에지 경비 충분 다각형의 판별 알고리즘

신찬수[0]
한국외국어대학교 전자정보공학부 cssin@hufs.ac.kr

Algorithm of determining edge-guard sufficient polygons

Chan-Su Shin[0]
School of Electronics and Information Engineering, HUFS

요 약

에지 경비 충분성이란 개념을 소개하고, 주어진 다각형이 에지 경비 충분한지를 검사하는 알고리즘을 제시한다.

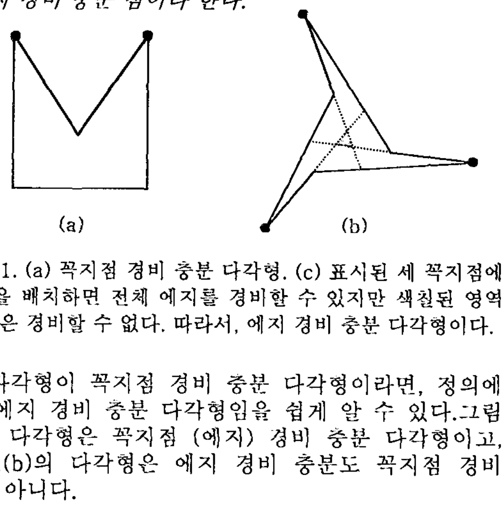
1. 서론

이차원 평면에 주어진 단순 다각형 P 의 내부 (또는 경계)의 두 점 p, q 에 대해, 두 점을 연결하는 선분이 P 의 외부와 교차하지 않는다면, p, q 가 서로 *보인다*(visible)고 정의한다. 다각형 P 의 *경계*는 에지(edge)와 꼭지점(vertex)으로 구성되며, ∂P 로 표기한다. 다각형의 P 의 내부는 경계를 제외한 안쪽 영역으로 정의되며, $\mathrm{int}P$ 로 정의한다. 본 논문에서는 다각형 P 를 그 경계와 내부를 합한 영역으로 정의한다. 즉, $P = \partial P \cup \mathrm{int}P$ 로 정의한다. 점 $q \in P$ 에서 보이는 P 의 점들의 집합을 점 q 에서의 *가시 영역*(visible region)으로 정의되고, $\mathrm{vis}_P(q)$ 로 표기한다. $\mathrm{vis}_P(q)$ 역시 단순 다각형이고, $\mathrm{vis}_P(q) \subseteq P$ 이다. P 의 k 개의 점 집합 $G = \{g_1, g_2, \cdots, g_k\}$ 에 대해, $\mathrm{vis}_P(G) = \bigcup_{g_i \in G} \mathrm{vis}_P(g_i)$ 이라 정의하자. 만약, $\mathrm{vis}_P(G) = P$ 이라면, P 의 각 점은 집합 G 에 속하는 최소한 하나의 점으로부터 보이기 때문에 G 가 P 의 모든 점을 *경비한다*고 정의하고, G 를 P 의 *경비 집합*이라 부른다. 경비 집합 G 의 크기는 G 에 속하는 경비원(g_i)의 수로 정의된다.

P 의 경비 집합 중에서 크기가 가장 작은 경비 집합을 찾는 것이 유명한 화랑 경비 문제이다. 이 문제는 다항시간(polynomial time)에 해결할 수 없는 NP-hard 문제로 알려져 있다[1]. 현실적인 조건을 첨가한 다양한 화랑 경비 문제들은 Joseph O'Rourk의 책 [1]에 정리되어 있다. 본 논문에서는 최근에 새롭게 제시된 경비 문제 중의 하나를 고려한다. P 의 모든 점을 경비하는 경비 집합을 계산하는 것은 힘들지만 꼭지점만을 경비하는 경비 집합은 상대적으로 쉽게 계산할 수 있다. 만약, P 의 모양이 충분히 단순하다면, P 의 꼭지점에 대한 경비 집합이 P 의 다른 모든 점을 경비할 수도 있다. 그림 1(a)에 나타난 다각형 P 의 모든 꼭지점을 경비하도록 경비 집합 G 를 구성하자. G 의 크기에 제한을 두지 말고 임의의 위치에 경비원을 배치해 G 를 구성하더라도 G 는 꼭지점뿐 만 아니라 P 전체를 경비하게 된다. 즉, P 의 모든 점을 경비하기 위해서 P 의 꼭지점만을 경비해도 충분하다는 것을 의미한다 이러한 다각형을 *꼭지점 경비 충분 다각형* (vertex-guard sufficient polygon)이라 한다. 더 정확하게 정의하면 꼭지점을 경비하는 임의의 경비 집합 G 에 대해, 항상 $P \subseteq \mathrm{vis}_P(G)$ 이면 P 를 *꼭지점 경비 충분*하다고 한다. 같은 방법으로 꼭지점을 경비하는 임의의 경비 집합 G 가 P 의 한 점 q 에 대해 항상 $q \in \mathrm{vis}_P(G)$ 이면 점 q 를 꼭지점 경비 충분하다고 한다. 결국, 다각형 P 가 꼭지점 경비 충분 다각형이 되기 위해서는 P 의 모든 점이 꼭지점 경비 충분 점이 되어야 함을 알 수 있다. 그 역도 성립한다. 이 문제는 [2]에서 처음으로 제시되었으며, [3]에서 공식적으로 언급되었다. 논문 [4]에서는 n 개의 꼭지점을 갖는 다각형이 꼭지점 경비 충분 다각형인지의 여부를 $O(n^2)$ 시간에 판단할 수 있는 알고리즘을 제안되었다.

꼭지점에 대한 경비 충분성 대신에 다각형의 에지에 대한 경비 충분성을 다음과 같이 정의할 수 있다.

정의 1. *∂P 를 경비하는 임의의 경비 집합 G 에 대해, 항상 $P \subseteq \mathrm{vis}_P(G)$ 이면 P 를 에지 경비 충분 다각형이라 하고, P 의 한 점 q 에 대해, $q \in \mathrm{vis}_P(G)$ 이면 점 q 를 에지 경비 충분 점이라 한다.*



(a) (b)

그림 1. (a) 꼭지점 경비 충분 다각형. (c) 표시된 세 꼭지점에 경비원을 배치하면 전체 에지를 경비할 수 있지만 색칠된 영역의 점들은 경비할 수 없다. 따라서, 에지 경비 충분 다각형이다.

어떤 다각형이 꼭지점 경비 충분 다각형이라면, 정의에 의해, 에지 경비 충분 다각형임을 쉽게 알 수 있다.그림 1(a)의 다각형은 꼭지점 (에지) 경비 충분 다각형이고, 그림 1(b)의 다각형은 에지 경비 충분도 꼭지점 경비 충분도 아니다.

주어진 다각형이 *에지 경비 충분인지를* 판별하는 알고리즘은 지금까지 전혀 알려져 있지 않다. 본 논문에서는 다항시간에, 정확히 $O(n^8)$ 시간에, 수행되는 알고리즘을 처음으로 제시한다. 이 알고리즘은 또한 다각형이 에지 경비 충분하지 않다면, 에지 경비 충분하지 않은 점들의 영역을 찾아 출력한다.

2. 에지 경비 충분 다각형의 판별 알고리즘

2.1 용어정리

단순 다각형 P 는 n 개의 각 꼭지점에는 두 개의 에지가 연결되어 (또는 인접해) 있는데, 꼭지점을 중심으로 두 에지가 이루는 다각형 내부의 각도가 180도 보다 크면 *오목*(concave)하다고 하고, 그렇지 않으면 *볼록*(convex) 하다고 한다.

P 의 한 점 q 를 고정하자. q 에서 출발하여 (q 에서 보이는) 오목 꼭지점 r 을 지나는 반직선(ray) $\overrightarrow{qr}$ 을 그려보자. 만약 r 에 연결된 두 에지가 모두 $\overrightarrow{qr}$ 에 대해 같은 *반평면*(half-space)에 존재한다면, 특별히 r 을 q 의 *문턱 꼭지점* 이라 부르고, q 의 문턱 꼭지점의 집합을 U_q 라 표기한다. 반직선 $\overrightarrow{qr}$ 이 (r 을 지나서) ∂P 와 처음으로 만나는 교차점을 $i_q(r)$ 이라 표기한다. 그리고, 점 r 과 $i_q(r)$ 를 잇는 선분 $\overline{ri_q(r)}$ 을 $s_q(r)$ 로 표기한다. 점 q 의 문턱 꼭지점 r 에 인접한 두 개의 에지 중에서 하나의 에지는 q 로부터 전혀 보이지 않지만 나머지 한 에지는 전부 또는 (r 을 포함한) 일부가 보인다. 이렇게 q 로부터 전부 또는 일부가 보이는 r 에 인접한 에지를 점 q 의 *문턱* 에지라 부르고, 점 q 의 문턱 에지의 집합을 E_q 라 표기한다. $\text{vis}_P(q)$ 의 오목 오목 꼭지점의 집합을 R_q 라 한다. 그러면, $U_q \subseteq R_q$ 이지만 $U_q = R_q$ 가 항상 성립하지는 않음에 유의하자.

선분 $s_q(r)$ 에 의해 P 가 두 개의 부 다각형(sub-polygon)으로 나뉜다. 오목 점 r 에 인접한 두 에지를 포함하는 $\overrightarrow{qr}$ 의 반평면에 포함된 부 다각형의 점들은 r 때문에 q 에서 전혀 보이지 않는다. 이 부 다각형을 q 의 포켓(pocket)이라 부르고, $d_q(r)$ 로 표기한다. 포켓 $d_q(r)$ 은 $s_q(r)$ 를 포함하지 않음에 주의하자. 부분 집합 $Q, Q' \subseteq P$ 에 대해, $Q \setminus Q'$ 은 Q 에서 Q' 을 빼고(difference) 남은 부분을 의미하고, $\text{cl}\,Q$ 를 $\text{cl}\,Q \setminus \partial Q = \text{int}\,Q$ 라고 정의하자. 그러면, $\text{cl}\,d_q(r) \setminus s_q(r) = d_q(r)$ 이 된다. 점 q 의 모든 포켓들의 집합을 D_q 라 하자. 그러면, 당연히 $D_q = P \setminus \text{vis}_P(q)$ 이 성립한다. 포켓 $d_q(r)$ 에 배치된 경비원 g 가 $P \setminus d_q(r)$ 에 있는 점 t 를 보기 위해선 선분 $\overline{gt}$ 가 선분 $s_q(r)$ 과 교차해야 한다. 그런 의미에서, 특별히 $s_q(r)$ 를 포켓 $d_q(r)$ 의 *창문* 선분이라 부른다. 마지막으로, 집합 $Q \subseteq P$ 에 대해, $\text{vis}_P(Q) = \bigcup_{\forall q \in Q} \text{vis}_P(q)$ 으로 정의한다.

2.2 기하학적인 성질들과 알고리즘

본 논문의 소정리와 정리의 모든 증명은 생략한다.

소정리 1. *한 점 $q \in P$ 를 고정하자. 임의의 경비원 집합 $G \subseteq D_q$ 에 대해 $(\text{vis}_P(G) \cap \partial P) \subset \partial P$ 이라면 점 q 는 에지 경비 충분하다. 그 역도 성립한다.*

이하에서는 설명을 간단히 하기 위해, 점 q 에서 보이는 가시영역 $\text{vis}_P(q)$ 을 간단하게 P_q 라 표기한다. 그러면, 소정리 1을 P_q 에 대해 다음와 같이 정리할 수 있다.

소정리2. *점 $q \in P$ 에 대해, $(\text{vis}_{P_q}(D_q) \cap \partial P_q) \subset \partial P_q$ 이면 점 q 는 에지 경비 충분하다. 그 역도 성립한다.*

소정리 2를 이용한 가장 간단한 알고리즘은 P 의 모든 점 q 에 대해, $(\text{vis}_{P_q}(D_q) \cap \partial P_q)$ 를 계산하여 $(\text{vis}_{P_q}(D_q) \cap \partial P_q) \subset \partial P_q$ 인지 아닌지를 검사하면 된다. 그러나, 무한히 많은 P 의 점에 대해서 검사를 할 수 없기 때문에, 새로운 방법이 필요하다. 특정 점 q 가 에지 경비 충분하다면, q 에 매우 가깝게 있는 다른 점 q' 또한 충분할 가능성이 매우 높다. (그 반대도 마찬가지다.) 이러한 성질을 이용하여, P 의 내부와 경계를 작은 영역들로 분할하는데, 각 영역에 속한 점들이 모두 에지 경비 충분하든지 아니면 모두 충분하지 않든지 둘 중의 하나만 성립하도록 분할할 수 있다면, 무한히 많은 점들을 검사하는 대신에, 각 영역에서 한 점씩 만을 임의로 선택하여 검사할 수 있다. 지금부터는 이러한 다각형 분할에 대해 설명한다.

P 의 분할은 P 에 완전히 포함되는 선분들에 의해 정의된다. 우선, 두 가지 유형의 선분들의 집합을 정의한다. 첫번째 유형의 선분 집합 S_1 은 각 오목 꼭지점 r_1 에 인접한 에지 $e = (r_1, r_2)$ 를 P 의 내부로 확장하여 얻어진 선분 $s_{r_2}(r_1)$ 으로 구성된다. 이 확장된 선분과 ∂P 와의 첫 교차점 $i_{r_2}(r_1)$ 의 집합을 I_1 이라 한다. (물론, r_2 도 오목 꼭지점이라면, 양쪽 방향으로 에지가 확장되어 두 개의 선분 $s_{r_1}(r_2)$ 와 $s_{r_2}(r_1)$ 이 정의되며, 교차점도 $i_{r_1}(r_2)$ 와 $i_{r_2}(r_1)$, 두 개가 존재한다.)

두 번째 유형의 선분은 서로 보이는 두 오목 꼭지점 r_1, r_2 을 연결하여 얻어진다. (정확하게, r_1, r_2 중의 어느 한 점이 다른 점의 문턱 꼭지점인 경우만을 고려한다.) r_1, r_2 이 서로가 서로에게 문턱 꼭지점이라면 세 개의 선분 $s_{r_1}(r_2) = \overline{i_{r_1}(r_2) r_2}$, $\overline{r_1 r_2}$, $\overline{r_1 i_{r_2}(r_1)} = s_{r_2}(r_1)$ 이 정의되고, 어느 하나만이 다른 꼭지점의 문턱 꼭지점이라면 $s_{r_1}(r_2)$ 와 $s_{r_2}(r_1)$ 중에서 한 선분과 선분 $\overline{r_1 r_2}$, 두 개가 정의된다. 이 선분들의 집합을 S_2 라 하고, 두 교차점 $i_{r_1}(r_2)$ 와 $i_{r_2}(r_1)$ 의 집합을 I_2 라 한다.

이렇게 정의된 선분들의 집합은 P 를 여러 개의 볼록 면(convex face)들로 분할한다. 이러한 분할을 $A(S_1 \cup S_2)$ 라 표기한다. 각 면은 세 개 이상의 선분 조각들과 선분들의 교차점으로 둘러싸여 있다. 다각형의 에지와 꼭지점을 구별하기 위해, 선분 조각을 *변*으로 교차점들을 *정점*으로 부르기로 한다.

이제, $A(S_1 \cup S_2)$ 의 같은 영역에 속하는 점에 대한 공통된 성질들을 살펴보자.

소정리 3. *$A(S_1 \cup S_2)$ 의 한 면 (또는 한 변)에 속하는 임의의 두 점 p, q 에 대해 (1) $E_p = E_q$, (2) $U_p = U_q$, (3) $R_p = R_q$ 다.*

점 $i_r(q)$ 는 반직선 $\overrightarrow{rq}$ 와 (r 을 제외하고) ∂P_q 와의 첫번째 교차점이다. 그러면, 선분 $\overline{i_q(r) i_r(q)}$ 은 P_q 에 완전히 포함되고, P_q 를 세 개의 부 다각형으로 나눈다. 그 중 두 개는 r 에 연결된 두 에지를 하나씩 포함하고, 나머지

하나는 두 에지 모두 포함하지 않는다. 두 에지 모두 포함하지 않는 부 다각형을 $P_q(r)$이라 표기한다. 그러면 다음의 소정리가 성립한다.

소정리 4. $\mathrm{cl\,vis}_{P_q}(D_q)=\bigcup_{\forall r\in U_q}(\mathrm{vis}_{P_q}(r)\cap P_q(r))$.

$\mathrm{vis}_{P_q}(D_q)$ 는 $\mathrm{cl\,vis}_{P_q}(D_q)$ 로부터 쉽게 유추하여 계산할 수 있고, $\mathrm{cl\,vis}_{P_q}(D_q)$ 는 소정리 4에 의하여, $\bigcup_{\forall r\in U_q}(\mathrm{vis}_{P_q}(r)\cap P_q(r))$ 를 계산하여 구할 수 있다. 그런데, $\mathrm{vis}_{P_q(r)}(r)=\mathrm{vis}_{P_q}(r)\cap P_q(r)$ 이므로 $\bigcup_{\forall r\in U_q}\mathrm{vis}_{P_q(r)}(r)$ 만 계산하면 된다. 소정리 2에 의해, $\bigcup_{\forall r\in U_q}\mathrm{vis}_{P_q(r)}(r)\cap\partial P_q=\bigcup_{\forall r\in U_q}(\mathrm{vis}_{P_q(r)}(r)\cap\partial P_q)\subset\partial P_q$ 인지를 판단하여 q 의 에지 경비 충분성을 결정할 수 있다.

단순 다각형 Q 의 경계 ∂Q 위의 두 점 a,b 에 대해, ∂Q 을 a,b 에서 잘라내면 체인(chain)이라 불리는 두 개의 경계 조각으로 나뉘는데, 그 중에서 a 에서 b 까지 시계반대방향으로 연결된 체인을 $[a,b]$ 로 표기한다. (여기서, 체인의 두 끝 점인 a 와 b 는 체인에 포함될 수도 있고 아닐 수도 있다.)

이제, q 의 문턱 꼭지점 r 에 대한 $(\mathrm{vis}_{P_q(r)}(r)\cap\partial P_q)$ 에 대해서 살펴보자. 이것은 $\mathrm{vis}_{P_q(r)}(r)$ 와 ∂P_q 의 교차점들의 집합임으로 ∂P_q 위에서 몇 개의 체인으로 표현되는 것을 쉽게 알 수 있다. $P_q(r)$ 의 꼭지점 r' 을 $P_q(r)$ 에서의 r 의 문턱 꼭지점이라 하자. 그러면, 각 체인의 끝 점은 반직선 $\overrightarrow{rr'}$ 과 $\partial P_q(r)$ 의 첫번째 교자점이거나 점 $i_q(r)$, $i_r(q)$ 이라는 것을 쉽게 알 수 있다. 그런데, $\overrightarrow{rr'}$ 과 $\partial P_q(r)$ 의 첫번째 교자점 $i_r(r')$ 의 집합을 $B_q(r)$ 라 하면, $B_q(r)\subseteq I_2$ 이 성립한다는 사실에 주목하자. 결국, $(\mathrm{vis}_{P_q(r)}(r)\cap\partial P_q)$ 의 체인들의 끝 점들은 $B_q(r)\cup\{i_q(r),i_r(q)\}$ 이다. $B_q=\{B_q(r)\mid r\in U_q\}$, $A_q=\{i_q(r),i_r(q)\mid r\in U_q\}$ 면, $\bigcup_{\forall r\in U_q}(\mathrm{vis}_{P_q(r)}(r)\cap\partial P_q)$ 을 나타내는 체인들의 끝 점들의 집합은 $B_q\cup A_q$ 이 된다. 물론, $B_q\subseteq I_2$ 이다.

새로운 선분 집합 S_3 를 다음과 같이 정의한다. 교차점 집합 I_2 의 한 점과 그 점에서 보이는 P 의 오목 꼭지점을 연결한 선분들의 집합으로 정의한다.

소정리 5. *$A(S_1\cup S_2\cup S_3)$ 의 한 면 (또는 변)에 속하는 임의의 두 점 p,q 에 대해, $B_p=B_q$ 이고 $B_p\cup A_p$ 의 점들이 ∂P 위에서 시계반대방향으로 나타나는 순서와 $B_q\cup A_q$ 의 점들이 ∂P 위에서 시계반대방향으로 나타나는 순서가 정확히 일치한다.*

이 소정리 5에 의해, $B_p\cup A_p$ 와 $B_q\cup A_q$ 의 점들이 ∂P 위에서 나타나는 순서가 일치하기 때문에 본 논문에서 핵심이 되는 다음 소정리가 성립한다.

소정리 6. *$A(S_1\cup S_2\cup S_3)$ 에서 한 면 (또는 변)에 속하는 두 점 p,q 에 대해, 점 p 가 에지 경비 충분이면 점 q 도 에지 경비 충분이다. 즉, 한 면 (또는 변)에 속한 점은 모두 에지 경비 충분하거나 모두 에지 경비 불충분하다.*

소정리 6에 의해, $A(S_1\cup S_2\cup S_3)$ 의 각 면과 변에서 한 점만 임의로 선택하여 에지 경비 충분한지 검사하면 같은 면과 변에 속하는 모든 점의 에지 경비 충분성을 알 수 있다. $A(S_1\cup S_2\cup S_3)$ 의 각 정점은 하나의 점이므로 직접 그 점에 대해 에지 경비 충분성을 검사하면 된다.

2.3 알고리즘의 복잡도

한 점 q 에 대해 에지 경비 충분한지의 여부는 소정리 2와 소정리 5에 의해 $\bigcup_{\forall r\in U_q}(\mathrm{vis}_{P_q(r)}(r)\cap\partial P_q)\subset\partial P$ 이 성립하는지 검사하는 것과 같다. $P_q(r)$ 과 $\mathrm{vis}_{P_q(r)}(r)$ 은 점 가시 영역을 구하는 알고리즘[5]를 이용하면, 모두 $O(n)$ 시간에 계산할 수 있다. $\mathrm{vis}_{P_q(r)}(r)\cap\partial P_q$ 은 ∂P_q 위에 몇 개의 체인으로 표현되고, 이것은 ∂P_q 을 시계반대방향으로 따라가면서 $O(n)$ 시간에 계산할 수 있다. 따라서 $\bigcup_{\forall r\in U_q}(\mathrm{vis}_{P_q(r)}(r)\cap\partial P_q)$ 의 계산은 $O(n\times|U_q|)=O(n^2)$ 시간이 필요하다.

$A(S_1\cup S_2\cup S_3)$ 에 있는 면, 변, 정점의 총 개수는 $|S_1|=O(n)$, $|S_2|=O(n^2)$, $|S_3|=O(n^3)$ 이므로 $|S_1\cup S_2\cup S_3|=O(n^3)$ 이다. 일반적으로 k 개의 직선들에 의해 평면을 분할한 결과 생성되는 면, 변, 정점의 총 개수는 $O(k^2)$ [6]이므로 $A(S_1\cup S_2\cup S_3)$ 의 면, 변, 정점의 총 개수는 $O(n^6)$ 까지 증가한다. 각각의 면, 변, 정점에 대해 에지 경비 충분성은 $O(n^2)$ 이므로 전체 알고리즘의 수행시간은 $O(n^8)$ 까지 증가한다.

정리1. *n 개의 꼭지점을 갖는 단순 다각형의 에지 경비 충분성을 $O(n^8)$ 시간에 계산할 수 있고, 에지 경비 충분하지 않다면, 충분하지 않은 점들을 같은 시간에 출력할 수 있다.*

4. 토의

보다 복잡한 방법을 이용하면, 한 점의 에지 경비 충분성을 $O(n^2)$ 시간이 아닌 $O(n\log n)$ 시간에 검사할 수 있다. 따라서, 전체 알고리즘의 수행시간을 $O(n^8)$ 에서 $O(n^7\log n)$ 시간으로 줄일 수 있다.

5. 참고문헌

[1] Joseph O'Rourke, *Art Gallery Theorems and Algorithms*, Oxford University Press, 1987.
[2] J. B. Mitchell, Private communication, 1999.
[3] Tae-Cheon Yang and Chan-Su Shin, Guard Sufficiency Set for Polygons. *Journal of KISS*, Vol. 28, No. 1-2, pp. 73—79, 2001.
[4] Byung-Cheol Cho, V-경비 충분 다각형의 결정 알고리즘, 한국과학기술원 전산학과 석사논문, 2001.
[5] D. T. Lee, Visibility of a simple polygon, *CVGIP*, 34:1—19, 1988.
[6] H. Edelsbrunner, Algorithms in Computational Geometry, Springer-Verlag, 1987.