

도립 진자의 적응 퍼지 슬라이딩 모드 제어기 실험

김성태, 박해민, 김영태
 동국대학교 전기공학과

Experimental Adaptive Fuzzy Sliding Mode Control of an Inverted Pendulum

Sung-Tae Kim, Hae-Min Park, Young-Tae Kim, Kim Dong-Guk University

Abstract - This paper proposes the control problem of an inverted pendulum system based on adaptive fuzzy sliding mode. The universal approximating capability, learning ability, adaptation capability and disturbance rejection are collected in one control strategy. The proposed scheme does not require an accurate dynamic model and the joint acceleration measurement, yet it guarantees asymptotic trajectory tracking. Experimental results perform with an inverted pendulum to show the effectiveness of the approach.

1. 서론

도립 진자 시스템(inverted-pendulum system)은 활차(cart)를 정해진 길이 내에서 좌우로 이동하여 활차 상에 설치된 진자를 불안정 평형점으로 위치시키는 것이다. 로켓이나 2족 보행 로봇의 자세 제어에 응용되기도 하며 특유의 구조적인 불안정성 및 비선형성을 지니고 있어 많은 연구자들에 의해 다양한 종류의 제어기가 제안되고 있다.

일반적인 제어 이론에서의 대부분의 문제들은 주로 시스템 모델링에 기초한 수학적 방법들에 의해 해결되어지고 있다. 그러나 실제적으로 수학적 방법으로 해결할 수 없는 매우 복잡한 산업 과정들에 대해서는 정확한 해결 방법을 제시하지 못하고 있다.

퍼지 논리 제어(FLC)는 시스템의 수학적 모델을 얻기가 어렵거나 불가능한 것을 보완하기 위하여 전문가의 지식과 경험을 이용할 수 있는 제어 방법이다.

퍼지 제어 시스템의 체계적인 분석과 설계 방법을 보면, Wang[1]은 퍼지 기저 함수의 개념을 도입하여 비선형 시스템에 대한 적응퍼지제어기의 안정도 해석에 대한 수학적 이론을 구축하였으며 퍼지 논리 시스템은 콤팩트(compact) 입력 공간에서 어떤 정도의 정확성에 대하여 모든 비선형 함수를 균일하게 근사화 할 수 있음을 보였다.

본 논문에서는 앞에서 언급한 문제점들을 해결하기 위해 퍼지 논리와 적응 제어 개념, 슬라이딩 모드 제어 개념들을 조합한 제어 방법을 제시하였다.

제안된 제어기는 시스템의 정확한 수학적 모델을 요구하지 않으며 적분항을 포함시킴으로써 정상 상태에서의 오차를 줄일 수 있으며 케환 미분항을 고려함으로써 Lyapunov 함수의 일차 미분값이 확실히 음의 부호를 갖게 하였으며 결과적으로 점근적으로 안정됨을 수학적 증명을 통하여 보여주었다. 본 논문의 구성은 다음과 같다. 2 절에서 퍼지 논리 시스템의 기본적인 구조를 보여 주었으며, 3 절에서는 시스템의 수학적 모델링을 보였으며, 4 절에서는 적응 퍼지 슬라이딩 모드 제어 이론을 소개하였다. 5 절에서는 제안한 제어방법을 도립 진자 시스템에 적용하여 그 효율성을 시뮬레이션과 실험을 통하여 입증하였다.

2. 퍼지 논리 시스템과 퍼지 기저함수

2.1 퍼지 논리 시스템

퍼지 논리 지식의 기본은 And와 Or같은 연산자들이 입출력들과 관련이 있는 언어적 변수들과의 집합으로 구성된 퍼지 If-then 규칙들의 집합으로 되어 있다. 다중 출력 시스템은 보편적으로 단일 출력 시스템들의 그룹으로 항상 나뉘어질 수 있으므로 다음과 같은 MISO(Multi-Input Single-Output) 규칙을 고려할 수 있다.

$$R^{(i)}: IF x_1 \text{ is } A_1^i \text{ and } \dots \text{ and } x_n \text{ is } A_n^i, THEN y \text{ is } B^i \quad (2.1)$$

여기서, $x=(x_1, \dots, x_n)^T \in V \subset R^n$ 와 $y \in R$ 은 퍼지 논리 시스템의 입력과 출력을 나타낸다. A^i 와 B^i 은 V 와 R 의 공간에서의 퍼지집합이며 $i=1, 2, \dots, m$ 은 퍼지 입력 수, $l=1, 2, \dots, m$ 은 퍼지규칙의 수를 나타낸다.

퍼지 규칙의 구현에는 여러 방법이 있으나 본 논문에서는 t-노름(t-norm) 퍼지 함의(fuzzy implication)를 하였다.

$$A_1^i \times A_2^i \times \dots \times A_n^i \rightarrow B^i \quad (2.2)$$

$$\mu_{A_1^i \times A_2^i \times \dots \times A_n^i \rightarrow B^i}(x, y) = \mu_{A_1^i}(x_1) \star \dots \star \mu_{A_n^i}(x_n) \star \mu_{B^i}(y) \quad (2.3)$$

여기서, \star 은 t-노름 적연산자(product operator)이며 언어 규칙 표현에서의 conjunction "and"를 의미한다.

A_x 을 벡터 V 안에 있는 임의의 퍼지 집합이라고 하자. 그러면 각각의 퍼지 규칙은 다음과 같은 sup-star 복합 추론 규칙에 근거하여 $A_x \cdot R^{(i)}$ 로 표현 할 수 있다.

$$\mu_{A_x \cdot B^i}(y) = \sup_{x \in U} [\mu_{A_x}(x) \star \mu_{A_1^i \times A_2^i \times \dots \times A_n^i \rightarrow B^i}(x, y)] \quad (2.4)$$

퍼지 disjunction으로 m 개의 퍼지 규칙을 통합하면 다음과 같다.

$$\mu_{A_x \cdot (R^{(1)} \cup \dots \cup R^{(m)})}(y) = \mu_{A_x \cdot R^{(1)}}(y) + \dots + \mu_{A_x \cdot R^{(m)}}(y) \quad (2.5)$$

여기서, $+$ 은 t-코노름(conorm)이며 주로 퍼지합집합, 대수합, 혹은 한계함으로 정의되며 평균중심값 비퍼지화(center-average defuzzification) 방법을 이용하면 다음과 같은 식으로 표현된다.

$$y^* = \frac{\sum_{i=1}^m y^i(\mu_{A_x \cdot R^{(i)}}(y))}{\sum_{i=1}^m (\mu_{A_x \cdot R^{(i)}}(y))} \quad (2.6)$$

y^i 은 멤버십 함수 $\mu_{B^i}(y)$ 를 최대로 하는 값이다.

2.2 퍼지 기저 함수

식 (2.6)에서 평균중심 비퍼지화(center-average defuzzifier), 적추록(product inference), 단일 퍼지화(singleton fuzzifier) 방법을 사용하면 식 (2.7)로 표현 할 수 있다.[1]

$$y^* = f(x) = \frac{\sum_{i=1}^m \overline{y^i} (\prod_{j=1}^n \mu_{A_j^i}(x_j))}{\sum_{i=1}^m (\prod_{j=1}^n \mu_{A_j^i}(x_j))} \quad (2.7)$$

만일 $\mu_{A_i}(x_i)$ 를 고정시키고 \bar{y} 를 조정 가능한 변수로 보면, 식 (2.7)은 다음과 같은 형태로 나타낼 수 있다.

$$f(x) = \psi^T \xi(x) \quad (2.8)$$

여기서, $\psi = (\bar{y}^1, \dots, \bar{y}^m)$ 은 변수 벡터이며, $\xi(x) = (\xi^1(x), \dots, \xi^m(x))$ 은 다음과 같은 형태의 회귀 벡터(regressive vector)로 볼 수 있다.

$$\xi^i(x) = \frac{\prod_{j=1}^m \mu_{A_j}(x_j)}{\sum_{k=1}^m \left(\prod_{j=1}^m \mu_{A_j}(x_j) \right)} \quad (2.9)$$

식 (2.7)과 같은 형태의 퍼지 논리 시스템은 보편적 근사기임을 알 수 있으며 [1, 2], 콤팩트(compact) 입력 공간에서 어떤 정도의 정확성에 대하여 모든 비선형 함수를 균일하게 근사화 할 수 있다.

3. 도립 진자 시스템의 수학적 모델링

도립 진자 시스템(inverted-pendulum system)은 진자가 활차(cart)에 고정되어 있으며, 그림 1과 같이 활차의 진행방향에 따라 회전축에 고정되어 회전운동을 한다. 본 논문에서는 도립 진자 시스템(그림 1)의 운동 방정식을 구하기 위해서 Lagrange 방정식의 형태를 적용하였다. Lagrange 함수는 다음과 같다.

$$L = T - V \quad (3.1)$$

$$= 0.5m_c \dot{x}^2 + 0.5m \left[(l \cos \theta \dot{\theta} + \dot{x})^2 + (l \sin \theta \dot{\theta} - \frac{1}{12} m l^2 \dot{\theta}^2) \right] - mg \cos \theta$$

g 는 중력가속도, m_c 는 활차의 질량, m 은 진자의 질량, l 은 진자 길이의 1/2이다. Lagrange 방정식에 의해서

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = -u + f_c(x, \dot{x})$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = f_\theta$$

u 는 적용된 힘이며, f_c 는 레일 위에서 활차의 마찰력, f_θ 는 회전축상의 진자의 마찰력, $v(t)$ 는 인가된 힘에서 발생한 외란에 의해서 일양한정(uniformly bounded) 외란을 나타낸다. 다시 말해서 $t > 0$ 일 때 $|v(t)| \leq \epsilon$ 의 조건을 만족한다. 여기서 아래의 식 (3.2)와 (3.3)을 얻을 수 있다.

$$(m_c + m) \ddot{x} - ml \sin \theta \ddot{\theta}^2 + ml \cos \theta \dot{\theta}^2 = -u + f_c + v(t) \quad (3.2)$$

$$ml \cos \theta \ddot{x} + \frac{4}{3} m l^2 \ddot{\theta} = mgl \sin \theta + f_\theta \quad (3.3)$$

$f_c = \mu_c \operatorname{sgn}(\dot{x})$ 와 $f_\theta = \mu_\theta \dot{\theta}$ 를 가정한다. (μ_c 와 μ_θ 는 마찰계수). 따라서, 식 (3.2)과 (3.3)은 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$\ddot{\theta} = f(\theta) + g(\theta)(u + d(t)) \quad (3.4)$$

$$\ddot{x} = \frac{4}{3} l \sec \theta \ddot{\theta} - \frac{\mu_c}{ml} \sec \theta \dot{\theta} + g \tan \theta \quad (3.5)$$

$\theta = (\theta, \dot{\theta})^T = (\theta_1, \theta_2)^T$ 일 때,

$$f(\theta) = \frac{(m_c + m)g \sin \theta - ml \cos \theta \sin^2 \theta \dot{\theta}^2}{\left[\frac{4}{3} (m_c + m) - m \cos^2 \theta \right]} - \frac{(m_c + m) \mu_c \dot{\theta}}{m l^2 \left[\frac{4}{3} (m_c + m) - m \cos^2 \theta \right]} \quad (3.4)$$

$$g(\theta) = \frac{\cos \theta}{\left[\frac{4}{3} (m_c + m) - m \cos^2 \theta \right]} \quad (3.5)$$

$d(t) = -(v(t) - \mu_c \operatorname{sgn}(\dot{x}))$ 아래 식 (3.8)과 같은 상안정을 가진다.

$$|d(t)| \leq \epsilon_v + \mu_c \quad (3.8)$$

식 (3.4)와 (3.5)로부터 도립 진자 시스템은 두 개의 역학 방정식으로 나타내어진다. 식(3.4)는 제어 입력 u 부터 진자의 각 θ 에서 역학변환(transition)이며, 식 (3.5)는 활차의 위치 x 와 진자의 각 θ 사이의 역학관계를 나타낸다.

4. 적응 퍼지 슬라이딩 모드 제어기의 설계

제어하고자 하는 시스템에서 불확실한 요소가 포함되어 있는 경우 퍼지 제어를 사용하면 불확실한 요소에 관제 없이 제어가 가능하다. 본 논문에서는 적응 퍼지 슬라이딩 제어 방법을 적용하여 효과적으로 추종하는 방법을 제시하려 한다.

식 (3.4)를 $\ddot{\theta} = f(\theta) + b r (g(\theta) = b, r = (u + d(t)))$ 의 형태로 표현하면, f 는 정확하게 모델링 하기가 어려운 함수이며 b 역시 정확한 값은 알 수 없으나 최소 한계값 b_l 은 알 수 있는 값이다. 즉, $0 < b_l \leq b, b = b_l + \Delta b$ 이다.

$\theta_d(t)$ 을 기준이 되는 변위각이라고 할 때 $e(t) = \theta(t) - \theta_d(t)$ 이다. 그러면 다음과 같은 슬라이딩 표면을 고려하자.

$$s(t) = e(t) + k_1 e(t) + k_2 \dot{e}(t) \quad (4.1)$$

여기서, $\dot{e}(t) = \int_t^0 e(\tau) d\tau$

$\dot{e}(t)$ 는 정상 상태 오차를 줄이기 위한 적분항이다. 식 (4.1)의 양변을 미분하면,

$$\begin{aligned} \dot{s}(t) &= \ddot{e}(t) + k_1 \dot{e}(t) + k_2 \ddot{e}(t) \\ &= \ddot{\theta}(t) - \ddot{\theta}_d(t) + k_1 \dot{e}(t) + k_2 \ddot{e}(t) \\ &= f(\theta) + b r - \ddot{\theta}_d(t) + k_1 \dot{e}(t) + k_2 \ddot{e}(t) \end{aligned} \quad (4.2)$$

만일 f 와 b 를 정확히 알 수 있다면, 최적 슬라이딩 모드 제어를 쉽게 설계할 수 있다.[3] f 와 b 에 대한 부족한 지식 때문에, f 를 식 (2.8)의 형태인 퍼지 논리 시스템 $\hat{f}(\theta | \mathcal{E})$ 로 대체할 수 있고, 미지의 외란(unknown disturbance)을 감소시키기 위해 $k_3 \cdot \operatorname{sgn}(s)$ 항을 고려하면 결과적으로 적응 퍼지 슬라이딩모드 제어기(adaptive fuzzy sliding mode controller)는 다음과 같이 제안할 수 있다.

$$u(t) = \frac{1}{b_l} \left[-\hat{f}(\theta | \mathcal{E}) + \ddot{\theta}_d(t) - k_1 \dot{e}(t) - k_2 e(t) - k_3 \cdot \operatorname{sgn}(s) - k_4 s \right] \quad (4.3)$$

여기서 $k_4 \cdot s$ 항은 $\dot{e}(t)$ 을 더 큰 음수로 만들기 위하여 고려되었다. 그림 2.은 도립 진자 시스템에 제안된 적응 퍼지 슬라이딩 모드 제어의 구현을 나타낸다. $k_3 \cdot \operatorname{sgn}(s)$ 항은 슬라이딩 표면에서의 빠른 스위칭을 나타내며, 이것은 샘플링 주파수에 의해 변화한다. 모터는 이러한 샘플링 주파수에서 많은 채터링을 발생시키는데 이것을 이기 위해서 $\operatorname{sgn}(s)$ 을 다음과 같은 형태의 연속 함수로 고려하면,

$$\operatorname{sgn}(s) \rightarrow \frac{s}{|s| + \delta} \quad (4.4)$$

여기서, δ 는 매우 작은 양수 값이다.

식 (4.3)을 식 (4.2)에 대입하면,

$$\dot{s}(t) = f(\theta) - \hat{f}(\theta | \mathcal{E}) - k_4 s + \frac{\Delta b}{b_l} F - \frac{b}{b_l} k_3 \cdot \frac{s}{|s| + \delta} \quad (4.5)$$

$$F = -\hat{f}(\theta | \mathcal{E}) + \ddot{\theta}_d(t) - k_1 \dot{e}(t) - k_2 e(t) - k_4 s \quad (4.6)$$

다음과 같이 최소 근사 오차(minimum approximation error) ω 를 정의하자.

$$\omega = f - \hat{f}(\theta | \mathcal{E}^*) \quad (4.7)$$

여기서, \mathcal{E}^* 는 퍼지 논리 시스템의 최적 변수다.

$$\dot{s}(t) = \hat{f}(\theta | \mathcal{E}^*) - \hat{f}(\theta | \mathcal{E}) + \omega + \frac{\Delta b}{b_l} F - \frac{b}{b_l} k_3 \cdot \frac{s}{|s| + \delta} - k_4 s \quad (4.8)$$

만일 \hat{f} 을 식 (2.8)과 같은 형태의 퍼지 논리 시스템으로 생각하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\dot{s} = \phi^T \xi(\theta) + \omega + \frac{\Delta b}{b_l} F - \frac{b}{b_l} k_3 \cdot \frac{s}{|s| + \delta} - k_4 s \quad (4.9)$$

여기서, $\phi = \mathcal{E}^* - \mathcal{E}$ 그리고 $\xi(\theta)$ 은 식 (2.9)와 같은 퍼지 기저 함수이다.

안정도 해석을 위하여 Lyapunov 함수를 고려하자.

$$v = \frac{1}{2} s^2 + \frac{1}{2r} \phi^T \cdot \phi \quad (4.10)$$

여기서, s 는 식 (4.1)이며 r 는 양의 상수이다. 슬라이딩 표면을 따라 v 을 미분하면,

$$\begin{aligned}
 \dot{v} &= s\dot{s} + \frac{1}{r}\dot{\phi}^T \cdot \dot{\phi} \\
 &= s[\dot{\phi}^T \xi(\theta) + \omega + \frac{\Delta b}{b_1} F - \frac{b}{b_1} k_3 \cdot \frac{s}{|s| + \delta} - k_1 s] + \frac{1}{r} \dot{\phi}^T \cdot \dot{\phi} \\
 &= \frac{1}{r} \dot{\phi}^T [r s \xi(\theta) - \dot{\phi}] - \frac{1}{b_1} (k_3 b \frac{s^2}{|s| + \delta} - \Delta b \cdot s \cdot F - b_1 \cdot s \cdot \omega) - k_1 s^2 \\
 &\leq \frac{1}{r} \dot{\phi}^T [r s \xi(\theta) - \dot{\phi}] - \frac{1}{b_1} (k_3 b \frac{s^2}{|s| + \delta} - b_1 s \cdot F - b_1 s \cdot \omega) - k_1 s^2
 \end{aligned}
 \tag{4.11}$$

다음과 같은 부등식 (4.12)을 만족시키는 이득(gain) δ 을 선택하면,

$$k_3 \frac{s^2}{|s| + \delta} > |s|(1 + |\omega|) \tag{4.12}$$

식 (4.11)는 다음과 같이 표현 할 수 있다.

$$\dot{v} < \frac{1}{r} \dot{\phi}^T (r s \xi(\theta) - \dot{\phi}) - k_1 s^2 \tag{4.13}$$

$s\omega$ 은 최소 근사 오차와 비슷한 값이며 보편적 근사 정리[1]에 의하여 ω 는 매우 작은 값이 됨을 알 수 있다. 만일 식 (4.14)과 같은 적용 법칙을 선택하면,

$$\dot{\phi} = r s \xi(\theta) \tag{4.14}$$

식 (4.15)을 항상 만족시키는 양수 k_3 을 얻을 수 있다.

$$\dot{v} < 0 \tag{4.15}$$

Babalat의 정리[4]를 사용하면, s 가 영으로 수렴함을 알 수 있다. 식 (4.1)로부터 s 가 영(zero)으로 수렴하면 위치 추종 오차 e 도 영으로 수렴하게 된다. 그래서 시스템은 점근적으로 안정하게 된다. 전체적인 점근적 안정함(global asymptotic stability)을 보이기 위하여 식 (3.4)와 같은 시스템에서 Lyapunov 함수 v 를 고려하면 $\dot{v} > 0$ 도와 $\dot{v} < 0$ 임을 알 수 있다. 따라서 시스템은 적응 퍼지 슬라이딩 제어기로 전체적으로 점근 안정하게 된다.

5. 시뮬레이션 및 실험

4 절에서 제안한 적응 퍼지 제어기의 효율성을 보이기 위하여 도립 진자를 적용하였다. 본 논문에서는 도립 진자의 수직각과 제로 위치를 고려하였으며, 기준 궤적 경로를 추적하기 위하여 도립 진자의 동적 방정식을 Matlab 명령어 "ode45"를 사용하여 1ms 샘플링 주기로 시뮬레이션을 하였다. 실험에 사용되어진 변수 값은 다음과 같다.

- ** Parameters of the pendulum-cart set-up
- Track limits : $\pm 0.5m$
- Gravity : $9.81 m/s^2$
- Distance between mass center and axis of rotation : 0
- Mass of cart : 1.12 kg
- Magnitude of control force : 17.0 N
- Moment of inertia of system : $0.0136 kgm^2$
- Friction coefficient of pole rotation (μ_p) : neglig
- Friction coefficient of cart (μ_c) : 0.05Ns/m

도립 진자 시스템의 진자와 활차 장치에 있는 센서들은 컨버터와의 연결을 통해 활차 위치와 진자의 각을 검출한다. 진자와 활차 장치는 진자의 각과 위치 검출 장치 등의 두 개의 광학 encoder를 사용한다.

본 논문에서 제안하는 적응 퍼지 슬라이딩 모드 제어기를 이용한 실험에 의해 그림 3. 과 그림 4. 는 처음 시작 지점에서 약 20초 후에 활차의 위치와 진자각이 기준위치를 추종해 감을 보여주었다. 실험 결과를 확인함으로써 본 논문에서 제안하는 제어기의 유용성을 확인할 수 있었다.

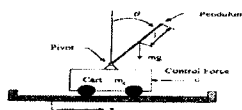


그림 1. 도립 진자 시스템

Fig. 1. The inverted-pendulum system

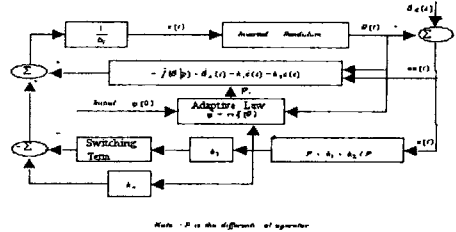


그림 2. 도립 진자 시스템

Fig. 2. Inverted pendulum system with an adaptive fuzzy sliding mode c

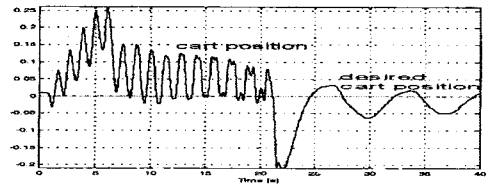


그림 3. 활차(cart)의 위치 실험 결과

Fig. 3. Experimental result of the cart position

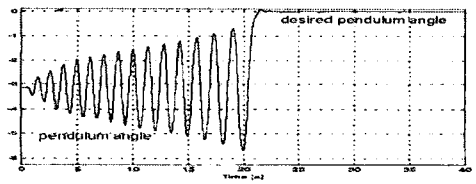


그림 4. 진자 각의 실험결과

Fig. 4. Experimental result of the pendulum angle

6. 결 론

본 논문에서는 구조적인 불안정성 및 비선형성을 지닌 도립 진자 시스템에 적응 퍼지 슬라이딩 모드 제어기를 제안하였다. 적응 제어 개념은 불확실한 파라미터로 구성된 시스템의 적응 능력을 개선하였으며, 외란에도 강인함을 보였다.

제안된 제어기는 시스템의 정확한 수학적 모델을 요구하지 않으며 직분항을 포함시킴으로써 정상 상태에서의 오차를 줄일 수 있으며 제한 미분항을 고려함으로써 Lyapunov 함수의 일차 미분값이 확실히 음의 부호를 갖게 하였으며 결과적으로 점근적으로 안정됨을 보여주었다. 또한, 시뮬레이션과 실험을 통해 제안된 적응 퍼지 슬라이딩 모드 제어기의 효율성을 보였다.

(참 고 문 헌)

- [1] L.X.Wang, and J.M.Mendel, "Fuzzy Basis Functions, Universal Approximation, Orthogonal Least Squares Learning," IEEE Trans. Neural Networks, Vol.3, pp. 807-814, 1992
- [2] L.X.Wang, Adaptive Fuzzy systems and control : Design and Stability Analysis, Prentice-Hall, 1994
- [3] Sasty, S. and M.Bodson, Adaptive Control : Stability, Convergence, and Robustness, Englewood Cliffs, NJ:Prentice-Hall, 1989
- [4] J.J.E.Slotine and W.Li, Applied Nonlinear Control, Englewood Cliffs, NJ:Prentice-Hall, 1991