두개의 랩어라운드 에지를 갖는 그리드 그래프의 해밀톤 연결성

이지연^O 박경욱 임형석
전남대학교 전산학과
{u0023055, u0030154, hslim}@chonnam.chonnam.ac.kr

Hamiltonian Connectedness of Grid Graph with Two Wraparound Edges

Ji-Yeon Lee^O, Kyoung-Wook Park, Hyeong-Seok Lim
Dept. of Computer Science, Chonnam National University

요 약

본 논문에서는 2개의 랩어라운드 에지를 갖는 $m \times n$ ($m \geq 2, n \geq 3$, n 홀수) 그리드 그래프에서의 해밀톤 성질을 고려한다. 먼저 그리드 그래프가 해밀톤 연결된(*hamiltonian-connected*) 그래프가 되기 위해 추가로 필요한 에지의 수가 2개 이상임을 보인다. 그리고 $m \times n$ 그리드 그래프의 첫 행에 랩어라운드 에지를 추가한 그래프의 해밀톤 성질을 보인 후, $m \times n$ 그리드 그래프의 첫 행과 마지막 행에 랩어라운드 에지를 추가한 그래프가 해밀톤 연결된 그래프임을 보인다.

1. 서 론

해밀톤 경로 문제는 그래프 이론 분야에서 널리 알려진 문제 중의 하나이다. 그래프의 해밀톤 사이클은 모든 정점을 포함하는 사이클을 의미하며, 모든 정점을 지나는 경로를 해밀톤 경로(*Hamiltonian Path*)라고 한다. 또한 모든 정점 쌍 s, t에 대해 s와 t를 연결하는 해밀톤 경로를 가진 그래프를 해밀톤 연결된(*hamiltonian-connected*) 그래프라고 한다. 연결망 구조가 해밀톤 사이클이나 경로를 가지고 있으면 노드나 통신 링크에 고장이 발생하더라도 링이나 선형배열을 쉽게 실현할 수 있어 파이프라인 계산 등에 유용하다고 알려져 있다. 일반적인 그리드 그래프에서 해밀톤 사이클이나 경로를 찾는 문제는 NP-complete로서, 이들이 존재하기 위한 필요조건들이나 충분조건들이 알려져 있다[1,2,3].

본 논문에서는 2개의 랩어라운드 에지를 갖는 $m \times n$ ($m \geq 2, n \geq 3$, n 홀수) 그리드 그래프에서의 해밀톤 성질을 고려한다. 먼저 그리드 그래프가 이분 그래프인 성질을 이용하여 해밀톤 연결된 그래프로 만들기 위해 추가로 필요로 하는 에지의 수가 2개 이상임을 보이고, $m \times n$ 그리드 그래프의 첫 행에 랩어라운드 에지(*wraparound edge*) 하나를 추가한 그래프에서의 해밀톤 성질을 보이고, $m \times n$ 그리드 그래프의 첫 행과 마지막 행에 랩어라운드 에지를 추가한 그래프가 해밀톤 연결된 그래프임을 보인다.

본 논문은 다음과 같이 구성되어 있다. 2절에서는 본 논문에서 필요로 하는 정의와 표기법에 대해 기술하고, 3절에서는 그리드 그래프가 해밀톤 연결된 그래프가 되기 위해 2개 이상의 에지가 필요함을 보이고, 제안한 $m \times n$ 그리드 그래프가 해밀톤 연결된 그래프임을 보인다. 마지막으로 4절에서 결론을 맺는다.

2. 정의 및 표기방법

그래프 $G_1(m, n)$는 $m \times n$ 그리드 그래프의 첫 행에 랩어라운드 에지를 추가한 그래프로, 정점 집합 $V = \{v_j^i | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$이고, 에지 집합 $E = E_r \cup E_c$이다. 여기서, $E_r = \{(v_j^i, v_{j+1}^i) | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j < n\} \cup \{(v_n^1, v_1^1)\}$, $E_c = \{(v_j^i, v_j^{i+1}) | 1 \leq i < m, 1 \leq j \leq n\}$이다. 그래프 $G_2(m, n)$는 $m \times n$ 그리드 그래프의 첫 행과 마지막 행에 랩어라운드 에지를 추가한 그래프로, 정점 집합 $V = \{v_j^i | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$이고, 에지 집합 $E = E_r \cup E_c$이다. 여기서, $E_r = \{(v_j^i, v_{j+1}^i) | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j < n\} \cup \{(v_n^1, v_1^1), (v_n^m, v_1^m)\}$, $E_c = \{(v_j^i, v_j^{i+1}) | 1 \leq i < m, 1 \leq j \leq n\}$이다. E_r에 포함된 에지를 행 에지(*row edge*)라 하고, E_c에 포함된 에지를 열 에지(*column edge*)라 한다.

행 i에 속한 정점을 $R(i) = \{v_j^i | 1 \leq j \leq n\}$, 열 j에 속한 정점을 $C(j) = \{v_j^i | 1 \leq i \leq m\}$라 하며, $R(i:i') = \bigcup_{i \leq k \leq i'} R(k)$ $(i \leq i')$, $C(j:j') = \bigcup_{j \leq k \leq j'} C(k)$ $(j \leq j')$이라 한다.

그리드 그래프는 이분 그래프임으로 모든 정점은 이분 정점 집합 B와 W로 나눌 수 있다. 정점 v_j^i는 $i+j$가 짝수이면 검정 정점 홀수이면 흰색 정점이라 하고, 검정 정점의 집합을 B, 흰색 정점의 집합을 W라고 한다. 그리고 그리드 그래프는 B와 W사이에 에지를 갖는 이분 그래프이다.

그래프 $G_1(m, n)$과 $G_2(m, n)$는 $R(i:i') \cap C(j:j')$로 인해 유도되는 부그래프는 $P_{i'-i+1} \times P_{j'-j+1}$ 그리드 그래프를 스패닝 부그래프로 가진다. 그리드 그래프에서 분지수가 2인 정점을 꼭지 정점이라고 하고, 다음과 같은 그리드 그래프의 해밀톤 성질이 알려져 있다.

보조정리 1[1]. m, n이 모두 2이상인 임의의 정수일 때, 다음이 성립한다.

(a) mn이 짝수이면, $m\times n$ 그리드 그래프는 한 꼭지 정점과 색이 다른 임의의 정점을 잇는 해밀톤 경로가 존재한다.

(b) mn이 홀수이면, $m\times n$ 그리드 그래프는 한 꼭지 정점과 색이 같은 임의의 정점을 잇는 해밀톤 경로가 존재한다.

$R(i:i')\cap C(j:j')$으로 유도되는 $m\times n$ 그리드 그래프의 부그래프를 $G\langle X\rangle$라고 쓰고, $G\langle X\rangle$의 두 정점 s, t을 잇는 해밀톤 경로가 존재하면 그 해밀톤 경로를 $H[s, t|X]$라고 한다. 그래프의 경로는 에지의 집합으로 간주한다.

3. 그래프 $G_2(m, n)$의 해밀톤 연결성

이 절에서는 먼저 $m\times n$ 그리드 그래프가 해밀톤 연결된 그래프가 되기 위해 추가되어야 할 에지가 2개임을 증명한다.

정리 1. 그리드 그래프를 해밀톤 연결된 그래프가 되도록 하기 위해 추가되어야 할 에지는 2개 이상이다.

증명 (a) mn이 짝수인 경우, $|B|=|W|$이므로 흰색 정점들 사이의 해밀톤 경로는 반드시 두 개의 검정 정점을 연속으로 지나야 하고 검정 정점들인 경우는 두개의 흰색 정점들을 연속으로 지나야만 한다. 따라서 같은 색상의 정점들을 잇는 에지가 각각 하나씩 필요하다. (b) mn이 홀수인 경우, $|B|=|W|+1$이므로 서로 다른 색을 잇는 해밀톤 경로는 반드시 두 개의 검정 정점을 연속으로 지나야 한다. 따라서 검정 정점들 사이에 하나의 에지를 추가되어야 한다. 흰색 정점들 사이의 해밀톤 경로는 검정 정점을 쌍으로 하는 에지를 반드시 두 번 지나야 한다. 따라서 검정 정점을 쌍으로 하는 에지가 반드시 두개 이상은 필요하다.

보조정리 2. $m\geq 2$, $n\geq 3$ (n은 홀수)인 그래프 $G_1(m, n)$에서 꼭지 정점 s (v_1^m 또는 v_n^m)와 임의의 정점 t 사이의 해밀톤 경로가 존재한다.

증명 $s=v_1^m$이라고 가정하자.

경우 1 m이 짝수인 경우

s와 다른 색의 정점 t를 잇는 해밀톤 경로는 보조정리 1(a)에 의해 존재한다. s와 같은 색의 정점 t는, (1) $t\in C(2:n)$인 경우, $P=(v_1^m, v_1^{m-1}, \cdots, v_1^2, v_1^1, H[v_n^1, t|C(2:n)])$로 보조정리 1(a)에 의해 해밀톤 경로가 존재하고, (2) $t\in C(1)$인 경우는 $P=(v_1^m, v_2^m, \cdots, v_{n-1}^m, v_n^m, v_n^{m-1}, v_n^{m-2}, \cdots, v_n^2, v_n^1, H[v_1^1, t\,|\,R(1:m-1)\cap C(1:n-1)])$로 해밀톤 경로가 존재한다.

경우 2 m이 홀수인 경우

s와 같은 색의 정점 t를 잇는 해밀톤 경로는 보조정리 1(b)에 의해 존재한다. s와 다른 색의 정점 t는 (1) $t\in C(2:n)$인 경우 $P=(v_1^m, v_1^{m-1}, \cdots, v_1^2, v_1^1, H[v_n^1, t|C(2:n)])$로 보조정리 1(a)에 의해 해밀톤 경로가 존재하고, (2) $t\in C(1)$인 경우는 $P=(v_1^m, v_2^m, \cdots, v_{n-1}^m, v_n^m, v_n^{m-1}, v_n^{m-2}, \cdots, v_n^1, H[v_1^1, t|R(1:m-1)\cap C(1:n-1)])$로 해밀톤 경로가 존재한다.

보조정리 3. $m\geq 1$, $n\geq 3$ (n은 홀수)인 그래프 $G_1(m, n)$에서 $s, t\in R(m)$이고 s와 t가 서로 인접할 때, s와 t를 잇는 해밀톤 경로가 존재한다.

증명 $s=v_j^m$이고 $t=v_{j+1}^m$라고 가정한다.

$m=1$일때 링의 형태를 가지므로 $P=(s, v_{j-1}^m, \cdots, v_2^m, v_1^m, v_n^m, v_{n-1}^m, \cdots, v_{j+2}^m, t)$와 같은 해밀톤 경로가 존재한다. $m\geq 2$인 경우, $P=(s, v_{j-1}^m, \cdots, v_2^m, v_1^m, H[v_1^{m-1}, v_n^{m-1}|R(1:m-1)], v_n^m, v_{n-1}^m, \cdots, v_{j+2}^m, t)$로 해밀톤 경로가 존재한다. $H[v_1^{m-1}, v_n^{m-1}|R(1:m-1)]$은 m이 2인 경우 $P=(v_1^{m-1}, v_2^{m-1}, \cdots, v_{n-1}^{m-1}, v_n^{m-1})$로, m이 2보다 큰 경우는 보조정리 2에 의해 해밀톤 경로가 존재한다.

보조정리 4. $m\geq 2$, $n\geq 3$ (n은 홀수)인 그래프 $G_1(m, n)$에서 v_1^m(또는 v_n^m)과 같은 색을 가지는 정점 s (v_j^m, $1<j<n$)와 v_j^i($1\leq i\leq m-1$)을 제외한 임의의 정점 t사이의 해밀톤 경로가 존재한다.

증명 s는 항상 홀수 열에 위치하게 된다.

경우 1 $t\in W$인 경우

$P=(H[s, v_1^1|C(1:j)], H[v_n^1, t|C(j+1:n)])$로 해밀톤 경로가 존재한다. $H[s, v_1^1|C(1:j)]$와 $H[v_n^1, t|C(j+1:n)]$는 m이 짝수인 경우는 보조정리 1(a), m이 홀수인 경우는 보조정리 1(b)에 의해 해밀톤 경로가 존재한다.

경우 2 $t\in B$인 경우

$P=(H[s, v_j^1|C(1:j)], H[v_{j+1}^1, t|C(j+1:n)])$로 해밀톤 경로가 존재한다. $H[s, v_j^1|C(1:j)]$과 $H[v_{j+1}^1, t|C(j+1:n)]$은 보조정리 1에 의해 각각 해밀톤 경로가 존재한다.

그래프 $G_2(m, n)$에 행 1부터 행 $i<m$까지 임의의 정점 s와 t를 잇는 해밀톤 경로 P가 존재한다고 가정하자. P 경로 중에서 행 i에 포함된 행 에지 (x, y)를 선택하고 행 $i+1$에 x, y와 인접한 두 정점을 x', y'라고 하면, 행 $i+1$부터 행 m까지는 보조정리 3에 의해 x'와 y'을 잇는 해밀톤 경로 P'가 존재한다. 행 i에 포함된 행 에지 (x, y) 대신 열 에지 (x, x'), (y, y')를 추가하면 그래프 $G_2(m, n)$의 해밀톤 경로를 생성할 수 있다. 이를 P와 P'의 경로 합병이라고 말하기로 한다.

정리 2. $m\geq 2$, $n\geq 3$ (n은 홀수)인 그래프 $G_2(m, n)$는 해밀톤 연결된(*hamiltonian-connected*) 그래프이다.

증명 다음의 경우들로 나누어 임의의 두 정점 s, t간에 해밀톤 경로가 존재함을 보인다.

경우 1 $s, t\in R(i)$ $(1\leq i\leq m)$, $s=v_j^i$, $t=v_k^i$라 가정한다.

경우 1.1 s, t가 인접한 경우, $G\langle R(1:i)\rangle$와 $G\langle R(i+1:m)\rangle$로 나눈다. $G\langle R(1:i)\rangle$는 보조정리 3에 의해 s와 t를 잇는 해밀톤 경로 P가 존재함으로 $G\langle R(i+1:m)\rangle$에 존재하

는 해밀톤 경로 P' 와의 경로 합병으로 해밀톤 경로를 생성할 수 있다.

경우 1.2 s, t가 인접하지 않은 경우,

경우 1.2.1 s 또는 t가 v_1^i 와 같은 색인 경우, $G\langle R(1:i)\rangle$ 와 $G\langle R(i+1:m)\rangle$로 나눈다. $G\langle R(1:i)\rangle$에서는 보조정리 4에 의해 s와 t를 잇는 해밀톤 경로 P가 존재함으로 $G\langle R(i+1:m)\rangle$에 존재하는 해밀톤 경로 P' 와의 경로 합병으로 해밀톤 경로를 생성할 수 있다.

경우 1.2.2 s, t가 v_1^i 의 색과 다른 경우, $s, t \in R(1)$, $s, t \in R(2)$, $s, t \in R(i) (3 \leq i \leq m-3)$ 으로 나누어 증명한다. **(1)** $s, t \in R(1)$ 인 경우, $G\langle R(1:2)\rangle$와 $G\langle R(3:m)\rangle$로 나누는데, $G\langle R(1:2)\rangle$에는 $P = (H[s, v_1^1 | R(1:2) \cap C(1:k-1)]$, $H[v_n^1, t | R(1:2) \cap C(k:n)])$인 해밀톤 경로가 존재함으로 $G\langle R(3:m)\rangle$ 에 존재하는 해밀톤 경로 P' 와의 경로 합병으로 해밀톤 경로를 생성할 수 있다. **(2)** $s, t \in R(2)$ 인 경우, $P = (H[s, v_1^2 | R(1:2) \cap C(1:k-1)$, $H[v_1^3, v_n^3 | R(3:m)]$, $H[v_n^2, t | R(1:2) \cap C(k:n)])$로 해밀톤 경로가 존재한다. $H[v_1^3, v_n^3 | R(3:m)]$는 보조정리 2에 의해 해밀톤 경로가 존재한다. **(3)** $s, t \in R(i)$인 경우, $P = (s, v_{j-1}^i, \cdots, v_1^i, H[v_1^{i-1}, v_{j+1}^{i-1} | R(1:i-1)], v_{j+1}^i, v_{j+2}^i, \cdots, v_{k-1}^i, H[v_{k-1}^{i+1}, v_n^{i+1} | R(i+1:m)], v_n^i, v_{n-1}^i, \cdots, t)$로 인한 해밀톤 경로가 존재한다.

경우 2 $s \in R(i), t \in R(k), i < k$ 인 경우 $s = v_j^i$ 라 가정한다.

경우 2.1 $m=2$ 이고, $s \in R(1)$, $t \in R(2)$, [3]에서 해밀톤 경로가 존재함을 보였다.

경우 2.2 $m=3$ 이고, $s \in R(1)$, $t \in R(3)$

경우 2.2.1 $s \in B$ 또는 $t \in B$ 이고, s, t가 같은 열이 아닌 경우, 보조정리 4에 의해 해밀톤 경로가 존재한다.

경우 2.2.2 $s \in B$ 또는 $t \in B$ 이고, s, t가 같은 열인 경우, $G\langle C(j:n)\rangle$ 에는 보조정리 1(b)에 의해 s와 t를 잇는 해밀톤 경로가 존재하고 $G\langle C(1:j-1)\rangle$ 는 $j-1$ 이 짝수이므로 그리드 그래프의 해밀톤 사이클 특성에 의해 사이클이 존재한다. $G\langle C(j:n)\rangle$ 의 해밀톤 경로 중에서 $C(j)$ 에 포함된 에지 (x, y) 를 선택하고 $G\langle C(1:j-1)\rangle$ 의 사이클 경로 중 $C(j-1)$ 에 포함된 에지 중 (x, y) 와 인접한 에지를 선택하여 (x', y') 라 두고 에지 (x, y)대신 $(x, x'), (y, y')$를 추가하면 그래프 G의 해밀톤 경로를 생성할 수 있다.

경우 2.2.3 $s \in W$이고 $t \in W$는, $P = (H[s, s' | R(1:2)]$, $H[t', t | R(3)])$로 인해 해밀톤 경로가 존재한다. 여기에서 s' 는 $s' \in R(2)$ 으로 t'에 인접한 정점이다. t'는 $t' \in R(3)$ 으로 정점 t에 인접한 정점이다. $H[s, s' | R(1:2)]$ 에서 s' 는 v_1^2 와 같은 색이므로 보조정리 4에 의해 해밀톤 경로가 존재한다. $H[t', t | R(3)]$ 는 보조정리3에 의해 해밀톤 경로를 가진다.

경우 2.3 $m \geq 3$ 이고 $s \in R(1)$, $t \in R(2)$ 인 경우,

경우 2.3.1 $s \in W$이고 $t \in W$, $G\langle R(1:2)\rangle$는 보조정리 4에 의해 s와 t을 잇는 해밀톤 경로 P가 존재함으로 $G\langle R(3:m)\rangle$에 존재하는 해밀톤 경로 P' 와의 경로 합병으로 해밀톤 경로를 생성할 수 있다.

경우 2.3.2 $s \in W$이고 $t \in B$, s, t가 같은 열에 있는 경우와 그렇지 않는 경우로 나누어 증명한다. **(1)**같은 열에 있는 경우는 $P = (H[s, s' | R(1)], H[t', t | R(2:m)])$로 해밀톤 경로가 존재한다. 여기에서 s'는 s와 인접하고 t'와 인접한 정점이다. t' 는 t와 인접하고 s'와 인접한 정점이다. $H[s, s' | R(1)]$ 와 $H[t', t | R(2:m)]$ 는 보조정리 3에 의해 해밀톤 경로가 존재한다. **(2)** s, t가 다른 열에 있는 경우는 m이 짝수인 경우와 홀수인 경우로 나누어 증명한다. m이 짝수인 경우는 $P = (H[s, v_j^m | C(1:j)], H[v_{j+1}^m, t | C(j+1:n)])$로 보조정리 1(a)에 의해 해밀톤 경로가 존재한다. m이 홀수인 경우는 $P = (H[s, v_1^1 | C(1:j)], H[v_n^1, t | C(j+1:n)])$로 해밀톤 경로가 존재한다. $H[s, v_1^1 | C(1:j)]$는 보조정리 1(a)에 의해, $H[v_n^1, t | C(j+1:n)]$는 보조정리 1(b)에 의해 해밀톤 경로가 존재한다.

경우 2.3.3 $s \in B$인 경우, s, t가 같은 열에 있는 경우는 *경우* 2.3.2 (1)과 같고, 다른 열에 있는 경우는 보조정리 4에 의해 해밀톤 경로가 존재한다.

경우 2.4 $m > 3$ 이고 그 외인 경우 $P = (H[s, v_b^a | R(1:a)], H[v_b^{a+1}, t | R(a+1:m)])$로 보조정리 2에 의해 해밀톤 경로가 존재한다. 여기에서 $i=1$이면 $a=i+1$ 그렇지 않으면 $a=i$, $t=v_n^{i+1}$이면 $b=n-1$ 그렇지 않으면 $b=n$ 이다.

4. 결론 및 향후 연구

본 논문에서는 그리드 그래프가 해밀톤 연결된 그래프가 되기 위해 최소 2개 이상의 에지의 추가가 필요함을 보였다. 그리고 $m \times n$ ($m \geq 2, n \geq 3$, n 홀수) 그리드 그래프의 첫 행에 랩어라운드 에지를 추가한 그래프의 해밀톤 성질을 보였고, 이를 토대로 $m \times n$ 그리드 그래프의 첫 행과 마지막 행에 랩어라운드 에지를 추가한 그래프가 해밀톤 연결된 그래프임을 증명하였다.

앞으로 그리드 그래프가 해밀톤 연결된 그래프가 되도록 본 논문과는 다른 형태로 2개의 에지를 추가하는 방법에 대한 연구도 필요하리라 생각된다.

[참고 문헌]

[1] A. Itai, C. H. Papadimitriou, and J. L. Czwarcfiter, "*Hamiltonian paths in grid graphs,*" *SIAM J. Comput.* 11(4), pp. 676-686, 1982.

[2] Hee-Chul Kim and Jung-Heum Park, "*Fault Hamiltonicity of Product Graph of Path and Cycle,*" submitted for publication, 2001.

[3] C. Umans and W. Lenhart. "*Hamiltonian cycles in solid grid graphs,*" In Proc. 38th Annu. IEEE Sympos. Found. Comput. Sci, pp. 496-507, 1997.