

전자기 시스템에서 두 가지 물성치를 고려한 위상최적설계 기법

강제남, 왕세명
광주과학기술원 기전공학과

Topology Optimization of Electromagnetic Systems with Two Materials

Jenam Kang, Semyung Wang
K-JIST(Kwangju Institute of Science & Technology)

Abstract - The topology optimization of electromagnetic systems with two materials is investigated using the FEM. The design sensitivity equation for topology optimization is derived using the adjoint variable method and the continuum approach. The proposed method is applied to the topology optimization of C-core and compared to previous study with one material.

1. 서 론

비교적 짧은 역사에도 불구하고 위상최적설계(topology optimization)는 지금까지 많은 수학자와 공학자의 관심을 가져 왔다. 전자기 시스템의 경우에 기존의 형상 최적설계(shape optimization)는 현재 설계의 개선에 중점을 두는 반면, 위상최적설계는 초기 개념설계에 중점을 두고 있다. 구조분야의 위상최적설계에 기초를 두고 있는 전자기 시스템에 대한 위상최적설계 연구는 수년 전에서야 비로소 시작되었지만 그 가능성이 점점 보여지고 있다 [1]-[3].

위상최적설계에서 두 가지 이상 물성치(복합물질)에 대한 연구는 수년 전에서야 비로소 시작하였는데, Sigmund 등이 밀도법(density method)을 이용하여 MEMS 시스템의 위상최적설계에 대한 연구(구조-전기-열 시스템)를 시작하였고, 그 가능성을 보였다 [4]. 또한, 현재 MEMS 공정제작 기술의 발전으로 보다 더 큰 힘을 발생하는 자기 시스템으로의 적용이 이루어지고 있다.

선행된 연구에서는 선형 정자기(magnetostatics) 시스템의 위상최적설계의 이론 연구와 실제 문제로의 적용을 보여 주었다 [5]. 이때에는 한가지의 물성치(투자율)만 가지는 물질을 사용하였으나, 본 연구에서는 정자기 시스템에서 두 가지의 물성치를 고려하여 위상최적설계를 수행하였다. 다시 말해서, 투자율이 낮은 물질과 높은 물질을 동시에 고려하여 위상최적설계를 수행하였다.

연속체 방법(continuum method)과 밀도법을 이용한 위상설계 민감도 방정식(topology sensitivity equation)이 유도되었으며 ANSYS와 연결되어 민감도 계산이 가능하도록 하였다. 전체적인 프로그램의 제어와 민감도 계산을 위해 설계 프로그램이 Boland C++ 환경에서 개발되었다. 최적 설계 알고리즘으로는 DOT의 SLP를 사용하였으며, ANSYS를 목적함수나 구속조건을 위한 해석기로 사용하였다.

두 가지 물성치를 고려한 위상최적설계 결과를 비교해 보기 위해서, C-core 액추에이터 코어의 위상최적설계를 수행하였다.

본 연구에 의해 개발된 두 가지 물성치를 고려한 위상최적설계 기술을 MEMS 분야에 적용하여 다양한 액추에이터 등을 보다 쉽게 설계할 수 있다.

2. 위상 최적 설계

2.1 위상 최적 설계

위상 최적 설계의 목적은 주어진 구속, 조건(constraint)내에서 어떤 목적 함수(objective function)를 최대 또는 최소로 하는 최적의 재료의 배치를 구하는 것이다.

외부로부터 자계(flux) ϕ 와 전류 J_s 가 작용하고 있는 전자기 시스템의 경우에 일반화된 위상 최적 설계 문제는 다음과 같이 표현된다.

$$\text{minimize(maximize)} f(A, \mu) \quad (1)$$

$$\text{subject to } a_Q(A, \bar{A}) = I_Q(\bar{A}) \text{ for all } \bar{A} \in \bar{X} \quad (2)$$

여기에서 $f(A, \mu)$ 는 자기 에너지(magnetic energy), 자기력(magnetic force), 자기 토크(magnetic torque)등과 같은 목적 함수이고, A 는 벡터 포텐셜(vector potential), \bar{A} 는 가상 벡터 포텐셜이다. 또한 투자율(permeability) μ 와 시스템 출력(system output) A 의 함수인 $a_Q(A, \bar{A})$ 는 에너지 쌍선형 형태(energy bilinear form)이고 $I_Q(\bar{A})$ 는 힘 선형 형태(load linear form)이다.

2.2 한 가지 물성치만을 고려한 밀도법

공기와 재료가 함께 있는 다공질의 재료(porous material)를 표현하기 위해서 투자율 μ 가 ρ 의 지수 형태로 표현되는 가상의 재료(fictitious material)를 이용한다.

$$\mu = (\mu_0 \mu_r - \mu_0) \rho^P + \mu_0 \quad (3)$$

$$\int_{\Omega} \rho(x) d\Omega \leq V, \quad 0 \leq \rho(x) \leq 1, \quad x \in \Omega \quad (4)$$

여기에서 P 는 벌칙 상수(penalization factor), ρ 는 밀도 함수(density function)이고, μ_0 는 공기의 투자율($4\pi \times 10^{-7}$)이다. 만약, 밀도 함수 ρ 가 1이면 재료의 투자율은 $\mu_0 \mu_r$ 로 특정 재료가 되고, ρ 가 0이면 투자율은 μ_0 로 공기가 된다.

최적 설계에서의 설계 변수는 밀도 함수 ρ 로 ρ 가 0과 1 사이에서 변화하면 목적 함수나 구속 조건내의 설계 변수인 투자율 μ 는 공기의 투자율인 μ_0 에서 재료의 투자율인 $\mu_0 \mu_r$ 로 변한다.

2.3 두 가지 물성치를 고려한 밀도법

두 가지 물성치를 고려한 밀도법을 적용하기 위해서 아래와 같은 순서에 의해 해를 구하게 된다.

첫 번째 step에서는, 공기와 철의 관계를 표현하는 관계식을 이용하게 된다.

$$\mu = (\mu_0 \mu_{r_1} - \mu_0) \rho_1^{P_1} + \mu_0 \quad (5)$$

두 번째 step에서는, 두 가지 물성치를 고려하는 관계식을 이용하게 된다.

$$\mu = (\mu_0 \mu_{r_1} - \mu_0 \mu_{r_2}) \rho_2^{P_2} + \mu_0 \mu_{r_1} \quad (6)$$

여기에서, μ_{r_1} 과 μ_{r_2} 는 각각 두 가지 물성치들의 비투자율을 나타낸다.

3. 위상설계민감도

3.1 전자기 시스템의 설계 민감도 해석

다음과 같이 적분 형태로 표현되는 전자기 시스템의 목적 함수는 식(7)과 같다.

$$\Psi = \int \int \int_{\Omega} g(A, \nabla A, u) d\Omega \quad (7)$$

A 는 벡터 포텐셜, u 는 식(8)과 같이 투자율과 전류 밀도의 설계 벡터이다.

$$u = [u, J_s]^T \quad (8)$$

보조 변수에 대한 보조 방정식은 다음과 같다.

$$a_u(\lambda, \bar{\lambda}) = \int \int \int_{\Omega} [g_A \bar{\lambda} + g_{\nabla A} \nabla \bar{\lambda}] d\Omega \quad (9)$$

식 (7)의 목적함수의 변분식과 직접 미분 결과를 이용하면 설계 민감도는 식(10)이 된다 [6].

$$\begin{aligned} \Psi' &= \int \int \int_{\Omega} [g_A A' + g_{\nabla A} \nabla A' + g_u \delta u] d\Omega \\ &= \int \int \int_{\Omega} g_u \delta u d\Omega + \int \int \int_{\Omega} [g_A A' + g_{\nabla A} \nabla A'] d\Omega \quad (10) \\ &= \int \int \int_{\Omega} g_u \delta u d\Omega + i'_{s_n}(\lambda) - a'_{s_n}(A, \lambda) \end{aligned}$$

3.2 정자기의 맥스웰 방정식과 변분식

정자기장(magnetostatic field)은 다음과 같은 맥스웰 방정식으로 표현된다.

$$\nabla \times H = J_s, \quad H = \frac{1}{\mu} (B - \mu_0 M), \quad \nabla \cdot B = 0 \quad (11)$$

여기에서 H 는 자계 밀도(magnetic field intensity), J_s 는 입력 전류 밀도(current density), B 는 자속 밀도(magnetic flux density), μ 는 재료의 투자율, μ_0 는 공기의 투자율이다. 여기에서 $B = \nabla \times A$ 과 식 (11)에서 H 를 소거하면 벡터 포텐셜에 대한 하나의 방정식을 얻을 수 있다.

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times A \right) = J_s + \nabla \times \left(\frac{\mu_0}{\mu} M \right) \quad (12)$$

이제 적분 형태로 표현된 변분식을 구하기 위해서 식 (12)의 양변에 가상 벡터 포텐셜을 곱한 후 전 영역에 대해 적분하고 경계 조건을 대입하면, 다음과 같은 변분식(variational equation)을 구할 수 있다 [6].

$$a_{\Omega}(A, \bar{A}) = i_{\Omega}(\bar{A}) \text{ for all } \bar{A} \in \bar{\mathcal{X}} \quad (13)$$

여기에서 $\bar{\mathcal{X}}$ 는 허용 벡터 포텐셜 공간(the space of admissible vector potential)이고, 에너지 쌍선형 형태 $a_{\Omega}(A, \bar{A})$ 는

$$a_{\Omega}(A, \bar{A}) = \int \int \int_{\Omega} (\nabla \times A) \cdot \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \bar{A} \right) d\Omega \quad (14)$$

이고, 힘 선형 형태 $i_{\Omega}(\bar{A})$ 는 식(15)과 같다.

$$i_{\Omega}(\bar{A}) = \int \int \int_{\Omega} (J_s \cdot \bar{A} + \frac{\mu_0}{\mu} M \cdot (\nabla \times \bar{A})) d\Omega \quad (15)$$

3.3 정자기의 위상 설계 민감도

식 (9)의 보조 방정식은 이 경우에는 $\nabla \bar{\lambda} = 0$ 이므로,

$$a_u(\lambda, \bar{\lambda}) = \int \int \int_{\Omega} [g_A \bar{\lambda}] d\Omega \quad (16)$$

이 된다. 만약 등가의 전류 밀도가

$$J_{eq} = g_A \quad (17)$$

이면, 보조 변수 λ 는 식 (12)의 오른쪽 항을 식 (17)로 바꾸었을 때의 해이다.

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times A \right) = J_{eq} = g_A \quad (18)$$

(10)의 설계 민감도 식과 식 (14)와 식 (15)의 에너지 변분식을 이용하면, 투자율에 대한 민감도 식은

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi}{\partial \mu} &= \int \int \int_{\Omega} \left[g_u + \frac{1}{\mu^2} (\nabla \times A) \cdot (\nabla \times \lambda) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\mu_0}{\mu^2} M \cdot (\nabla \times \lambda) \right] d\Omega \quad (19) \end{aligned}$$

이고, 전류 밀도에 대한 민감도 식은 식(20)이 된다.

$$\frac{\partial \Psi}{\partial J_s} = \int \int \int_{\Omega} [g_J + \lambda] d\Omega \quad (20)$$

4. 수치 예제

그림 1과 같은 C-core 액추에이터의 목적은 코일에 전류를 가하여 전기자(armature)를 끌어당기는 것이다. 목적에 부합하기 위해서 주어진 전류로 최대의 자기력을 낼 수 있는 코어(Core)의 위상을 구하는 위상최적설계의 필요성이 대두된다.

따라서 식 (21) - (23)과 같이 코어의 체적을 줄이면서 전기자에 유도되는 전자기력을 최대화하는 최적화 문제를 구성할 수 있다.

두 가지 물성치를 고려한 위상최적설계를 위해, μ_{r_1} ,

과 μ_{r2} 는 각각 1000과 4000의 비투자율을 가지게 하였다.

$$\text{maximize } f_x = \int \int_{\Omega} [B_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + B_y \frac{\partial B_y}{\partial y}] d\Omega_1 \quad (21)$$

$$\text{subject to } g_1 = \frac{\int \int_{\Omega} \rho A t d\Omega_2}{V_r} - 1 \leq 0 \quad (22)$$

$$g_2 = 1 - \frac{\sum_{k=1}^{NDV} (\rho_k - 0.5)^2}{NDV \cdot GI} \leq 0 \quad (23)$$

bounded to $0 \leq \rho \leq 1$, for all $\rho \in \Omega_2$

여기에서 V_r 은 최적화 후에 남아야만 하는 코어의 체적을 의미하고, GI 는 최적화 후에 코어가 가져야 하는 회색 표시 지수(gray level indicator)를 의미한다. 첫 번째 구속 조건은 체적 한계이고, 두 번째 구속 조건은 최적화 도중에 나타날 수 있는 회색 영역을 제거하기 위해 사용되었다 [5].

코일에 가해진 전류 밀도는 2.0 A/mm^2 이며, 코어 및 전기자의 너비는 모두 20mm이고, 코어의 전체 높이와 길이는 각각 60mm, 50mm이다.

그림 2는 두 가지 물성치를 가지는 정자기 시스템의 위상최적설계 수행 후의 체적이 초기 체적의 60% 미만 이도록 하고 ($V_r = 0.6 V_{initial}$), 벌칙 상수 $P=2$ 일 때의 최적화 결과를 한가지 물성치를 사용하였을 때와 비교하여 나타낸 것이다.

그림 2와 표 1를 통해, 한가지 물성치를 사용하여 얻은 최적화된 코어를 사용했을 때 전기자에 유도되는 자기력은 원래의 코어를 사용했을 때 보다 약 2.85% 정도 늘어났음을 알 수 있다. 또한, 체적은 40%를 줄임으로써 재료를 절감할 수 있다. 그리고, 두 가지 물성치를 고려하여 최적화된 코어를 사용했을 때 전기자에 유도되는 자기력은 원래의 코어를 사용했을 때 보다 약 10.1% 정도 늘어났음을 알 수 있다.

결국, 두 가지 물성치를 가지는 위상최적설계를 사용하였을 때 한가지 물성치만을 사용하였을 때 보다 더 나은 결과를 나타낸다.

그렇지만, 이를 실질적으로 제작하기에는 많은 어려움이 있다. 하지만, MEMS와 같은 제작 공정에서는 쉽게 그 구현이 가능하고 최근에 MEMS 분야에서 자기력을 이용한 설계가 많이 대두되고 있기 때문에 본 논문에서 제시된 방법의 실용 가치가 크다.

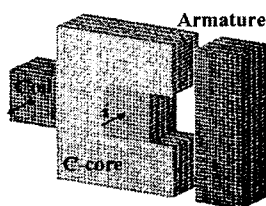
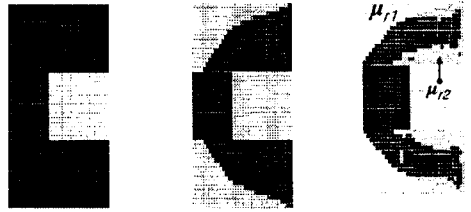


그림 1. C-core 액추에이터



(a) 초기 형상 (b)한가지의 물성치 (c)두가지 물성치
그림 2. C-core액추에이터의 위상최적설계 결과 I

표 1. 비교

	초기모델	One-material	Two-material
Force [N/m]	58.64	60.61	64.56
[%]	-	2.85	10.1

5. 결 론

본 논문에서는 두 가지 물성치를 고려한 전자기 시스템의 위상 최적 설계에 대한 연구가 수행되었다. 연속체 방법을 사용한 위상 설계 민감도식이 유도되었고, 위상 최적 설계를 수행 할 수 있는 프로그램이 개발되었다. 최적화 알고리즘으로는 DOT의 SLP가 사용되었으며, 해석 기로는 ANSYS 가 사용되었다.

제안된 밀도법과 유도된 민감도식을 사용하여 개발된 프로그램을 검증하기 위해서 주어진 전류 입력에 대해서 최대의 자기력을 낼 수 있는 C-core 액추에이터 코어의 최적화된 위상을 구하는 문제에 적용하여 보았다.

6. 후 기

이 연구는 한국과학기술원 지정 한양대학교 최적설계시스템연구센터의 연구비 지원으로 수행되었습니다.

(참 고 문 헌)

- [1] M.P. Bendsoe, and N. Kikuchi, Generating Optimal Topologies in Structural Design using a Homogenization Method, Computer Method in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 71, pp. 197-224, 1988
- [2] D. N. Dyck, and D. A. Lowther, Automated Design of Magnetic Devices by Optimizing Material Distribution, IEEE Transactions on Magnetics, VOL. 32, NO. 3, MAY 1996
- [3] J. Byun, and S. Hahn, Topology Optimization of Electrical Devices Using Mutual Energy and Sensitivity, INTERMAG 99, May 18-21, Kyongju, Korea
- [4] O. Sigmund, Design of multiphysics actuators using topology optimization Part II: two-material structures, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., vol. 190, pp. 6605-6627, 2001.
- [5] S. Wang and J. Kang, Topology Optimization of Nonlinear magnetostatics, IEEE Transactions on Magnetics, March, 2002 in print for 2002.
- [6] Edward J. Haug, K. K. Choi, Vadim Komkov, Design Sensitivity Analysis of Structural Systems. ACADEMIC PRESS, INC, 1986