

최적 LQR 제어를 이용한 모형 헬리콥터의 자세 제어

*한학식 *정상철 **김관형 *안영주 *이형기
*부경대학교 제어계측공학과, **동명정보대학교 컴퓨터공학과

Attitude Control of Model Helicopter using the LQR Controller

*Hak-Sic Han *Sang-Chul Ieong **Gwan-Hvung Kim *Young-Ioo An *Hvung-Ki Lee

*Department of Control and Instrumentation Engineering, Pukyong National University

**Department of Computer Engineering, Tongmyong University of Information Technology

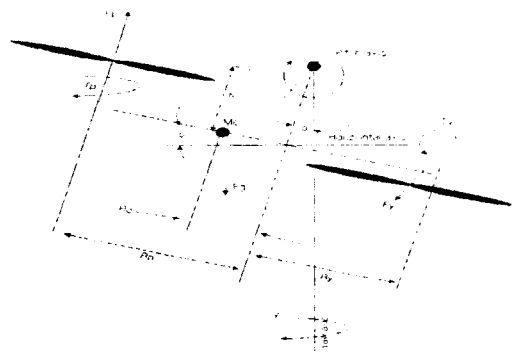
Abstract - Helicopter dynamics are plenty of nonlinearity. A complete mathematical model including propeller dynamics and forces generated by the propellers is very difficult to obtain. So the method used to design to design a controller is a parameter estimation. Design controller based on variable structure system. This paper deals with LQR control technique to control efficiently, its elevation angle and azimuth one. The purpose of the experiment is to design a controller allows you to use a desired elevation angle and azimuth ones. The system model has a helicopter model with 2-degree-of freedom. The simulation results were verified usefulness of controller.

- p : pitch각
- y : yaw각
- B_p, B_β : 프로펠러 점성 제동 계수
- F_p, F_β : 프로펠러에 의해서 발생된 힘 (V_p 와 V_β 의 함수)
- M_e : 몸체의 무게중심에의 질량
- g : 중력 상수
- h : 질량의 중심으로부터 피벗점까지의 수직거리이다 ($h > 0$)
- R_c : 피벗점으로부터 질량의 중심에 대한 수평거리이다 ($R_c > 0$)
- T_p, T_β : 프로펠러 축 토크 (V_p 와 V_β 의 함수)
- G_y, G_β : 커플링을 나타내는 비선형 함수
- J_{pp}, J_{yy} : pitch)와 yaw축에 대해 몸체의 관성 모멘트

1. 서 론

최적 LQR은 최적레귤레이터라고도 한다. 현대제어이론의 가장 중요한 성과 중의 하나인 많은 현실적인 문제가 이 이론의 틀 속에서 형성되어졌으며, 이와 동시에 최적 LQR 제어는 여러 가지의 다양한 수학적 알고리즘이 개발되어 왔다. 본 논문에서는 현대제어이론의 기본이라고 할 수 있는 최적 LQR 제어알고리즘을 이용하여 헬리콥터의 고도각과 방위각 안정성 방법들의 유용성을 평가한다. 대상 시스템으로는 모형 헬리콥터 모델을 사용하는데, 이 시스템은 상하 방향으로 주 프로펠러와 좌우 방향으로 부 프로펠러가 서로 상호 작용을 하고 있는 다변수 시스템이다. 헬리콥터 시스템의 다변수 비선형 동력학 방정식으로 해석한다. 그러나, 실제 적용하는 시스템 모델은 선형 모델에 기초를 둔다. 선형화된 결과는 비구조화된 불확실성을 가지는 불안정화되는 것과 부분적인 안정을 제공한다. 따라서, 본 논문에서는 최적 LQR 제어를 헬리콥터 시스템에 적용시켜 고도각과 방위각간의 유용성을 입증하였다.

그림 1은 2 자유도 모형 헬리콥터 구조도를 나타낸다.



2. 본 론

2.1 수학적인 모델링

프로펠러에 의해서 발생하는 프로펠러의 운동방정식과 힘을 포함하는 전체적인 수학적 모델을 유도한다는 것은 매우 어렵다.

식 (1)과 같이 프로펠러 동력학 방정식 모델이다.

$$\begin{aligned}
 J_{pp}\dot{p} + B_p\dot{p} &= R_p F_p - M_e g (h \sin(p) + R_c \cos(p)) + G_p(\tau_p, p) \\
 J_{yy}\dot{y} + B_y\dot{y} &= R_y F_y + G_y(\tau_y) \quad (1)
 \end{aligned}$$

그림 1. 2 자유도 모형 헬리콥터 구조도

pitch 프로펠러는 입력 전압 V_p 을 가하여 제어되는 DC 모터에 의해서 기동되어진다. 회전속도는 pitch축으로부터 거리 R_p 에서 일반적인 작용들인 힘의 결과이다. 프로펠러의 회전은 모터 샤프트상에 부하 토크 T_p 에 영향을 주는 것은 yaw축에서 확인 할 수 있다. 따라서, pitch 프로펠러의 회전에서 pitch축뿐만 아니라 yaw축에 대해서도 운동 영향을 준다. 유사하게, yaw모터는 토크 T_y 뿐만 아니라 yaw축으로부터 거리 R_y 에서 작용하는 힘 F_y 에 영향을 주는 것은 pitch축에 대해서도 영향력

을 가진다. 운동의 간략화된 방정식은 식 (1)과 같이 주어진다. 프로펠러의 동력학 방정식 모델인 식 (1)을 방정식 형태로 나타내기 위해 식 (2)와 같이 선형화 할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{y} \\ \dot{p} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} p \\ y \\ \dot{p} \\ \dot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K_{pp} & K_{py} \\ K_{yp} & K_{yy} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V_p \\ V_y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ G_d \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2)$$

V_p : 피치(pitch) 모터 전압
 V_y : 요(yaw) 모터 전압
 G_d : 중력 상수 ($\therefore G_d = M_e g R_d$)

식 (1)과 식 (2)의 방정식들은 실질적으로 더 복잡하므로, 아래의 3가지 사항은 고려하지 않는다. 우선, 프로펠러 회전 운동 방정식은 yaw와 pitch축에 영향을 주지 않는다. 둘째, 입력 전압에 대한 응답은 프로펠러 속력들의 즉각적인 응답 결과가 아닌 출력 힘이다. 마지막으로, 몸체 주위의 난류는 고려하지 않는다.
 선형화된 시스템은 그림 2에서 볼 수 있는 블록 다이어그램으로 나타낼 수 있다.

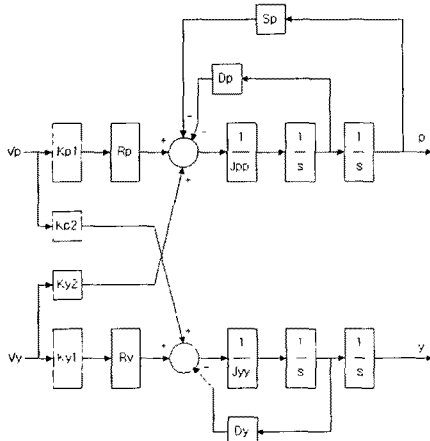


그림 2. 개루프 블록 다이어그램

2.2.1 비선형 시스템에 대한 파라미터

시스템 파라미터 추정하는 과정은

- 1) 분리된 페루프 안정을 실행한다. 그러나, 슬로우(slow) 제어기는 시스템을 평형상태로 가져간다.

$$V_p = -(k_{p1}(p - p_d) + k_{p2} \frac{dp}{dt} + k_{p3} \int (p - p_d) dt) \quad (3)$$

$$V_y = -(k_{y1}(y - y_d) + k_{y2} \frac{dy}{dt} + k_{y3} \int (y - y_d) dt)$$

식 (3)의 적분기는 두 개의 축이 안정한 상태가 되도록 에러를 영(zero)으로 유지하려는 일정한 전압을 공급한다. 이 제어기의 블록 다이어그램은 그림 3에서 볼 수 있다. 적분기의 출력은 제한되어 있어

와인드 업(windup)을 제거하고 적당한 피드백, 미분계수의 영향을 극복할 수 없다.

- 2) 시스템의 평형상태와 $[V_y, V_p]$ 에 시스템이 안정될 때까지 제어가 동작한다. 이 때, 시스템의 이득들은 작다.

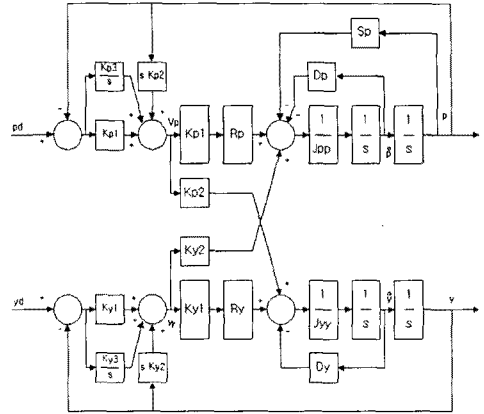


그림 3. 페루프 블록 다이어그램

- 3) 시스템이 일정한 전압 $[V_y, V_p]$ 동안 개루프는 시스템 평형상태이다.
- 4) $[V_y, V_p]$ 에 대해서 V_y 와 V_p 로 변하고 $y(t)$ 와 $p(t)$ 에 대한 단위응답을 관찰한다.
- 5) 응답은 행렬 B에서 커플링(coupling)과 시스템 파라미터를 추정한다.

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{y} \\ \dot{p} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3.5 & 0 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} p \\ y \\ \dot{p} \\ \dot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 70 & -3 \\ -12 & 40 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V_p \\ V_y \end{bmatrix} \quad (4)$$

식 (4)는 제어를 설계하기에 효과적이다. 시스템의 가장 중요한 변수는 커플링 파라미터들 K_{py} 와 K_{yp} 그리고 그들의 signs(부호들)이다. 이상적인 제어기는 효과적일 응답을 얻기 위해서 식(4)와 같은 특징을 가진다. 식 (4)의 특징은 실제 헬리콥터에 볼 수 있는데, 헬리콥터 조종사가 헬리콥터 몸체를 오른쪽으로 돌 때, pitch를 올리고 안정장치 스트롤 레버를 줄인다. 조종사가 헬리콥터 몸체를 왼쪽으로 돌 때, pitch를 내리고 안정장치 스트롤 레버를 증가시킨다.

2.2.2 페루프 파라미터 추정

전통적으로, 개루프 플랜트 상에서 추정된 파라미터를 사용할 수 없으므로, 파라미터 추정은 페루프 시스템을 사용한다. 페루프 시스템으로부터 파라미터 추정에 대한 데이터를 획득하고 여러 안정한 상태들을 명명한다.

식 (1)의 pitch 방정식만을 고려하고 관성 모멘트에 대해 $V_y = 0$ 을 가정한다. 식 (1)의 행렬 방정식은 식 (5)와 같은 전달함수식으로 나타낸다.

$$p = a_{31} \frac{\dot{p}}{s^2} + a_{33} \frac{\dot{p}}{s} + K_{pp} \frac{V_p}{s^2} + K_{pv} \frac{V_v}{s^2} \quad (5)$$

s-평면에서 z-평면으로의 쌍일차 변환을 사용한다. 쌍일차 변환은 식 (6)과 같다.

$$s = \frac{2}{t_s} \frac{z-1}{z+1} \quad (6)$$

식 (6)을 식 (5)에 대입하면, 다음의 식 (7)과 같다.

$$p = -\frac{2a_{31}t_s^2 + 8}{-4 + 2a_{33}t_s + a_{31}t_s^2} pz^{-1} + \frac{-a_{31}t_s^2 - 4 - 2a_{33}t_s}{-4 + 2a_{33}t_s + a_{31}t_s^2} pz^{-2} + \frac{-K_{pp}t_s^2}{-4 + 2a_{33}t_s + a_{31}t_s^2} V_p(1+2z^{-1}+z^{-2}) \quad (7)$$

식 (7)을 c_1 , c_2 , c_{pp} 로 치환하면, 식(8)과 같다.

$$p = c_1 pz^{-1} + c_2 pz^{-2} + c_{pp} V_p(1+2z^{-1}+z^{-2}) \quad (8)$$

식 (8)의 방정식에서 계수에 대한 추정을 위해 관측을 필요로 한다. 그러면, 식 (9)와 같다.

$$a_{31} = \frac{4(c_1 + c_2 - 1)}{t_s^2(-c_2 + c_1 + 1)}$$

$$a_{33} = \frac{-4(c_2 + 1)}{t_s(-c_2 + c_1 + 1)}$$

$$K_{pp} = \frac{16c_{pp}}{t_s^2(-c_2 + c_1 + 1)} \quad (9)$$

식 (8)의 V_p 를 포함하는 완전한 pitch 방정식을 유도하면 식 (10)으로 표현된다.

$$p = c_1 pz^{-1} + c_2 pz^{-2} + c_{pp} V_p(1+2z^{-1}+z^{-2}) + c_{pv} V_v(1+2z^{-1}+z^{-2}) \quad (10)$$

식 (5)의 K_{pv} 에 대해서 풀면, 식 (11)의 결과를 얻는다.

$$K_{pv} = \frac{16c_{pv}}{t_s^2(-c_2 + c_1 + 1)} \quad (11)$$

식 (5)에서 식 (11)의 과정은 yaw축에 대해서도 동일하게 적용된다. yaw에 관한 차분 방정식은 식 (12)와 같다.

$$y = a_{11} \frac{y}{s} + K_{yp} \frac{V_p}{s^2} + K_{yv} \frac{V_v}{s^2} \quad (12)$$

식 (12)의 방정식을 d_1 , d_2 , d_{yp} , d_{yv} 로 치환하면, 식 (13)으로 표현된다.

$$y = d_1 yz^{-1} + d_2 yz^{-2} + d_{yp} V_p(1+2z^{-1}+z^{-2}) + d_{yv} V_v(1+2z^{-1}+z^{-2}) \quad (13)$$

실질적인 데이터의 관측으로부터 d_1 , d_2 , d_{yp} , d_{yv} 을 추정되어 진다는 것을 가정하면, 식 (14)와 같은 행렬에 대해서 풀 수 있다.

$$a_{44} = \frac{2(d_2 + 1)}{t_s(d_2 - 1)}$$

$$K_{yp} = \frac{-8d_{yp}}{t_s^2(d_2 - 1)}$$

$$K_{yv} = \frac{-8d_{yv}}{t_s^2(d_2 - 1)} \quad (14)$$

파라미터들은 페루프나 개루프에서 추정되어 질 수 있다. 프로그램은 페루프와 개루프 파라미터 추정을 실행하여 시스템에 적용된다. 입력 명령은 많은 영향을 미치므로, 적절한 값을 선택한다.

2.3.1 제어 시스템 설계

중략 외란 G_d 가 주어졌을 때, 페루프에서 적분기가 필요하다. 추가된 상태 공간 표현에서 새로운 두 개의 상태들 α 그리고 ξ 를 식 (15)와 같이 정의한다.

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{y} \\ \dot{p} \\ \dot{y} \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\xi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{31} & 0 & a_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} p \\ y \\ p \\ y \\ \alpha \\ \xi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ K_{pp} & K_{pv} \\ K_{yp} & K_{yv} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} V_p \\ V_v \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ y \\ \alpha \\ \xi \end{bmatrix} \quad (15)$$

식 (15)을 선형 시불변 시스템으로 주어지는 상태 공간 모델로 표현하면, 식 (16)과 같다.

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx \quad (16)$$

식 (16)과 같은 상태 공간 모델에 대한 2차 평가 함수는 식 (17)과 같다.

$$J = \int_0^{\infty} (x' Q x + u' R u) dt \quad (17)$$

최적 제어 문제에서 시스템을 안정화시키면서 최적 제어 입력 u 에 대해서 2차 평가 함수 J 를 최소화하는 제어를 최적 LQR 제어기라 한다.

2차 평가 함수에서 Q 는 상태 가중 행렬이고, R 은 제어 가중 행렬이며, 최적 제어 설계에 있어서 Q 와 R 은

중요한 파라미터가 되므로, 제어기의 성능과 제어 효과 사이의 관계를 정의한다. 따라서 최적화 해를 구하기 위해서 Q 는 양의 반한정 ($Q \geq 0$) 대칭 행렬이고, R 은 양의 한정 ($R > 0$) 대칭 행렬이다.

Q 와 R 에 대한 값들은 식 (18)과 같다.

$$Q = \text{diag}([20 \ 50 \ 2 \ 10 \ 10 \ 0.1])$$

$$R = \text{diag}([2000 \ 2000]) \quad (18)$$

우선, 평가 함수 J 를 최소화 시키는 제어법칙을 구하는 것으로서, 최적제어가 유일하게 존재할 뿐만 아니라 모든 상태변수를 측정할 수 있다면 상태 피드백 제어법칙 $u = -Kx$ 를 구하는 것이 된다. LQR 제어 문제에서는 상태 피드백 제어법칙 u 는 식(19)과 같다.

$$u = -Kx = -R^{-1}B^T Px \quad (19)$$

최소화 이득 행렬 K 는 식 (20)와 같다.

$$K = R^{-1}B^T P \quad (20)$$

식 (20)에서 P 는 양의 한정 대칭행렬이고, 식 (21)의 리카치(Riccati)방정식을 이용한다.

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (21)$$

만약 $[A, B]$ 가 제어 가능하고 $[A, C]$ 가 관측 가능하다면, 행렬 P 는 양의 한정 대칭행렬이 되고 유일한 해 P 가 존재한다. 결과적으로 LQR 제어기의 설계는 상태 가중 행렬 Q 와 제어 가중 행렬 R 을 선정하는 문제로서, 가중 행렬 Q 와 R 의 값에 따라서 케루프 시스템의 극점 위치와 고유벡터가 결정되고, 최소화 이득 행렬 K 는 식 (22)과 같다.

$$K = \begin{bmatrix} K11 & K12 & K13 & K14 & K15 & K16 \\ K21 & K22 & K23 & K24 & K25 & K26 \end{bmatrix} \quad (22)$$

$K11 = 0.0078$ $K12 = -0.1658$ $K13 = 0.0027$
 $K14 = -0.1636$ $K15 = -0.0005$ $K16 = -0.0071$
 $K21 = -0.0032$ $K22 = 0.0010$ $K23 = -0.0131$
 $K24 = 0.0005$ $K25 = -0.0707$ $K26 = 0.0000$

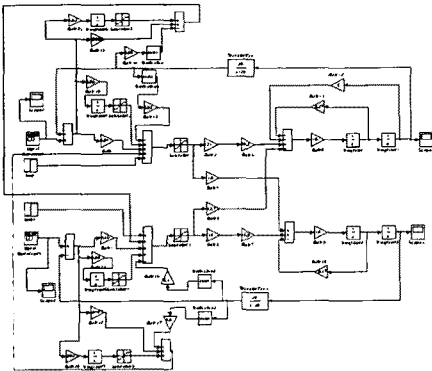


그림 4. LQR 제어기를 포함한 프로펠러 다이어그램

식 (15)의 선형 시불변 시스템과 식 (22)의 최소화 이득 행렬 K 값을 포함한 프로펠러의 다이어그램은 그림 4와 같다.

2.3.2 시뮬레이션

그림 5은 V_p 와 V_y 에 대한 K_{pp} , K_{py} , K_{yp} , K_{yy} 를 나타내고 있다.

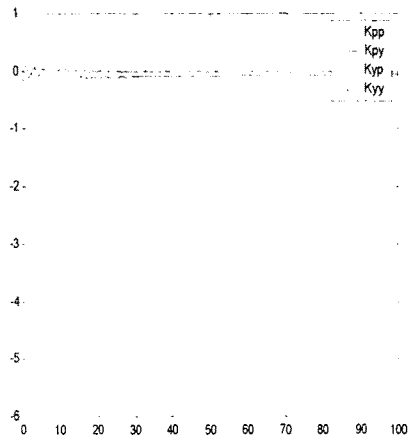


그림 5. V_p 와 V_y 에 대한 응답

그림 6과 7에서 일정 시간 평형 상태에서 각각 pitch와 yaw에 일정한 크기를 입력했을 때, 각각에 대한 응답을 나타내고 있다. 시뮬레이션 결과는 그림 7과 8에서는 입력 크기에 추정해 가는 것을 볼 수 있다.

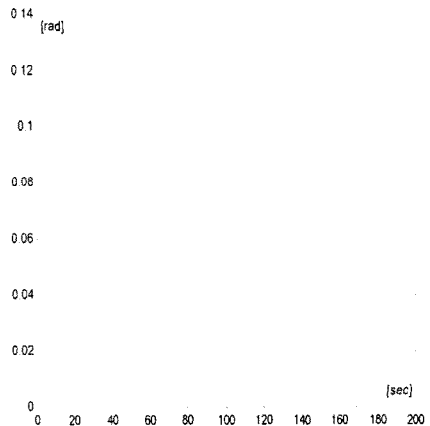


그림 6. 피치(pitch)각의 변화 응답

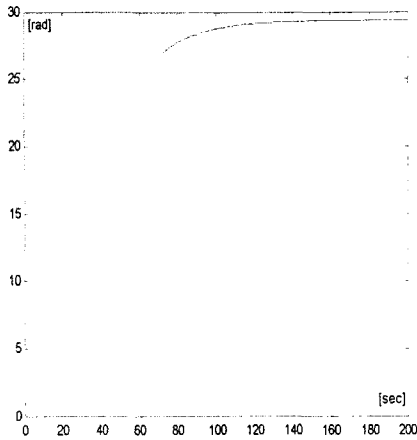


그림 7. 요(yaw)각의 변화 응답

3. 결 론

본 논문에서는 모형 헬리콥터 평형상태 자세제어를 제어목표로 하여 모델링하고 선형화 모델을 구하였다. 비선형 MIMO 시스템에 최적 LQR제어 기법을 적용하여 복잡한 비선형 플랜트에 유용성을 보였다. 주 프로펠러와 부 프로펠러간의 입력에 각기 다른 스텝 응답을 가함으로써 각각의 프로펠러간의 특성을 고려하였다. 제어 대상의 이득을 조정함으로써 양호한 자세제어의 추종성을 확인하였다. 앞으로 추정 시간을 줄이기 위한 연구가 필요할 것이며 아울러 실제 제어기 설계에 대해서도 연구할 계획이다.

[참 고 문 헌]

- [1] K. H. Kienitz, Q. H. Wu, M. Mansour, "Robust Stabilization of a Helicopter Model" IEEE Automatic Control, 1990.
- [2] Urs Christen, Martin F. Weilenmann, Hans P. Geering, "Design of H_2 and H_∞ Controllers with Two Degrees of Freedom" IEEE Automatic Control, 1994.
- [3] J. Kaloust, C. Ham, Z. Qu, "Nonlinear autopilot control design for a 2 DOF helicopter model" IEEE Proc. Control Theory Appl. Vol. 144, No. 6, November 1997.
- [4] Quang M. Lam and William J. Morgan "Robust Control Law for Advanced flight Control System" Coleman Research Corporation
- [5] Salah Zenieh and Abdel Latif Elshafei, "Robust Control of Uncertain Nonlinear Mechanical Systems Using a High Gain Observer"