

시그마 델타 구조를 사용한 웨이블릿 변환영역 사인 알고리즘 설계

김현도, 이진모, 유경렬
 한양대학교 전자전기제어계측공학과

Design of the Wavelet Transform Domain Sign algorithm using Sigma-Delta structure

Hyun Do Kim, Jin Mo Lee, and Kyung Yul Yoo
 Dept. of Electronic, Electrical, Control and Instrumentation Engineering

Abstract - 본 논문에서는 $\Sigma\Delta$ 변조된 입력신호를 갖는 적응 필터의 수렴특성을 연구하여 향상 방안을 제시하였다. 하드웨어적인 측면에서 효율적인 해상도를 내는 $\Sigma\Delta$ 변조기는 중저주파 대역의 신호를 처리하는데 널리 사용되고 있다. $\Sigma\Delta$ 변조신호는 항상 ± 1 의 값만을 갖기 때문에, 사인 알고리즘을 사용하는 적응필터와 효율적으로 결합될 수 있다. 하지만, PCM 신호에 대비하여 $\Sigma\Delta$ 변조 신호의 상대적인 길이가 길어 이를 처리하는 적응필터의 길이가 증가하고, 아울러 사인 알고리즘 자체가 갖는 수렴속도의 문제점 때문에 이러한 결합은 불안정한 수렴 특성을 보이게 된다. 본 연구에서는 $\Sigma\Delta$ 변조된 입력신호에 대하여 웨이블릿 변환을 적용한 변환영역 적응필터를 설계하였으며, 수렴속도가 향상됨을 시스템 식별의 응용예를 통하여 검증하였다.

과 같이 나타낼 수 있다. 그러므로 입력신호는 시스템에 영향을 받지 않게 되고 양자화 잡음은 $(1 - z^{-1})$ 의 고역 통과 필터에 의해 필터링 된다. 이것은 $\Sigma\Delta$ 구조의 피드백에 의한 것으로 일반적인 PCM 시스템보다 주파수 영역에서 신호 대 양자화잡음비를 증가시키고 변환기의 출력은 +1과 -1의 단일 bit 을 갖는다[1].

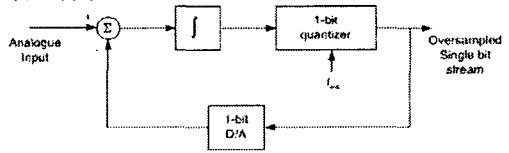


그림 1. 1차 $\Sigma\Delta$ 변환기

FIR 필터를 구현하는 데 있어서 PCM ADC를 사용할 경우 높은 해상도를 요구하기가 어렵고 실수 연산에 따른 곱셈기가 복잡해지는 단점이 있다. 이러한 문제를 해결하는 방법의 하나로 $\Sigma\Delta$ 변환기를 사용하여 입력신호나 필터계수를 변환하는 방법이 제안되었다[3]. $\Sigma\Delta$ 변환기를 사용할 경우 신호가 하나의 bit으로 표현되므로 필터의 동작에 있어 곱셈연산을 줄일 수 있어 구조를 단순화 할 수 있는 장점을 가지게 된다. 이러한 필터를 구현하는 방법에는 필터계수는 $\Sigma\Delta$ 변환하고 입력신호를 PCM 변환하는 방법과 필터 계수는 PCM 변환을 하고 입력신호를 $\Sigma\Delta$ 변환하는 방법이 있다. 첫 번째 구현의 경우 입력신호를 PCM 신호로 변환하고 interpolate시키는 과정이 필요로 하게 된다. 이러한 과정은 입력신호에 높은 해상도를 갖는 변환기를 구현하기가 어려운 단점이 있다. 두 번째 구현의 경우 coder와 A/D변환기로서 $\Sigma\Delta$ 변환기를 사용할 수 있기 때문에 첫 번째의 구현보다 높은 해상도를 얻을 수 있는 장점을 갖는다. 그러므로 본 논문에서는 두 번째 경우의 필터구조를 사용하였다. 이러한 구조는 oversample 된 $\Sigma\Delta$ 입력신호가 필터의 입력으로 사용되고 필터의 계수가 Nyquist rate의 PCM으로 부호화 되었으므로 입력신호는 f_s 의 oversampling rate를 갖고 필터계수는 f_s 의 Nyquist rate를 갖게 되므로 필터의 동작에 있어서의 sampling rate를 맞추기 위해 입력신호에 oversampling ratio($R=f_s/f_c$) 만큼의 지연을 필요로 한다. 이러한 지연에 대응하여 필터의 계수 중간에 $(R-1)$ 개의 zero를 넣어주어 sampling rate를 맞추어준다.

1. 서 론

아날로그 신호를 디지털 신호로 변환하는 ADC(Analog-to-Digital Converter)에는 여러 형태가 있으며, 신호 대역폭, 출력 해상도, 그리고 하드웨어 구현의 용이성 측면에서 나름대로의 장단점을 갖는다. 가장 일반적인 것이 Nyquist 주파수에서 동작하는 Nyquist ADC이다 (통상 PCM 변환기로 불리우기도 한다). 가장 친숙한 형태의 변환기지만, 높은 출력 해상도를 갖도록 제작하기가 매우 힘들고, anti-aliasing filter와 같은 주변 아날로그 회로 소자를 설계가 어려워진다. 하드웨어 구현적인 측면에서는 $\Sigma\Delta$ -ADC가 대안이 될 수 있다. $\Sigma\Delta$ -ADC는 비교적 적은 대역폭을 갖는 신호에 대하여 최선의 해상도를 내는 것으로 갖는다. 따라서, 4 kHz의 대역폭을 갖는 음성신호, 혹은 20~24 kHz의 대역폭을 갖는 음향신호에 대하여 각각 14-bit와 16~18-bit 정도의 비교적 높은 해상도가 요구되는 응용에 있어서 가장 효율적인 선택이 된다. 이외에도 $\Sigma\Delta$ -ADC가 갖는 장점은 다음과 같다. 먼저, 하드웨어적인 회로소자의 구현이 용이하고, 주변 아날로그 신호처리 회로가 단순하다. 아울러, 출력신호가 1-bit로 표현되기 때문에 신호의 연산이 매우 용이하다. 이러한 이유 때문에 $\Sigma\Delta$ 변조된 신호를 사용하는 디지털 회로에 대한 연구가 활발하게 진행되어 왔으며, 그 범위가 적응 필터에까지 이르고 있다.

2. 웨이블릿 변환영역 $\Sigma\Delta$ 적응필터

2.1 $\Sigma\Delta$ 적응필터

2.1.1 $\Sigma\Delta$ 디지털 시스템

(그림 1)은 일반적인 1차 $\Sigma\Delta$ 변조 A/D 시스템의 블록다이어그램이다. 양자화기가 ± 1 의 크기를 갖는 랜덤 백색잡음으로 모델되고 입력신호도 잡음과 같다고 가정하면 $\Sigma\Delta$ 변환기 모델의 표현식은

$$Y(z) = X(z) + (1 - z^{-1})N(z) \quad (1)$$

2.1.2 $\Sigma\Delta$ 적응필터

일반적인 사인 알고리즘의 error값과 필터 출력 값은

$$e_k = d_k - y_k \quad (2)$$

$$y_k = x_k^T w_k \quad (3)$$

과 같이 정의되고, 여기서 사인 알고리즘은 평균 자승오차를 추정하기 위해 순시 자승 오차를 사용하는 대신에 순시오차 절대치를 오차기준으로 사용한다. 즉,

$$\hat{\xi} = 2|e(n)| \quad (4)$$

그러므로 gradient estimate는 다음과 같이 계산된다.

$$\Delta \hat{\xi}(n) = 2[\nabla e(n)] \text{sgn}[e(n)] \quad (5)$$

위(5)식의 gradient estimate를 (6)식의 steepest descent 알고리즘에 치환하면 (7) 식과 같은 사인 알고리즘을 얻을 수 있다.

$$w_{k+1} = w_k - \frac{\mu}{2} \nabla \xi(n) \quad (6)$$

$$w_{k+1} = w_k + \mu x_k \text{sgn}[e_k] \quad (7)$$

이러한 사인알고리즘을 $\Sigma\Delta$ FIR 필터 구조를 갖는 적응필터에 적용할 경우의 구조는 (그림 2)와 같다.

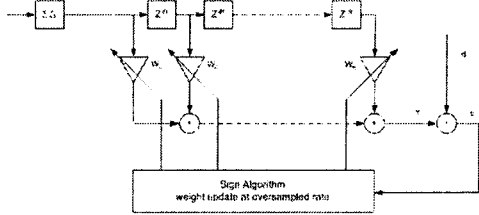


그림 2. $\Sigma\Delta$ 변환된 입력을 갖는 사인 알고리즘 적응필터

위와 같은 구조에서 사인 알고리즘을 통해 업데이트된 필터 계수는 입력신호 x_k 가 $\Sigma\Delta$ 변환기로 부호화 되므로 필터출력 y_k 값은 oversample rate를 갖는 신호가 되고 필터의 출력 y_k 과 목적신호 d_k 의 차이 오차값 e_k 또한 oversample rate의 다중 bit신호가 되므로 갱신된 필터계수 또한 oversample rate를 갖게 된다[4]. 이러한 계수를 필터에 적용할 때는 필터계수를 downsample하여 적용한다. 여기서 downsample의 의미는 필터계수에서 R번째 이외의 계수를 zero로 만들어 준다는 것을 의미한다. 이러한 구조는 입력신호가 단일 bit으로 표현되므로 필터의 동작할 때 곱셈연산이 줄어들어 구조적으로 단순한 이점을 갖게 된다. 또한 사인 알고리즘의 step size는 oversampled 시스템에서 입력신호의 자기상관행렬의 최대 고유치가 Nyquist 시스템에서 보다 R(oversampling ratio) 배만큼 커지게 되므로 사인 알고리즘의 안정성을 유지하기 위해 step size Nyquist system의 step size보다 R배만큼 작은 step size가 필요하게 된다. 이러한 사인 알고리즘은 일반적인 LMS 알고리즘보다 수렴율이 떨어지고 정상상태 오차가 증가하는 단점을 가지고, 또한 입력신호가 유색화(colored) 되었을 경우 LMS 알고리즘의 경우와 마찬가지로 수렴속도가 느려지는 단점도 있다. 이러한 단점을 웨이블릿 변환을 사용하여 성능을 향상시킨다.

2.3 웨이블릿 변환과 변환행렬 설계

이산웨이블릿변환은 옥타브밴드 웨이블릿 필터뱅크로서 계산된다(그림3). 연속시간 웨이블릿에 의해 수행된 주파수 분할은 옥타브 밴드 웨이블릿 필터뱅크를 이용하면 가능하다. 옥타브 밴드 웨이블릿 필터뱅크를 구성하는 필터는 PR-QMF뱅크 조건을 만족하여야 하고 이러한 필터를 설계하는 방법에는 여러 가지가 있다. 이 중에서 필터 특성이 좋고 많이 사용되고 있는 maximally flat method를 이용한다. 설계방법은 $\omega = \pi$ 의 위치에 많은 수의 zero를 갖는 저역 통과 필터를 찾는 것이고 $\omega = \pi$ 에 많은 수의 zero를 갖는 자기상관 함수를 설계하는 것과 같다. 이러한 방법으로

$$H_0(z) = (1+z^{-1})^k R_0(z^{-1}) \quad (8)$$

과 같은 저역통과 필터를 얻고 이로부터 alternating flip에 의해 원하는 고역통과 필터를 얻는다[2].

k값에 따라 필터의 길이와 그에 따른 주파수 응답특성 및 이에 대응하는 연속시간 웨이블릿 기저의 모양이 달라진다. 따라서 $\Sigma\Delta$ 사인 알고리즘에 적합한 필터구조는 계산상의 단순성을 유지하기 위해 k=1인 경우를 설정한다.

유한 지속 시간을 갖는 신호나 TDL(Taped Delay Linc) 형태의 적응필터에 웨이블릿을 적용하기 위해서는 필터의 길

이 N개의 단위로 입력되는 신호에 대해서 $N \times N$ 웨이블릿 변환행렬을 구성해야 한다. 이 변환 행렬을 구성하기 위해서는 (그림 3)의 각 분해단계마다 상응하는 웨이블릿 변환 행렬을 정의하고 이들을 결합하여 최종 변환행렬을 구성한다.

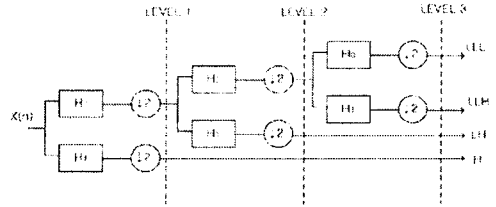


그림 3. 3단계 옥타브밴드 트리구조

k 단계에서 저역 및 고역 통과 필터를 $H_i^{(k)}$ ($i=0$:저역, $i=1$:고역)라 하면 이들을 결합하여 해석 벡터를 정의 할 수 있다.

$$D_k = \begin{bmatrix} H_0^{(k)} \\ H_1^{(k)} \end{bmatrix} \quad (9)$$

D_k 는 입력신호를 두 개의 대역으로 나누는 것이고 만약 k단계까지 분해가 가능하다면 각 단계에서 변환 행렬은 다음과 같이 정의된다.

$$W_1 = D_1, W_2 = \begin{bmatrix} D_2 & 0 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}, \dots, W_k = \begin{bmatrix} D_k & 0 \\ 0 & I_k \end{bmatrix} \quad (10)$$

이것은 전 단계에서 얻어진 저역밴드 부분은 계속 분할해 주고 고역부분은 남겨두는 것으로서 시간 주파수 영역 해상도가 조절됨과 동시에 주파수 영역에서 옥타브밴드 트리구조를 구성함을 의미한다.

2.4 웨이블릿 변환영역 $\Sigma\Delta$ 적응필터

웨이블릿 변환영역 $\Sigma\Delta$ 적응필터는 2.3에서 설계한 $N \times N$ 웨이블릿 변환행렬을 입력신호에 적용시켜 수렴속도를 향상시키는 것이다. 이러한 구조는 그림 4에서와 같이 TDL형태의 필터구조에 $N \times N$ 웨이블릿 변환행렬을 삽입하여 구성한다.

이렇게 변환된 새로운 입력벡터는

$$z(n) = [z_0(n) \ z_1(n) \ \dots \ z_{N-1}(n)]^T = Wx(n) \quad (11)$$

과 같이 된다.(여기서 W 는 $N \times N$ 직교 웨이블릿 변환이다.) 이렇게 변환된 입력의 출력 값과 목적신호와 필터 출력 값의 차이인 error 신호는

$$y_k = z_k^T w_k \quad (12)$$

$$e_k = d_k - y_k \quad (13)$$

과 같이 되고 필터 계수 갱신 방정식은

$$w_{k+1} = w_k + 2\mu \Lambda^{-2} z_k \text{sgn}[e_k] \quad (14)$$

여기서,

$$\Lambda^2 \equiv \text{diag}[\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_N^2] \quad (15)$$

$$\sigma_i^2(n) = \alpha \sigma_i^2(n-1) + |z_{i(n)}|^2 \quad (16)$$

과 같이 된다.

일반적인 변환영역 적응 알고리즘에서처럼 (14)식에서 error surface contour를 hyperspherical로 만들어주기 위해서 전력 정규화 과정이 들어가야만 한다 [2].

(14)식이 우리가 원하는 웨이블릿 변환영역 $\Sigma\Delta$ 사인알고리즘의 식이 된다.

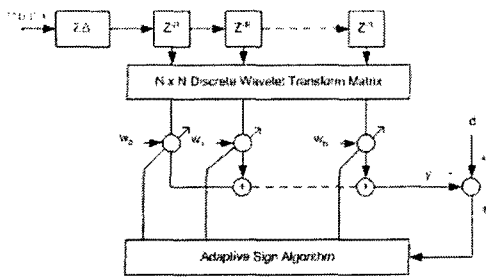


그림 4. 웨이블릿 변환영역 $\Sigma\Delta$ 사인알고리즘 적응필터

2.5 모의실험 및 결과

적용필터의 응용의 한 예인 시스템 식별을 통해서 제안된 알고리즘의 성능을 검증하였다. 모델시스템과 적용필터의 차수는 모두 16으로 하였고, 입력은 백색잡음과 백색잡음을 -0.8 에 극점을 갖는 단일극 AR과정으로 표현되는 시스템 출력으로 설정하였다. 적용필터의 계수들은 초기 값으로 0을 갖고 망각지수 α 는 0.9로 설정하였다. step size μ 값은 Nyquist 시스템의 경우 정상상태 오차까지 도달하는데 걸리는 최소한의 수렴속도를 갖는 값을 시행착오적인 방법으로 결정하고 oversampling 시스템의 경우 Nyquist 시스템의 step size 보다 oversampling ratio(R)배 만큼 적은 값을 설정하였다. 측정시 포함되는 잡음은 AWGN으로 하였으며, SNR은 20dB인 측정잡음을 설정하였다. 웨이블릿 변환에 사용되는 변환행렬은 계산상의 단순성을 유지하기 위해 $k=1$ 인 Haar 기저를 사용하여 설계하였다.

(그림 5)에서 Nyquist PCM 시스템의 경우 백색잡음을 입력으로 사용하고 oversample $\Sigma\Delta$ 시스템의 경우 위의 입력신호를 16배로 oversampling하여 적용하였을 경우의 학습곡선을 PCM 경우와 비교하기 위해 1/16배로 downsample하였다. Nyquist PCM 시스템과 oversampled $\Sigma\Delta$ 시스템이 같은 성능을 나타냄을 보여준다. (그림 6)은 유색화된 Nyquist PCM 입력신호를 갖는 시스템에서의 학습곡선을 비교하였다. 일반적인 알고리즘 보다 웨이블릿 영역에서의 알고리즘의 수렴속도가 더 빠르지만 연산량은 다른 알고리즘과 차이가 없을 수 있다(2). (그림 7)은 웨이블릿 영역에서 유색화된 Nyquist PCM 입력신호를 갖는 시스템과 oversampled $\Sigma\Delta$ 입력신호를 갖는 시스템의 비교이다. 그림에서 보는바와 같이 웨이블릿 영역에서는 $\Sigma\Delta$ 적용필터의 수렴속도가 더 좋은 결과를 얻었다.

3. 결 론

본 논문에서는 $\Sigma\Delta$ 적용필터 구조에 단순화된 적응알고리즘인 사인알고리즘을 사용하고 입력신호에 웨이블릿 변환을 적용하여 Nyquist PCM 입력을 사용한 웨이블릿 변환영역 적용필터와 성능을 비교 검토하였다. 일반적인 $\Sigma\Delta$ 적용필터는 입력신호가 하나의 bit로 표현되기 때문에 필터가 동작을 하는데 곱셈연산을 줄일 수 있어 구조적으로 단순한 장점을 갖고 성능은 PCM 시스템의 경우와 같은 결과를 나타낸다. 이러한 $\Sigma\Delta$ 적용필터에 웨이블릿 변환을 이용한 사인알고리즘을 적용한 경우 Nyquist PCM 시스템과 같은 구조와 비교하였을 때 웨이블릿 변환영역 Nyquist PCM 시스템 보다 웨이블릿 변환영역 $\Sigma\Delta$ 시스템이 보다 나은 성능을 나타내는 것을 확인하였다.

[참 고 문 헌]

[1] P. M. Aziz, H. V. Sorensen and J. Van Der Spiegel, "An Overview of Sigma-Delta converters", *IEEE*

Signal Processing Magazine, Vol. 13(1), Jan. 1996
Page(s): 61 -84

- [2] 이용재, 유경렬, "웨이블릿 변환영역 사인 알고리즘 설계", *대한전기학회 하계학술대회 논문집*, pp.2442 - 2444, 1998
- [3] Wong P.W and Gray R.M, "FIR filter with sigma-delta modulation encoding", *IEEE Trans. Signal Process.* 1990, vol.38(6),pp.979-990
- [4] E.Pfann, R.W Stewart and M.W. Hoffman, "Oversampled sigma-delta LMS adaptive FIR filters", *Vision, Image and Signal Processing, IEE Proceedings*, Vol.147(5), Oct. 2000 Page(s): 385 -392
- [5] J.Juni and R.W Stewart, "Implementing adaptive DSP algorithms using oversampled sigma delta strategies", *Oversampling and Sigma-Delta Strategies for DSP, IEE Colloquium on*, 1995 Page(s): 9/1 -9/9

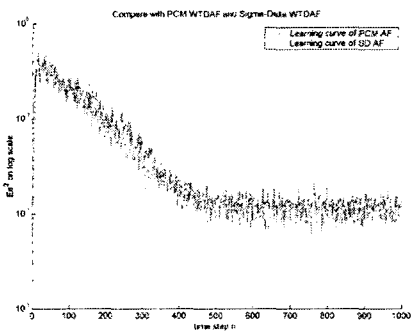


그림 5. Nyquist PCM 적용필터와 oversampled $\Sigma\Delta$ 적용필터의 학습곡선 비교

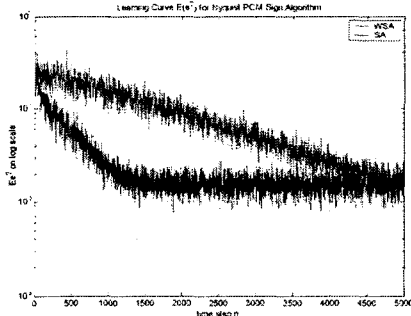


그림 6. Nyquist PCM 신호를 갖는 사인 알고리즘과 웨이블릿 영역에서의 사인 알고리즘 비교

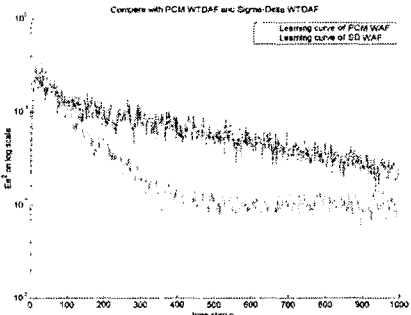


그림 7. 웨이블릿 변환영역 PCM 시스템과 웨이블릿 변환영역 $\Sigma\Delta$ 시스템의 학습곡선 비교