2002년도 대한전기학회 하계학술대회 논문집 2002.7.10-12

슬라이딩 모드를 이용한 강인한 칼만 필터의 설계

박 승 규*, 안 호 균*, 김 태 원**, 최 성 진***
*창원대학교 전기공학과, **창원기능대 전기과, ***수원대학교 전기공학과

A Design of Robust Kalman Filter using Sliding mode

Seung-Kyu Park*, Ho-Kyun Ahn*, Tae-Won Kim**, Sung-Jin Choi***
*Dept. of Electrical Engineering, Changwon National University
**Dept. of Electrical Engineering, Changwon polytechnic college
***Dept. of Electrical Engineering, Suwon University

Abstract - In this paper, a robust Kalman filter is proposed by introducing a new sliding mode surface. This filter can be used for the system with a matching condition The new state estimator is designed for stochastic systems with bounded uncertainties.

1. 서 론

슬라이딩 모드제어기는 파라미터와 외란에 둔감한 특성을 가지고 있으며 그 개념과 구성이 간단하기 때문에 실제 여러 분야에서 많은 적용이 이루어지고 있다.[1][2][3] 상태관측기에 있어서도 가변구조를 이용한 슬라이딩 모드의 개념이 도입되었다.[4] 그러나 제어기 구성과 근본적으로 다른 점은 슬라이딩 평면의 구성에 있다. 슬라이딩 평면의 구성은 모든 상태들에 의해서 이루어지며 상태 관측기에서도 같은 방법으로 슬라이딩 평면을 구성하려면 상태오차들을 구하여야 한다. 그러나 모든 상태들이 측정가능하지 못함으로 인하여 이것은 불가능하다. 이러한 이유로 알고있는 상태오차를 가지고 슬라이딩 평면을 구성해야 한다는 어려움이 있으며 슬라이딩 평면을 구성한다 하더라도 슬라이딩 모드를 보장할 수 있으려면 측정 불가능한 상태오차가 일정한 크기보다 작아야 한다. 본 연구에서는 슬라이딩모드를 이용한 관측기의 구성에 있어서 새로운 동특성을 추가하여 그 성능을 향상시킴과 동시에 노이즈가 존재하는 계통에 대해서 노이즈의 영향을 최소화시키는 칼만 필터의 특성을 유지하는 새로운 상태관측기를 구성하였다. 본 논문의 주된 아이디어는 슬라이딩모드를 이용하여 불확실성을 배제할 수 있었다는 사실로부터 강인함과 동시에 확률계통에도 적용이 가능한 상태관측기를 설계하였다. 결과적으로 본 연구에서 설계된 상태 관측기의 형태는 정합조건이 만족된다는 가정 하에서 슬라이딩 모드관측기와 칼만 필터를 결합한 형태가 된다.

2. 슬라이딩 상태관측기

본 장에서는 기존의 슬라이딩모드를 이용한 상태관측기에 대해서 개략적으로 설명하고 그것에 대한 문제점을 지적한다. 설명을 명확하게 하기 위하여 다음과 같은 2차 계통을 다룬다.

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u_k \tag{1}$$

여기서 y는 측정 가능한 상태이고 x는 측정 불가능한 상태이다.

위의 시스템에 대한 상태 관측기는 다음과 같이 구성된다.

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{k+1} \\ \hat{y}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_k \\ \hat{y}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u_k + \begin{bmatrix} K\,\mathrm{sgn}(\hat{y}-y) \\ -LK\,\mathrm{sgn}(\hat{y}-y) \end{bmatrix} \tag{2}$$

슬라이딩 평면은 다음과 같이 구성된다.

$$s = \hat{y}_k - y_k \tag{3}$$

오차방정식은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} e_{x(k+1)} \\ e_{y(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{xk} \\ e_{yk} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u_k + \begin{bmatrix} K\,\mathrm{sgn}(\hat{y}-y) \\ -LK\,\mathrm{sgn}(\hat{y}-y) \end{bmatrix} + D \begin{bmatrix} \hat{x}_{xk} \\ \hat{y}_{yk} \end{bmatrix} \tag{4}$$

여기서

$$D \begin{bmatrix} \hat{x}_{xk} \\ \hat{y}_{yk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_{xk} \\ \hat{y}_{yk} \end{bmatrix} = [\hat{a}_{ij} - a_{ij}] \begin{bmatrix} \hat{x}_{xk} \\ \hat{y}_{yk} \end{bmatrix} \tag{5}$$

슬라이딩모드에서는 다음식이 성립한다.

$$e_{y(k)} = \hat{y}_k - y_k$$
$$e_{y(k+1)} = \hat{y}_{k+1} - y_{k+1} \tag{6}$$

다음과 같은 식이 성립한다.

$$K\,\mathrm{sgn}(\hat{y}-y) = -a_{12}e_2 - D_1 \begin{bmatrix} \hat{x}_k \\ \hat{y}_k \end{bmatrix} \tag{7}$$

그러므로 슬라이딩모드에서의 e_2 오차의 동특성을 살펴보면 다음과 같다.

$$e_{x(k+1)} = (a_{22} + La_{12})e_{x(k)} + [L \;\; I]\, D \begin{bmatrix} \hat{x}_k \\ \hat{y}_k \end{bmatrix} \tag{8}$$

위의 오차방정식에서 오차의 정확한 동특성이 보장되지 않는다.

본 연구에서는 불확실성이 정합조건을 만족시키는 경우에 대해서 다루기로 한다. 상태관측기 구성에 있어서의 불확실성의 정합조건은 다음과 같다.

$$h(t) = C\, h_1(t) \tag{9}$$

여기서 C는 출력행렬이다.

정합조건을 만족시키는 경우의 슬라이딩모드 상태관측기의 개념 설명을 명확하게 하기 위하여 다음과 같은 2차 계통을 고려하기로 한다.

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k \tag{10}$$

여기서 y는 측정 가능한 상태이고 x는 측정이 불가능한 상태이다.

위의 시스템에 대한 슬라이딩 모드 상태 관측기는 다음과 같이 구성된다.

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{k+1} \\ \hat{y}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_k \\ \hat{y}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (u_k + Ksign(y_k - \hat{y}_k)) \tag{11}$$

외란이 정합조건을 만족시키기 때문에 sign항이 일반 슬라이딩 모드 상태 관측기와는 다르게 측정 불가능한 상태의 추정에만 사용하였다. 슬라이딩 평면은 다음과 같이 구성이 된다.

$$s = \hat{y}_k - y_k \tag{12}$$

스위칭 이득 K는 슬라이딩 모드가 일어나도록 다음과 같은 조건을 만족하도록 결정해야 한다.

$$\begin{gathered} 0 \le \sigma_{k+1} \le \sigma_k,\ \sigma_k \,\phi\, 0 \\ \sigma_k \le \sigma_{k+1} \le 0,\ \sigma_k \,\pi\, 0 \end{gathered} \tag{13}$$

이상과 같이 상태 관측기를 설계한 것은 강인한 칼만 필터를 구성하기 위한 사전작업이다. 이제까지의 상태 관측기 설계는 불확실성의 영향을 제거한다는 것이며 상태 관측기의 성능에 대한 작업은 다음 장에서 이루어 진다.

3. 칼만 필터

본 장에서는 칼만 필터의 기본적인 구조를 간단히 살펴보고 그 문제점을 지적한다. 칼만 필터는 다음과 같은 확률적 계통의 상태추정에 사용된다.

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= Ax_k + Bu_k + Gw_k \\ y_k &= Cx_k + v_k \\ x_0 &\sim (\bar{x}_0, P_0), w_k \sim (0, Q), v_k \sim (0, R) \end{aligned} \tag{14}$$

위의 계통에 대한 칼만 필터를 정리하면 다음과 같다.[6]

$$\begin{aligned} \hat{x}_0 &= \bar{x}_0 \\ P_{k+1}^- &= AP_kA^T + GQG^T \\ \hat{x}_{k+1}^- &= A\hat{x}_k + Bu_k \\ K_{k+1} &= P_{k+1}^- C^T (CP_{k+1}^- C^T + R)^{-1} \\ P_{k+1} &= (I - K_{k+1}C)P_{k+1}^- \\ \hat{x}_{k+1} &= \hat{x}_{k+1}^- + K_{k+1}(y_{k+1} - C\hat{x}_{k+1}^-) \end{aligned} \tag{15}$$

위의 칼만 필터의 알고리즘은 두 단계로 구성이 되어있다. time update와 measurement update이다.

계통에 불확실성이 존재하는 경우에는 불확실성이 고려한 상태로 위의 방정식들의 해를 구하기가 어렵기 때문에 칼만 필터의 적용이 어렵다. 따라서 본 연구에서는 2장에서 설명된 슬라이딩모드 상태관측기를 이용하여 불확실성이 존재하는 경우에도 칼만 필터의 장점인 노이즈의 영향을 최소화시킬 수 있는 강인한 칼만 필터를 구성하기로 한다.

4.새로운 슬라이딩 모드를 이용한 칼만 필터의 구성

본 논문의 주된 아이디어는 다음과 같다. 불확실성에 대한 고려를 슬라이딩 모드를 이용하여 time update과정에서 하고 measurement update부분은 기존의 칼만 필터 알고리즘을 그대로 사용하기로 한다.
3장에서 제시된 확률적 계통에 슬라이딩 모드 상태관측기를 설계함에 있어서 기존의 슬라이딩 모드 상태관측기를 사용하기보다는 새로운 가상의 상태를 정의하고 그것을 이용하여 슬라이딩 평면을 정의하기로 한다. 가상의 상태를 이용하는 이유는 오차의 동특성을 향상시키기 위함이며 초기 시간부터 오차의 동특성이 슬라이딩 평면에 있도록 하기 위함이다. 가상의 상태는 다음과 같이 정의 한다.

$$z_{k+1} = a\, e_k \; (|a| \,\pi\, 1) \tag{16}$$

가상상태를 포함한 상태관측기는 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{k+1} \\ \hat{y}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_k \\ \hat{y}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} (u_k + U_{smc}) \tag{17}$$

여기서 슬라이딩 평면은 다음과 같이 결정한다.

$$\sigma_k = e_k + z_k \tag{18}$$

오차가 슬라이딩 평면에 있도록 하는 U_{smc}는 다음과

같이 결정된다.

만약 $V_k = \sigma_k^2$ 이라고 하면 다음 조건을 만족하면 슬라이딩 평면에 있게된다.[7]

$$\sigma_k \Delta\sigma_{k+1} \pi \frac{1}{2}(\Delta\sigma_{k+1})^2 \tag{19}$$

위의 조건을 만족시키는 U_{smc}는 참고문헌에서와 같은 방법으로 구할 수 있다. 다만 측정하지 못하는 상태의 추정오차의 최대범위를 가정해야하며 이것은 기존의 슬라이딩모드 상태관측기 설계에서도 요구되는 조건이다.

지금까지 설계된 상태관측기는 결국 다음과 같은 상태관측기가 설계되었음을 알 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{k+1} \\ \hat{y}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}_k \\ \hat{y}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k + \begin{bmatrix} 0 \\ g_1 \end{bmatrix} w_k + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (-a_1 + a) & (-a_2 + a) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_k \\ \hat{y}_k \end{bmatrix} \tag{20}$$

이 경우 오차방정식은 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} e_{k+1} \\ e_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ a & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_k \\ e_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1 \\ 0 \end{bmatrix} w_k = A_n \begin{bmatrix} e_k \\ e_k \end{bmatrix} + G_n w_k \tag{21}$$

이것은 다음과 같은 시스템에 대해서 time update했을 때의 오차방정식과 같다.

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{bmatrix} = A_n \begin{bmatrix} x_k \\ y_k \end{bmatrix} + Bu_k + G_n w_k \tag{22}$$

이때의 오차시스템의 공분산을 계산하면 다음과 같다.

$$P_{k+1}^- = A_n P_k A_n^T + G_n Q G_n^T \tag{23}$$

이제까지의 상태 관측기 설계가 Kalman Filter에서 time update에 대한 설계라면 출력정보를 이용해서 공분산을 최적으로 줄일 수 있는 measurement update 부분을 설계해야 한다. 이 부분은 기존의 알고리즘을 그대로 이용하면 된다.

이제까지 설명된 강인한 칼만 필터 알고리즘을 요약하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \hat{x}_0 &= \bar{x}_0 \\ P_{k+1}^- &= A_n P_k A_n^T + G_n Q G_n^T \\ \hat{x}_{k+1}^- &= A_n \hat{x}_k + Bu_k \\ K_{k+1} &= P_{k+1}^- C^T (C P_{k+1}^- C^T + R)^{-1} \\ P_{k+1} &= (I - K_{k+1} C) P_{k+1}^- \\ \hat{x}_{k+1} &= \hat{x}_{k+1}^- + K_{k+1}(y_{k+1} - C\hat{x}_{k+1}^-) \end{aligned} \tag{24}$$

5. 결 론

이제까지 슬라이딩 모드의 개념은 확정적 계통인 경우에 대해서 적용되었다. 본 연구에서는 불확실성이 존재하는 확률적 계통에 대해서 칼만 필터를 사용하고자 하는 경우에 슬라이딩 모드의 특성을 이용하여 불확실성의 영향을 제거하였다. 대부분 슬라이딩 모드를 적용하는 경우 슬라이딩 평면 자체가 성능보장의 역할까지 수행하나 본 연구에서는 강인성 향상만을 담당하였다. 그리고 상태추정 성능의 향상은 칼만 필터의 특성을 이용함으로써 강인함과 동시에 확률계통에도 적용이 가능한 상태관측기를 설계하였다. 결과적으로 본 연구에서 설계된 상태 관측기의 형태는 정합조건이 만족된다는 가정 하에서 슬라이딩 모드관측기와 칼만 필터를 결합한 형태가 된다. 가상상태의 정의에서 a값의 결정에 대한 기준을 세울 필요가 있다.

[참고문헌]

[1] J. Y. Hung, W. Gao, J.C. Hung, "Variable structure control : A survey", IEEE Trans. on Industrial Electronics, Vol.40, No.1, pp.2 22, 1993.

[2] V .I. Utkin, "*Sliding modes and their application in variable structure systems*", Moscow, Mir Publishers, 1978.

[3] V. I. Utkin, "Sliding Mode Cotrol in Electromechnical Systems" , Tayler & Francis, 1999.

[4 S. K. Park, H. K. Ahn, " Robust controller design with *novel sliding surface linear optimal control case*", IEE Proc. Control Theory and Application., Vol.146, No.3, pp.242 246, May 1999.

[5] D. E. Kirk, "*Optimal control theory* An Introduction", Prentice Hall, 1970.

[6] Lewis, "Applied optimal control and estimation", Prentice Hall, 1999.

[7] K. Furuta, "Sliding mode control of a discrete system," System & Control Letters 14, pp145 152, 1990.