

근사화된 2계 모델을 이용한 시간지연 시스템의 제어기 설계

김중훈\*, 박종식, 양승현, 이석원  
호서대학교 정보제어공학과\*

Design of the Controllers for Time-Delay Systems  
Using the Approximated 2nd-Order Model with Dead-Time

Jong-Hun Kim\*, Jong-Sik Park, Seung-Hyun Yang, and Suk-Won Lee  
\*Dept. of Information & Control Eng. Hoseo Univ.

**Abstract** - This paper present a controller design scheme for time-delay system. The Smith Predictor has been proposed to solve the problem of time-delay. But this structure has a condition that parameters of plant and model have to be matched accurately. Because of this condition, it is not applied broadly in practical industrial process field. In this paper, the 2nd-order model with dead-time is used as plant model of the Smith Predictor and a main controller is designed by using the effect of mismatch between plant and model.

1. 서 론

플랜트에 존재하는 긴 시간지연은 전체 시스템의 안정도에 대한 해석과 제어기 설계를 어렵게 한다. 이런 문제점을 해결하기 위해 제안된 Smith Predictor는 시간지연의 영향을 받지 않는 특성을 가지고 있지만 플랜트와 모델간의 모든 매개변수들이 완전히 일치해야 하는 제약조건과[1][8], 플랜트에 적분기가 존재하는 경우 항상 정상상태 오차가 존재하는 문제점이 있다[2][3]. 실제적으로 플랜트와 완전히 일치하는 모델을 구하기가 어렵고, 이것으로 인해 플랜트와 모델간의 오차가 발생되며 Smith Predictor의 성능과 안정도에 큰 영향을 미친다.

본 논문에서는 Smith Predictor에서 시간지연을 포함한 고계의 플랜트를 제어하기 위한 하나의 방법으로 플랜트의 모델을 시간지연을 포함한 2계식으로 근사화한 방법[4][5]과 시간지연을 포함한 1계식으로 근사화한 방법[5][6] 중 플랜트가 가지고 있는 특성을 비교적 잘 표현하는 2계식으로 근사화한 Wang[4]의 알고리즘을 기초로하는 것을 고찰하고, 플랜트와 모델간의 오차가 존재할 때 시스템의 안정성을 유지하기 위한 제어기 계수의 범위를 설정하여[8] Smith Predictor의 제어기를 설계하는 방법을 제안한다.

2. 플랜트의 근사화 및 제어기 설계

2.1 시간지연항을 포함한 2계 근사화 모델

시간지연을 갖는 고계 시스템을 시간지연이 포함된 저계 근사 모델로 근사화 하는 방법은 많이 알려져 있다[4][5][6]. 본 논문에서는 Wang[4]이 제안한 방법을 사용하여 플랜트를 근사화하였다.

다음은 시간지연을 갖는 플랜트의 전달함수를 2계식으로 근사화한 모델이다.

$$\widehat{G}_p(s) = \frac{1}{as^2 + bs + c} e^{-sL} \quad (1)$$

여기서 계수 a, b, c, L은 추정해야 하는 매개변수이고, 이들 매개변수들을 결정하기 위해 주파수 응답의 위상이 다음의 식(2)를 만족하는 두 개의 주파수 포인트  $s=j\omega_c$ ,  $s=j\omega_b$ 를 선정한다.

$$\angle G(j\omega_c) = -\pi, \quad \angle G(j\omega_b) = -(\pi/2) \quad (2)$$

식(1)에서  $G(j\omega_c) = \widehat{G}(j\omega_c)$ ,  $G(j\omega_b) = \widehat{G}(j\omega_b)$ 의 조건이므로 주파수  $\omega_c$ ,  $\omega_b$ 에 대해 다음의 식(3),(4)로 나타낼 수 있다.

$$c - a\omega_c^2 + jb\omega_c = \frac{\cos(\omega_c L) - j\sin(\omega_c L)}{-|G(j\omega_c)|} \quad (3)$$

$$c - a\omega_b^2 + jb\omega_b = \frac{\cos(\omega_b L) - j\sin(\omega_b L)}{-j|G(j\omega_b)|} \quad (4)$$

위의 두 식을 풀어서 정리하면, 식(5),(6),(7),(8)을 얻는다.

$$\frac{\sin(\omega_c L)}{\cos(\omega_b L)} = \frac{\omega_c |G(j\omega_c)|}{\omega_b |G(j\omega_b)|} \quad (5)$$

$$a = \frac{1}{\omega_c^2 - \omega_b^2} \left[ \frac{\sin(\omega_b L)}{|G(j\omega_b)|} + \frac{\cos(\omega_c L)}{|G(j\omega_c)|} \right] \quad (6)$$

$$b = \frac{\sin(\omega_c L)}{\omega_c |G(j\omega_c)|} \quad (7)$$

$$c = \frac{1}{\omega_c^2 - \omega_b^2} \left[ \frac{\omega_c^2 \sin(\omega_b L)}{|G(j\omega_b)|} + \frac{\omega_b^2 \cos(\omega_c L)}{|G(j\omega_c)|} \right] \quad (8)$$

식(5)는 비선형 방정식이므로 직접 해를 구하는 것이 어렵기에, 해를 구하기 위해서 Newton-Raphson 방법을 사용하여 거의 정확한 해를 구하도록 한다. 먼저 근접해를 얻기 위해 다음의 근사식을 이용한다.

$$\sin(x) = px^2 + qx, \quad \cos(x) = px^2 + rx + 1 \quad (9)$$

식(9)에서 p, q, r은 다음과 같이 주어진다.

$$p = \frac{8}{\pi^2} (1 - \sqrt{2}), \quad q = \frac{2}{\pi} (2\sqrt{2} - 1), \quad r = \frac{2}{\pi} (2\sqrt{2} - 3)$$

따라서 식(5)와 (9)로부터 다음의 식(10)을 얻는다.

$$p(\omega_c^2 - \theta\omega_b^2)L^2 + (q\omega_c - \theta r\omega_b)L - \theta = 0 \quad (10)$$

여기서  $\theta = \frac{\omega_c |G(j\omega_c)|}{\omega_b |G(j\omega_b)|}$  이다. 식(10)의 해 중에서 절댓값이 작은 것을 식(11)의 Newton-Raphson 방법의 초기값으로 이용한다.

$$L_2 = L_1 - \frac{f(L_1)}{f'(L_1)} \quad (11)$$

식(11)에서  $f(L), f'(L)$ 은 다음과 같다.

$$f(L) = \frac{\sin(\omega_c L)}{\cos(\omega_b L)} - \frac{\omega_c |G(j\omega_c)|}{\omega_b |G(j\omega_b)|}$$

$$f'(L) = -\frac{\omega_b \sin(\omega_b L) \sin(\omega_c L) + \omega_c \cos(\omega_b L) \cos(\omega_c L)}{\cos^2(\omega_b L)}$$

식(11)에서 구한  $L$ 을 식(6),(7),(8)에 대입하여 구한 매개변수들을 식(1)에 대입함으로써 시간지연을 갖는 2계 근사화 모델을 구할 수 있다. 그러나, 이 방법은 주파수 응답을 이용하는 것이므로, 모델을 구하는데 있어 고계의 플랜트가 적분기를 포함하는 경우에 식(2)를 만족하는  $\omega_c$ 와  $\omega_b$ 를 구할 수 없으므로 이 방법을 적용할 수 없다.

## 2.2 Smith Predictor

Smith Predictor는 플랜트의 모델을 선형 전달함수와 시간지연항으로 분리해서 모델의 시간지연 출력과 실제 플랜트의 출력을 상쇄시키고, 시간지연의 영향을 받지 않고 제어하는 구조로 이루어져 있다.

그림 1은 이와 같은 Smith Predictor에 의한 플랜트를 나타낸 것이다.

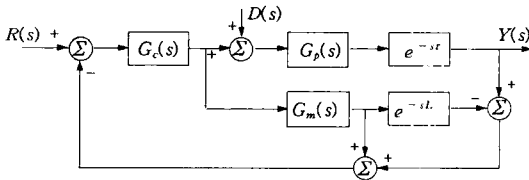


그림1 Smith Predictor

그림 1에서  $R(s)$ 는 기준입력,  $Y(s)$ 는 출력,  $D(s)$ 는 부하 외란입력을 나타내며,  $G_c(s)$ 는 주 제어기,  $G_p(s)e^{-sL}$ 는 시간지연을 갖는 플랜트이고,  $G_m(s)e^{-sL}$ 은 식(1)의 플랜트의 모델식과 시간지연항으로 분리한 형태이다. 식(12)는 기준입력에 대한 전달함수이고, 식(13)은 부하 외란입력에 대한 전달함수이다.

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_c(s)G_p(s)e^{-sL}}{1 + G_c(s)G_m(s) + G_c(s)[G_p(s)e^{-sL} - G_m(s)e^{-sL}]} \quad (12)$$

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G_p e^{-sL} [1 - \{G_m(s)e^{-sL} G_c(s) - G_c(s)G_m(s)\}]}{1 + G_c(s)G_m(s) + G_c(s)[G_p(s)e^{-sL} - G_m(s)e^{-sL}]} \quad (13)$$

위의 구조에서 플랜트와 플랜트의 모델이 완전히 일치한다고 하면 기준입력과 부하 외란입력에 대한 출력의 전달함수는 다음과 같이 간략화 된다.

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_c(s)G_m(s)}{1 + G_c(s)G_m(s)} e^{-sL} \quad (14)$$

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{G_p e^{-sL} [1 - \{G_m(s)e^{-sL} G_c(s) - G_c(s)G_m(s)\}]}{1 + G_c(s)G_m(s)} \quad (15)$$

식(14),(15)의 특성방정식은 시간지연의 영향을 받지 않음을 알 수 있다.

## 2.3 제어기의 설계

폐루프 시스템이 안정하다는 필요충분조건을 만족하기 위해 식(16)(17)에 주어진  $\omega_M, \delta_D, \delta_P$ 은 양의 값을 가져야 한다.

$$|\tau - L| < \delta_D \quad (16)$$

$$\left| \frac{G_p(j\omega)}{G_m(j\omega)} - 1 \right| < \delta_P, \quad 0 \leq \omega < \omega_M \quad (17)$$

플랜트 동적특성의 불확실성은 주파수에서 단조증가한다[9]. 이러한 관점에서 보면 시스템이 안정하게 유지되기 위해서는 불일치가 유한한 주파수의 영역에서 작아야 한다.

식(14)의 우변항에서 시간지연이 없는 부분을  $Q(s)$ 로 한다.

$$Q(s) = \frac{G_c(s)G_m(s)}{1 + G_c(s)G_m(s)} \quad (18)$$

$Q(0) = 1$ 이고, 시스템이 안정하다고 가정한다면, 불일치가 존재해도 시스템은 부하 외란에 대해 크게 영향을 받지 않음을 알 수 있다. 따라서 실제적인 안정도는 부하 외란에 대한 정상상태 응답이 불일치에 민감하지 않다. 위의 정의들을 이용하여 제어기 계수의 범위를 설정할 수 있는 방법은 다음과 같다.

식(19)에서  $K \geq 0$ 과 음의 값이 아닌 정수  $\lambda$ 에 대해  $G_P(s)$ 와  $G_m(s)$ 는 다음의 조건을 만족한다고 가정한다. ( $\lambda = 0, 1, 2, \dots$ )

$$\left| \frac{G_P(j\omega)}{G_m(j\omega)} - 1 \right| \leq K \omega^\lambda \quad (19)$$

위의 식은 고주파수 범위에서 플랜트의 불확실성에 대한 허용오차를 결정하며,  $\lambda$ 는 고주파수에 대한 플랜트의 불확실성이 허용될 수 있는 값을 나타낸다.

Smith Predictor의 폐루프 시스템이 실제적으로 안정하기 위한 필요충분조건은 다음과 같고,

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} (K\omega^\lambda + 2) |Q(j\omega)| < 1 \quad (20)$$

식(19)를 만족하는  $K$ 는 다음의 식에서 결정한다.

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^{-\lambda} \left| \frac{G_P(j\omega)}{G_m(j\omega)} - 1 \right| \leq K \quad (21)$$

제어기  $G_C(s)$ 를 다음과 같은 형태로 고려될 수 있고,

$$G_C(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s \quad (22)$$

식(22)의 계수  $K_P, K_I, K_D$ 는 음수가 아니며, 아래의 식을 만족해야 한다.

$$K_I < (K_P + c)(K_D + b)/a \quad (23)$$

위의 식은 식(18)이 안정하기 위해 Routh-Hurwitz 판별법을 이용하여 구하고, 식(20)을 이용하여 폐루프 시스템이 안정하기 위한 제어기 계수  $K_P$ ,  $K_I$ 의 범위를 설정한다.

### 3. 모의 실험

모의 실험의 기준입력은 단위계단함수이며, 부하 외란 입력은 60s 후에 -0.5의 크기로 발생되도록 하여 수행했다.

플랜트와 근사화된 모델은 다음과 같다.

$$G_P(s) e^{-sr} = \frac{1}{(s^2 + s + 1)(s + 2)^2} e^{-0.1s}$$

$$\widehat{G}_P(s) = G_m(s) e^{-sL} = \frac{1}{5.648s^2 + 4.950s + 4.497} e^{-0.837s}$$

식(21)을 이용하여 K의 값은 다음과 같이 결정한다.

$$\begin{aligned} \lambda=0 \text{ 일 경우: } & 1 \leq K \\ \lambda=1 \text{ 일 경우: } & 0 \leq K \\ \lambda=2 \text{ 일 경우: } & 0 \leq K \end{aligned}$$

K는 식(19)에서 가정한 범위와 위에서 구한 범위를 만족하도록 1로 결정하고, 식(20)은  $\lambda=0$ 의 경우에는 만족하며,  $\lambda=1$ 일 경우에는 만족하기 위한 범위는  $0 \leq K_D < 5.648$ 이며,  $\lambda=2$ 일 경우에는 만족하지 않는다.

따라서 식(20)을 만족하는  $K_P$ ,  $K_I$ ,  $K_D$ 의 범위는 다음과 같다.

$$\left[ \begin{array}{l} 0 \leq K_I < (K_P + 4.497)(K_D + 4.950)/5.648 \\ 0 \leq K_D < 5.648 \\ 0 \leq K_P \text{ (arbitrary)} \end{array} \right] \quad (24)$$

식(24)에서  $K_P$ ,  $K_I$ ,  $K_D$  값을 선택하였다.

$$K_P = 2, K_I = 1.9, K_D = 2.3$$

Wang의 논문에서 제안된 제어기 계수는 다음과 같다.

$$K_P = 1.503, K_I = 1.366, K_D = 1.715$$

그림 2는 Smith Predictor의 주 제어기로 Wang[4]의 제어기 계수를 사용한 응답과 본 논문에서 제안한 제어기 계수를 사용한 응답을 비교하여 나타낸 것이다.

### 4. 결 론

Smith Predictor 구조는 시간지연 시스템에 비교적 좋은 특성을 가지고 있으나, 플랜트와 모델간에 완전히 일치해야하는 제약조건으로 인해서 설계가 어려웠다. 본 논문에서는 이 문제점을 해결하기 위한 방법을 제시하였다. 시간지연이 포함된 고계 플랜트를 시간지연이 포함된 2개의 식으로 근사화하여 플랜트의 모델로 사용하였고, 플랜트와 모델의 오차를 이용하여 시스템이 안정할 수 있는 제어기 계수의 범위를 제시하여 제안된 방법이 과도 응답과 부하 외란에 대한 응답에 대해 개선됨을 알 수 있다.

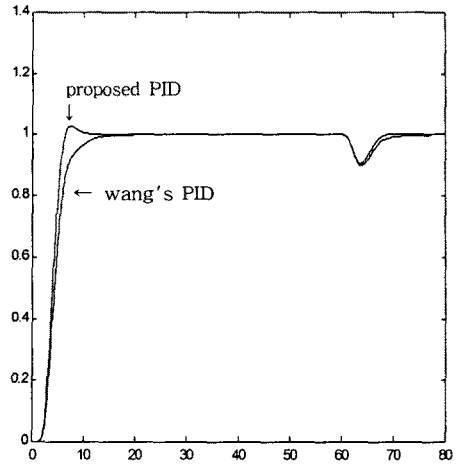


그림2 모의 실험 결과

### [참 고 문 헌]

- [1] J. J. Huang and D. B. DeBra "Predictor Type Temperature Control Design Through Parameter Mismatches". Proc. American Control Conf., pp. 1054-1057, 1997
- [2] K. Watanabe "A New Modified Smith Predictor Control for Time-Delay Systems with an Integrator". Proc. 2nd Asian Cont. Conf., July 22-25, 1997, Seoul
- [3] M. R. Mataušek and A. D. Micić "On the Modified Smith Predictor for Controlling a Process with an Integrator and Long Dead-Time". IEEE Trans. Auto. Contr., vol. 44, NO. 8, August 1999
- [4] Q. G. Wang, T. H. Lee, h. W. Fung, Q. Bai, and Yu Zang "PID Tuning for Improved Performance". IEEE Trans. Contr. syst. Technol., vol. 7, pp. 457-465, 1999
- [5] W. K. Ho, C. C. Hnag, and L. S. CAO "Tuning of PID Controllers Based on Gain and Phase Margin Specifications". Automatica, Vol. 31, No. 3, pp. 497-502, 1995
- [6] K. J. Astrom and Tore Hagglund "PID ontrrollers: Theory, Design and Tuning", ISA, 1995
- [7] J.E. Normey-Rico, E. F. Camacho "Smith Predictor and Modifications: A Comparitive Study". European Contr. Conf., 1999
- [8] Kazou Yamanaka and Etsujiro Shimemura "Effect of Mismatched Smith Controller on Stability in Systems with Time-delay". Automatica, vol.23, No.6, pp.787-791, 1987
- [9] Doyle, J. C. and G. Stein "Multivariable feedback design : concept for a classical/modern synthesis". IEEE Trans. Aut. Control, AC-26, 4-16