

설계민감도해석과 FEM에 의한 전자소자의 형상최적화

류재섭, 고창섭
충북대학교 전기공학과

Design Sensitivity Analysis for Shape Optimization of Electromagnetic Device with Finite Element Method

Ryu Jae Seop, Koh Chang Seop
Dept. of Electrical Engineering, Chungbuk National University

Abstract - This paper presents a shape optimization algorithm of electromagnetic devices using the design sensitivity analysis with FEM. The design sensitivity and adjoint variable formulas are derived for the 3D FEM with edge element. This algorithm is applied to 3D electro-magnet pole shape optimization problem to make a uniform flux density at the target region.

$$[K][A] = [Q] \tag{2}$$

여기에서 $[K]$ 와 $[Q]$ 는 이산화된 요소로부터 합성된 시스템 행렬 (system matrix)과 구동 벡터 (forcing vector)이고, $[A]$ 는 상태변수로서 자기장 문제에서는 자기 벡터포텐셜 (magnetic vector potential)이다. 임의의 요소 (e)에 대해서 $[K]$ 와 $[Q]$ 는 각각 다음과 같이 표현된다.

$$K_{ij}^e = \frac{\nu^e}{18^2 V_e^3} \sum_{k=x,y,z} S_{ki} S_{kj} \tag{3}$$

$$Q_i^e = \frac{1}{36 V_e} \sum_{k=x,y,z} N_k J_{ok} \tag{4}$$

여기에서 ν^e 와 V_e 는 각각 요소 (e)의 자기저항률과 체적을 나타내며, J_o 는 입력 전류밀도를 나타낸다. S_k 와 N_k 는 형상함수로부터 계산된 값이며 각각 다음과 같이 표현된다.

$$S_{xi} = c_m d_n - c_n d_m \tag{5-a}$$

$$S_{yi} = d_m b_n - d_n b_m \tag{5-b}$$

$$S_{zi} = b_m c_n - b_n c_m \tag{5-c}$$

$$N_x = (a_m b_n - a_n b_m) + (c_m b_n - c_n b_m)\bar{y} + (d_m b_n - d_n b_m)\bar{z} \tag{5-d}$$

$$N_y = (a_m c_n - a_n c_m) + (b_m c_n - b_n c_m)\bar{x} + (d_m c_n - d_n c_m)\bar{z} \tag{5-e}$$

$$N_z = (a_m d_n - a_n d_m) + (b_m d_n - b_n d_m)\bar{x} + (c_m d_n - c_n d_m)\bar{y} \tag{5-f}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 y_i, \quad \bar{z} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 z_i \tag{5-g}$$

여기에서 계수 a, b, c, d 는 요소(e)의 네 절점의 좌표 (x, y, z)로부터 구해지는 값이며, 첨자 m 과 n 은 변 i 의 시작점과 끝점을 나타낸다[5].

형상최적화 문제에서 목적함수는 설계변수 p 와 상태변수 A 의 함수로 정의되며, 다음과 같이 표현된다 [1,3,4].

$$F_{obj} = f(p, A(p)) \tag{6}$$

설계 민감도는 설계변수에 대한 목적함수의 변화율로서 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{dF}{d[p]^T} = \frac{\partial F}{\partial [p]^T} + \frac{\partial F}{\partial [A]^T} \cdot \frac{d[A]}{d[p]^T} \tag{7}$$

여기에서 설계변수의 변화에 대한 목적함수의 편미분인

1. 서 론

최근들어 전기기기 및 전자소자의 초적화 기법 중에서 설계 민감도법에 의한 형상최적설계가 많이 이용되고 있다[1,2,3]. 설계 민감도법은 설계 변수의 수가 계산시간에 미치는 영향이 적기 때문에 상대적으로 계산시간이 짧다. 따라서 설계변수를 최적화 대상이 되는 표면의 절점으로 선택하는 유한요소해석의 경우에도 변수가 많아 지지만 설계 민감도해석을 적용하기에 유리하다.

일반적으로 최적화(optimization) 문제에서 목적함수(object function)는 최적화 대상이 되는 소자가 최적의 상태에 있을 때 최대 또는 최소가 되는 값으로 정의되며, 설계변수(design variable)와 상태변수(state variable)의 함수로 표현된다. 설계 민감도법(design sensitive analysis)은 설계변수의 민감도(sensitivity)인 설계변수의 변화에 대한 목적함수의 변화율을 계산하여 목적함수가 최적의 상태가 되는 해를 구하는 방법을 말한다[4].

본 논문에서는 3차원 유한요소법과 설계민감도 해석에 의한 형상최적화 알고리즘을 제시하였다. 계산시간의 단축을 위해서 보조변수를 도입하였고, 설계민감도와 보조변수에 관한 식을 변요소를 이용한 3차원 유한요소해석에 적용할 수 있도록 유도하였다. 제한된 알고리즘을 목표영역에서 일정한 자속밀도를 얻기위한 전자석의 3차원 형상 최적화 문제에 적용하였다.

2. 설계민감도 해석

정자장 문제를 해석하기 위한 계의 지배방정식은 맥스웰 방정식으로부터 다음과 같이 얻어진다.

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} (\nabla \times \vec{A}) = \vec{J} \tag{1}$$

여기에서 \vec{A} 는 자기벡터 포텐셜이고, μ 는 자기 투자율 그리고 \vec{J} 는 입력 전류밀도이다. 이 방정식을 풀기 위해서 유한요소법을 이용하면 다음과 같은 행렬식을 얻을 수 있다.

우변의 첫 번째 항과 상태변수의 변화에 대한 목적함수의 편미분인 두 번째 항은 목적함수 F 가 설계변수와 상태변수의 함수이기 때문에 쉽게 구할 수 있다. 그러나 두 번째 항에서 설계변수의 변화에 대한 상태변수의 변화를 $d[A]/dp$ 는 직접 구할 수 없으므로, 식 (2)를 설계변수 p 에 대하여 미분함으로써 얻을 수 있다.

$$\frac{d}{dp} ([K][A] - [Q]) = 0 \quad (8)$$

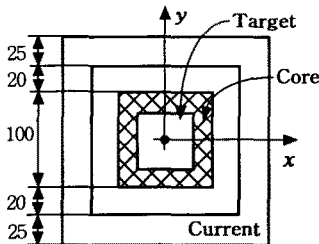
$$\frac{d[A]}{dp^T} = [K]^{-1} \left\{ \frac{d[Q]}{dp^T} - \frac{d[K]}{dp^T} [A] \right\} \quad (9)$$

여기에서 $[A]$ 는 현재의 단계에서 식 (2)를 풀어서 구한 상태변수의 해를 의미하며, 시스템 행렬 $[K]$ 와 구동 벡터 $[Q]$ 의 설계변수에 대한 미분항은 각각 다음과 같다.

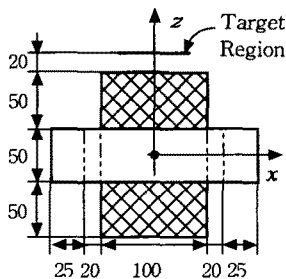
$$\begin{aligned} \frac{d[K_{ij}]}{dp^T} &= \frac{d}{dp^T} \left\{ -\frac{\nu^e}{18^2 V_e^3} \sum_k S_k S_{kj} \right\} \\ &= \frac{\nu}{18^2} \frac{1}{V_e^2} \left\{ \sum_k \frac{dS_k}{dp^T} \cdot S_{kj} + S_k \cdot \frac{dS_{kj}}{dp^T} \right\} \\ &\quad - \frac{3\nu}{18^2} \frac{1}{V_e^4} \left(\sum_k S_k S_{kj} \right) \cdot \frac{dV_e}{dp^T}, \quad k=x, y, z \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{d[Q]}{dp^T} &= \frac{d}{dp^T} \left\{ \frac{1}{36 V_e} \sum_k N_k J_{ok} \right\} \\ &= \frac{1}{36 V_e^2} \left\{ V_e \sum_k \frac{dN_k}{dp^T} J_{ok} - \sum_k N_k J_{ok} \frac{dV_e}{dp^T} \right\}, \quad k=x, y, z \end{aligned} \quad (11)$$

상태변수의 미분항 식(9)를 식 (7)에 대입하면,



(a) 평면도



(b) 측면도

그림 1. 3차원 전자석 모델의 형상

$$\frac{dF}{d[p]^T} = \frac{\partial F}{\partial [p]^T} + \frac{\partial F}{\partial A} [K]^{-1} \left\{ \frac{d[Q]}{d[p]^T} - \frac{d[K]}{d[p]^T} [A] \right\} \quad (12)$$

으로 된다. 이 식에서 두 번째항의 $\frac{\partial F}{\partial A} [K]^{-1}$ 대신에 보조변수(adjoint variable) λ 를 이용하면 다음과 같이 식을 변환할 수 있다[3,4].

$$\frac{dF}{d[p]^T} = \frac{\partial F}{\partial [p]^T} + \lambda \cdot \left\{ \frac{d[Q]}{d[p]^T} - \frac{d[K]}{d[p]^T} [A] \right\} \quad (13)$$

여기에서 보조변수 λ 는 다음의 식에서 얻어진다.

$$[K]^T \lambda = \frac{\partial F}{\partial A} \quad (14)$$

각 설계변수의 민감도를 계산한 후에 설계 변수는 다음의 식에 의해서 수정된다.

$$p_i^{new} = p_i^{old} - \alpha \cdot F \cdot \frac{dF}{d[p_i]^T} / \left\| \frac{dF}{d[p_i]^T} \right\| \quad (15)$$

여기에서 F 는 식 (6)에 의해서 계산된 현재 단계에서의 목적함수의 값을 말하며, 계수 α 는 새로 계산된 설계변수의 값이 진동하는 것을 방지하기 위한 완화계수(relaxation factor)이다.

3. 해석사례

그림 1에 보이는 바와 같이, 전자석의 상부표면으로부터 20(mm) 떨어진 표면의 자속밀도 B_z 를 일정하게 만들기 위한 3차원 전자석의 형상최적화 문제에 제안된 알고리즘을 적용하였다. 해석 영역은 그림 2와 같이, 전자석의 대칭성을 고려하여 전체 영역의 1/8만 해석하였다. 입력전류는 3000(AT)이고, 전자석의 비투자율은 500이다. 전자석의 상부표면에서 100개의 절점을 선택하여 설계변수로 사용하였다.

목표 영역은 $0 \leq x \leq 30, 0 \leq y \leq 30, z = 70$ [mm]인 영역으로 설정하였으며, 목표 영역에서의 설계 목표값은 180(Gauss)이고, 목적함수는 다음과 같이 정의하였다.

$$F = \sum_{n=1}^{np} (B_n^z - B_i)^2 \quad (16)$$

여기에서 B_n^z 는 목표 절점에서 자속밀도의 B_z 값이고, B_i 는 설계 목표값이며, np 는 목표 영역에서 선택된 절점의 개수이다.

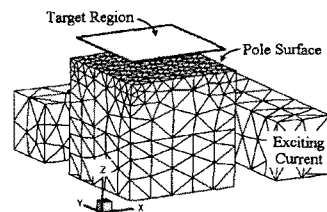


그림 2. 유한요소 해석영역

식 (16)으로 정의된 목적함수로부터 민감도는 다음과 같이 된다.

$$\frac{dF}{d\beta} = \sum_{n=1}^{n_0} 2(B_n^c - B_i) \frac{\partial B_n^c}{\partial [\beta]^T} + \sum_{n=1}^{n_0} 2(B_n^c - B_i) \frac{\partial B_n^c}{\partial [A]^T} \cdot \frac{d[A]}{d\beta} \quad (17)$$

여기에서 우변의 첫 번째 항은 설계변수가 목표영역에서 떨어진 위치에 있으므로 설계변수에 대한 자속밀도의 변화율은 0이 된다. 그리고 두 번째 항에서 상태변수(자기 벡터포텐셜)에 대한 자속밀도의 변화율은 다음과 같이 계산한다.

$$\frac{\partial B_n^c}{\partial [A]^T} = \frac{1}{\sum_i \gamma_i} \sum_i \gamma_i \frac{\partial B_i^c}{\partial [A]^T} \quad (18)$$

여기에서 i 는 n 번째 목표절점을 포함하는 요소를 나타내고, γ_i 는 요소 i 에서 절점 n 의 입체각을 나타낸다.

6번의 설계변수의 수정을 거치면서 계산된 목적함수의 값과 이 때 사용된 완화계수 α 의 크기를 표 1에 나타내었다. 최종 설계변수 수정 후에 목적함수 값은 초기 형상에서의 목적함수 값의 1.6437%로 감소하였다. 그림 3은 목적함수의 변화를 그래프로 나타낸 것이다.

그림 4에는 초기 형상에서의 자속밀도 분포와 최종 형상에서의 자속밀도 분포를 보이고 있다. 초기 형상에서 자속밀도 B_z 의 크기는 전자석의 바깥쪽보다 중심부에서 작게 나타났지만, 최종형상에서는 목표영역에서의 자속밀도 분포가 초기치에 비해서 평탄한 값을 갖는다. 그림 5에는 전자석 상부표면의 최종형상을 보이고 있다. 최종형상에서는 초기치에서 자속밀도 B_z 가 낮았던 중심부분이 상대적으로 높아진 것을 볼 수 있다.

표 1. 목적함수의 값과 완화계수

Iter.	Object Function Value	Alpha
00	7.242E-005	1.00
01	1.493E-005	0.75
02	5.744E-006	0.75
03	3.338E-006	0.50
04	1.850E-006	0.25
05	1.411E-006	0.25
06	1.190E-006	0.10

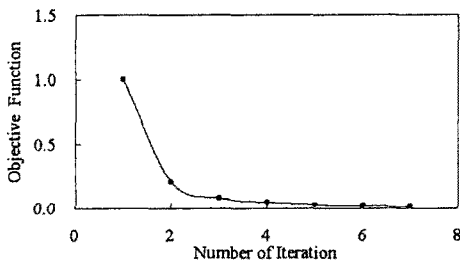


그림 3. 목적함수의 변화

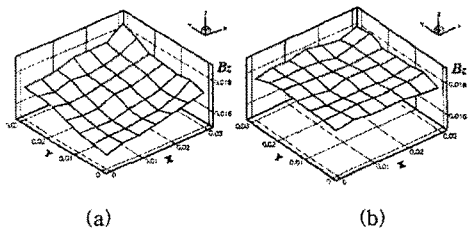


그림 4. 목표 영역에서의 자속밀도(B_z) 분포. (a) 초기형상에서의 자속밀도분포, (b) 최종형상에서의 자속밀도분포

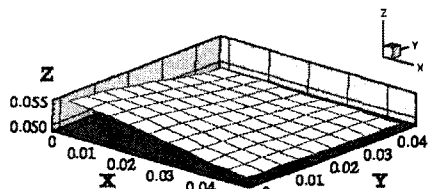


그림 5. 최적화된 전자석의 형상

4. 결 론

본 논문에서는 유한요소법과 설계 민감도 해석에 의한 3차원 전자소자의 형상 최적화 알고리즘에 대해서 연구하였다.

민감도 해석 과정에서 보조변수를 도입하여 계산시간을 단축하였고, 민감도와 보조변수에 관한 식을 변요소를 이용한 3차원 유한요소해석에 직접 적용할 수 있도록 유도하였다. 제안된 알고리즘을 3차원 전자석의 최적형상설계 문제에 적용하였다. 6번의 설계변수 수정을 통하여 목적함수의 값이 초기치의 1.6437%로 감소하였고, 목표영역에서의 자속밀도 분포도 초기치의 목표값과 유사한 분포를 나타내고 있다.

해석결과로부터 제안된 방법의 타당성을 입증하였으며, 반복과정에서 설계변수의 수정과 요소의 재분할에 많은 시간이 소요되는 단점을 보완하기 위하여 요소 재생성에 관한 연구가 계속해서 이루어져야 할 것이다.

[참 고 문 헌]

- [1] J.A.Ramirez, et al., "Sensitivity Analysis for the Automatic Shape Design of Electromagnetic Devices in 3D Using FEM", *IEEE Trans.on Magn.*, Vol.33, No.2, pp.1856-1859, 1997
- [2] C. S. Koh, et al., "Design sensitivity analysis for shape optimization of 3-D electromagnetic devices ", *IEEE Trans.on Magn.*, Vol.29, No.2, pp.1753-1757, 1993
- [3] Il-han Park, et al., "Stator Slot Shape Design of Induction Motors for Iron Loss Reduction", *IEEE Trans.on Magn.*, Vol.31, No.3, pp. 2004-2007, 1995
- [4] 박일한, 전자소자의 형상최적화를 위한 민감도해석, 박사학위논문, 서울대학교, 1990
- [5] 河瀬順洋, 最新 三次元有限要素法による 電気・電子器機 の 實用解析, 森北出版株式会社, 1997.