 된다. 즉 $C_i=d_i+O(h^2)=f_i+O(h^2)$이 성립한다. Q.E.D.

4. 예제 문제의 계산결과

이 절에서는 이제까지 기술한 알고리즘의 검증을 위하여 이를 실제 문제에 적용하여 계산한 결과에 대하여 기술한다. 오차의 비교를 위하여 4계 Runge-Kutta 방법에 의한 계산결과와 비교하였다. 후자의 경우 구간 [0,1]의 양끝점에서 도함수 값 $f(0)$와 $f(1)$을 임의로 지정하여 계산한 후 두 해의 일차결합으로 부터 해를 산출하였다. 4계 Runge-Kutta방법[1]을 적용하기 위하여 먼저 주어진 미분방병식 (5)를

$$y'=z$$
$$z'=-G(x)z-H(x)y+Q(x) \quad --- (17)$$

와 같은 연립 미분방정식으로 변환한 후 $u=(y,z)$, $u_0=(y(0),y'(0))$,

$$F(y_n,z_n)=\begin{bmatrix} z_n \\ -G(x_n)z_n-H(x_n)y_n+Q(x_n)\end{bmatrix} \quad --(18)$$

이라 두고

$$u^*=u_n+F(y_n,z_n)$$
$$u^{**}=u_n+\frac{h}{2}F(u^*)$$
$$u^{***}=u_n+hF(u^{**})$$
$$u_{n+1}=u_n+\frac{h}{6}(F(u_n)+2F(u^*)+2F(u^{**})+F(u^{***}))$$

에 의하여 연산하였다. 비교 결과 예제1의 경우는 Runge-Kutta방법의 경우 오차가 거의 없었으나 그 이외 두 예제에서는 본 논문에서 제안한 방법이 훨씬 우수한 것으로 나타났다.

예제 1. $y''+2y'+2y=0$, $y(0)=1$, $y(1)=Cos(1)e^{-1}$.

위 미분방정식에 앞서 기술한 방법을 사용하여 구간 [0,1]을 $N=4,8,\cdots,64$등분한 후 계산한 결과는 표-1과 같다. 한편, 상기 미분방정식의 해석적인 해는 $y=e^{-x}Cos(x)$임을 쉽게 확인할 수 있으며 이를 이용하여 최대 근사오차의 절대값을 산출하였다. 4계 Runge-Kutta 방법을 적용할 경우 오차는 등분의 수가 4인 경우 1.E-5수준으로 구간의 수 대비 상대적인 오차의 변화는 확인할 수 없었으나 본 논문에서 제안한 방법의 경우 계산오차는 $O(h^2)$임을 확인할 수 있다.

표-1. 예제1 경계치 문제에 대한 계산오차

등분 수	오 차	상대비율	Runge-Kutta
4	0.001544	207.8	0.000003
8	0.000411	55.4	0.000000
16	0.000103	13.8	0.000000
32	0.000026	3.5	0.000000
64	0.000007	1.0	0.000000

예제 2. $(x+1)^2y''-4(x+1)y'+6y=0,\ y(0)=3,$
$y'(0)=8.$

위 미분방적식은 Cauchy방정식으로서 해석적인 해는 $y=4(x+1)^2-(x+1)^3$임을 쉽게 확인할수 있다. 앞서 기술한 방법에 의하여 구간의 수가 $N=4,8,\cdots,64$에 대한 계산결과 오차는 표-2와 같다. 이 경우 역시 오차는 $O(h^2)$임을 확인할수 있으며 4계 Runge- Kutta방법을 사용 결과는 예제1 과는 달리 쉽게 수렴하지 않음을 알수 있다. 이 경우 반복연산으로부터 누적된 오차가 일차 결합에 의해 상쇄되지 않음을 알수 있다.

표-2. 예제2 경계치 문제에 대한 계산오차

구간의 수	오 차	오차의 비율	Runge-Kutta
4	0.02221	480.0	0.417924
8	0.00553	119.7	0.521688
16	0.00139	30.1	0.445012
32	0.00034	7.4	0.146909
64	0.00012	2.6	0.063242
128	0.00005	1.0	0.029613

예제 3. $y''-2xy'-2y=(2x-1)e^{-x},\ y(1)=e^{-1}+e,$
$y(0)=2.$

이 문제의 해석적인 해는 $y=e^{-x}+e^{x^2}$이며 계산오차는 표-3과 같다. 이 경우 역시 근사오차는 $O(h^2)$수준임을 확인할수 있으며 4계 Runge-Kutta 방법보다 제안된 알고리즘이 우수함을 확인할수 있다.

표-3. 예제3 경계치 문제에 대한 계산오차

구간의 수	오 차	오차의 비율	Runge-Kutta
4	0.004614	487.2	0.0456
8	0.001180	124.6	0.0312
16	0.000296	31.3	0.0271
32	0.000073	7.7	0.0255
64	0.000020	2.1	0.0248
128	0.000009	1.0	0.0245

4. 결 론

이 논문에서는 2계 상미분방정식의 Dirichlet형 경계치 문제에 대한 수치해법에 대하여 기술하였다. 3차 Spline함수를 사용하여 해에 대한 보간함수를 구하기 위해서는 두 경계점에서 도함수의 값이 같이 주어져야 한다. 경계점에서 도함수의 값이 같이 주어지는 경우는 흔치 않은 일이며 따라서 이 논문에서는 Fuzzy Rule을 사용하여 보간 함수가 아닌 근사함수를 산출하였다. 산출한 함수는 해석적인 해로 부터 근사오차가 $O(h^2)$임을 증명하였다. 또한, 4계 Runge-Kutta방법을 경계치 문제에 적용했을 때 보다 더 우수한 결과임을 보였다.

Acknowledgements

This work has been carried out under the nuclear research and development program supported by the Ministry of Science and Technology of Korea.

References

[1] M. A. Celia and W. G. Gray, *Numerical Methods for Differential Equations,* Prentice Hall, 1992.
[2] J. J. Buckley and T. Feuring, "Fuzzy initial value problem for Nth order linear differential equations', Fuzzy Sets and Systems, 121 (2001) 247-255.
[3] J. J. Buckley and T. Feuring, "Introduction to fuzzy partial differential equations", Fuzzy Sets and Systems, 105 (1999) 241-248.
[4] A. Shmilovici and O. Maimon, "On the solution of differential equations with fuzzy spline wavelets, Fuzzy Sets and Systems, 96 (1999) 77-99.
[5] A. Shmilovici and O. Maimon, "The fuzzy rule base solution of differential equations", Information Sciences, 92 (1996) 233-254.
[6] Byung Soo Moon, "A practical algorithm for representing polynomials of two variables by a fuzzy system with accuracy O(h^4)", Fuzzy Sets and Systems, 119(2) (2001) 135-141.
[7] B. S. Moon, D. Y. Lee, H. C. Lee, "Fuzzy System Representation of Digitized Patterns and an Edge Tracking Thinning Algorithm", Proc. Int. Fuzzy Systems Assoc. (2001) 1466-1471.
[8] P. M. Prenter, *Splines and Variational Methods,* John Wiley & Sons, 1979.
[9] B. S. Moon, "A fuzzy system representation of functions of two variables and its application to gray scale images", *J. Korea Fuzzy Logic and Intelligent Systems Soc.,* 11(7) (2001) 569-573.