

입력 포화 특성을 갖는 선형 시스템의  $H_\infty$  제어기 설계

송용희\*, 김진훈  
충북대학교 제어계측공학과

Design of  $H_\infty$  Controllers for Linear Systems with Input Saturation

Yong-Heui Song, Jin-Hoon Kim  
Dept. of Control and Instrumentation Eng. Chung-buk National University

**Abstract** - In this paper, we consider the design of gain scheduled controllers for linear systems with input saturation. We obtain a reachable set and a control gain, which guarantees that the controls are never saturated inside this reachable set and that the  $L_2$  gain is minimized, from matrix inequalities. This proposed gain scheduled control gives better performance than that of static control case, and we present the simulation results to show the usefulness of the proposed control.

변환(LFT) 이득 scheduling 방법이나, 이차 이득 scheduled 기법이 사용되었으나, 고정된 Lyapunov 함수를 사용하여 잠재적으로는 매우 conservative 함을 알 수 있다. 최근에 들어서는 Parameter Dependent Lyapunov 함수의 개념을 이용한 연구가 진행되고 있다.[8].

본 논문에서는 구동기의 포화가 일어나지 않도록 하고, 외란으로부터 출력까지의  $H_\infty$  노름(norm)이 최소가 되게 하는 제어기의 설계방법을 먼저 보이고, 시스템의 상태(state)에 종속된 제어 이득을 갖는 Scheduled 제어기의 설계 문제에 대해서 다루도록 하겠다.

1. 서 론

실제 제어 시스템을 설계할 경우 구동기는 필수적으로 사용되어지며, 이러한 구동기들은 제어 값이 적은 경우에는 출력이 입력에 비례하지만, 어느 값 이상이 되면 일정한 출력을 내보내게 되는 포화(saturation) 특성을 갖게된다. 따라서, 제어 시스템을 설계할 때 포화 특성을 고려하지 않고 설계된 제어기는 시스템의 성능 뿐만 아니라 안정성까지 보장하지 못하게 된다. 이에 구동기의 선형 구간을 크게 하여 포화 현상이 일어나지 않게 하는 것이 바람직하지만, 선형 구간이 증가한다는 것은 구동기의 크기가 커지게 됨을 의미하고, 이는 곧 비용의 증가를 가져오게 되어 현실적으로 실현시키기가 매우 어렵게 된다. 또한, 포화 구동기를 갖는 시스템은 그 비선형성으로 인해 전체 시스템이 비선형 시스템이 되어 시스템의 안정성 및 설계 문제가 선형 시스템을 다루기 보다 더욱 복잡하고 어렵게 된다. 따라서 포화 구동기를 갖는 시스템에 대한 연구가 제어 분야의 중요한 연구 주제로써 활발히 연구되어지고 있다.

포화 구동기를 갖는 시스템에 대한 이전 연구들을 먼저 살펴보면, Popov의 안정성 정리[1]와 Lyapunov 안정성 정리[2]를 통해 안정성 문제를 다루었고, Chen[3]이 비선형 구간과 Bellman의 정리를 이용한 방법을 제시함으로써 새로운 안정화 되는 조건이 주어졌다. 1990년대에 들어서는  $H_\infty$  제어 이론을 이용한 방법 [4]과 1990년대 중반 선형 행렬 부등식(Linear Matrix Inequality, LMI)[5]이 알려지면서 LMI를 이용한 제어기 설계 방법이 제시되었다[4].

본 논문에서 다루고자 하는 Scheduling 제어 문제 역시 많은 연구가 이루어지고 있다[6]. 이 문제에 대한 고전적(classical)인 접근 방법은 국부적(locally)으로 설계된 제어기들을 연결한 몇가지 scheduling 계획으로 구성된 반복적인 설계방식으로, scheduled 제어기의 성능을 보장하는 이론적인 배경이 결여되어 있었다. 그러나 선형 행렬 부등식(LMI)이 convex semidefinite program 을 이용하여 쉽게 해를 얻을 수가 있게 됨으로써 LMI 형태로 표현된 scheduling 문제는 전역적(globally)으로 해를 쉽게 구할 수가 있게 되었다[7].

초기의 scheduling 제어에 대한 방법은 선형 분수

2. 본 론

2.1 문제 기술

다음으로 기술되는 포화 구동기를 갖는 시스템을 고려해 보기로 하자.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1 u(t) + B_2 \text{SAT}(u(t)) \\ z(t) &= Cx(t), x(0) = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

여기에서  $x(t) \in R^n$ 는 상태이고,  $u(t) \in R^m$ 는 제어를 나타내며, 외란  $w(t) \in R^d$ 는  $w^T(t)u(t) \leq w_{\max}^2$ 를 만족한다. 또한, 포화 함수는 다음과 같다.

$$\text{SAT}(u(t)) = [\text{sat}(u_1), \text{sat}(u_2), \dots, \text{sat}(u_m)]^T$$

여기에서

$$\text{sat}(u_i) = \begin{cases} u_i^{\text{lim}}, & \text{if } u_i > u_i^{\text{lim}} \\ u_i, & \text{if } |u_i| \leq u_i^{\text{lim}} \\ -u_i^{\text{lim}}, & \text{if } u_i < -u_i^{\text{lim}} \end{cases} \quad (2)$$

이다.

본 논문의 주요 목적은 구동기의 포화가 일어나지 않도록 하며, 외란  $w(t)$ 로부터 출력  $z(t)$ 까지의  $L_2$  이득이 최소가 되도록 하는 다음의 제어기를 먼저 구하고,

$$u(t) = Kx(t) \quad (3)$$

시스템의 상태에 따라 다른 제어 이득을 사용하여 보다 좋은 성능을 갖는 Scheduled 제어기를 설계하는 것이다. 위의 시스템(1)에 대하여 제어기(3)가 포화되지 않는 경우, 시스템(1)의 폐루프 시스템은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A + B_2 K)x(t) + B_1 u(t) \\ z(t) &= Cx(t), x(0) = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

다음의 보조 정리들은 주요 결과의 증명에 사용되는 유용한 결과들이다.

**보조정리 1[5]:** 임의의 행렬  $S$  와 대칭행렬  $Q, R$  에 대하여 다음은 동치이다.

$$\begin{aligned} i) & R > 0, Q - S^T R^{-1} S > 0 \\ ii) & \begin{bmatrix} Q & S \\ S^T & R \end{bmatrix} > 0 \end{aligned} \quad (5)$$

**보조정리 2[5]:** 다음의 선형 시스템을 고려하자

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bw \\ w^T w &\leq w_{\max}^2, x(0) = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

다음을 만족하는 2차 함수  $V(x) = x^T Q^{-1} x, Q = Q^T > 0$  가 존재한다면,

$$\begin{aligned} i) & \frac{d}{dt} V(x) + \alpha V(x) - \alpha w^T w < 0 \\ ii) & \frac{d}{dt} V(x) + z^T z - \gamma^2 w^T w < 0 \end{aligned} \quad (7)$$

시스템 (6)의 Reachable set은 다음이 되고,

$$X = \{x: x^T Q^{-1} x \leq w_{\max}^2\} \quad (9)$$

또한, 외란  $w$  로부터 출력  $z$  까지의  $L_2$  이득이  $\gamma$  보다 크지 않게 된다.

## 2.2 주요 결과

본 논문에서는 하나의 제어 이득만을 사용하는 제어를 단일 제어기라 하고, 상태에 따라 다른 제어 이득을 사용하는 제어를 Scheduled 제어기라 하겠다. 이 절에서는 먼저 단일 제어기의 설계 방법을 보이고, Scheduled 제어기의 설계 방법을 보이도록 하겠다.

### 2.2.1 단일 제어기 설계

다음의 주요 결과를 위해 새로운 Reachable set을 정의 하자.

$$\Omega = \{x: x^T Q^{-1} x \leq \delta w_{\max}^2\}, \delta > 0 \quad (10)$$

그러면, 페루프 시스템(4)에 대해서  $L_2$  이득이 최소가 되도록 하는 상태 제한 제어기(3)는 다음의 정리 1을 통해 얻을 수가 있다.

**정리 1:** 다음의 세 가지 행렬 부등식을 동시에 만족하도록 하는  $Q = Q^T > 0, Y$ 와 스칼라  $\alpha > 0, \delta > 0$ 가 존재한다면

$$i) \begin{bmatrix} AQ + QA^T + B_2 Y + Y^T B_2^T & QC^T & B_1 \\ CQ & -I & 0 \\ B_1^T & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (11)$$

$$ii) \begin{bmatrix} Q & Y^T \\ Y & \frac{1}{\delta} \left( \frac{w_{\lim}}{w_{\max}} \right)^2 \end{bmatrix} > 0 \quad (12)$$

$$iii) \begin{bmatrix} AQ + QA^T + B_2 Y + Y^T B_2^T + \frac{1}{\delta} \alpha Q & B_1 \\ B_1^T & -\alpha I \end{bmatrix} < 0 \quad (13)$$

시스템(4)의 제어기(3)는 Reachable set(10)내에서 절대로 포화가 일어나지 않으며,  $L_2$  이득이  $\gamma$  보다 크지 않음을 보장한다.

**증명:** 행렬 부등식(13)은  $L_2$  이득이  $\gamma$  보다 크지 않음을 조건으로 보조 정리2의 (9)식으로부터 얻을 수가 있으며, 행렬 부등식(12)는 제어(3)이 절대로 포화가 일

어나지 않음 조건으로 Reachable set(10)이 사용된다. 끝으로 행렬 부등식(11)은 Reachable set(10)이 존재하기 위한 조건으로부터 유도할 수가 있다. ■■

### 2.2.2 Scheduled 제어기 설계

이 절에서는 정리1의 행렬 부등식(11),(12)를 이용하여 Reachable set내의 각 sub-set에 대한 제어 이득을 구하는 방법과 Scheduled 제어기의 설계를 위한 Algorithm에 대하여 다루도록 하겠다.

#### Algorithm 1:

1) Scheduling 제어를 위해 사용할 제어 이득의 수 ( $M$ )를 결정한다.

2) 정리1의 행렬 부등식을 이용하여 Reachable set(10)에 대한 제어 이득  $K_N = Y_N Q^{-1}$ 와  $\gamma_N, \delta_N, \alpha_N$ 을 얻는다.

3) Reachable set을 원점을 기준으로  $N$ 개의 nested sub-set으로 나눈다.

4) 각 sub-set에 대하여 정리1의 행렬 부등식 (11),(12)를 사용하여  $N-1$  개의 제어 이득을 얻는다.

$$\delta_i = \frac{\delta_N}{N} i, i = 1, 2, \dots, N-1$$

5) 시스템의 상태  $x(t)$  에 따라 4)로부터 얻어진 제어 이득  $K_i$  중에서 다음의 조건에 맞는

$$(i-1) \cdot \frac{\delta_N}{N} \cdot \left( \frac{w_{\max}}{u_{\lim}} \right)^2 \leq x^T Q^{-1} x < i \cdot \frac{\delta_N}{N} \cdot \left( \frac{w_{\max}}{u_{\lim}} \right)^2$$

제어 이득  $K_i$  를 제어  $u = Kx$  에 사용한다.

**Remark 1:** Reachable set(10)을  $N$  개의 nested sub-set으로 나누게 되면 각각의 sub-set은 다음과 같이 표현 된다.

$$\Omega_i = \left\{ x: (i-1) \frac{\delta_N}{N} \left( \frac{w_{\max}}{u_{\lim}} \right)^2 \leq x^T Q^{-1} x < i \frac{\delta_N}{N} \left( \frac{w_{\max}}{u_{\lim}} \right)^2 \right\}$$

**Remark 2:** 본 논문에서는 Reachable set을 균등 분할하는 방법으로 sub-set을 구하였으나 sub-set을 구하는 방법에 대해서는 여러 가지 다른 방법이 존재하며 그 방법에 따라 제어기의 성능도 변할 수가 있다. 또한,  $N$  값을 크게 하여 많은 수의 제어기를 사용할 수가 있겠지만, 현실적으로 구현하기가 어렵게 된다.

**Remark 3:** 앞서 제안된 Algorithm 1로부터 다음과 같은 사실을 알 수가 있다.

- 가장 작은 sub-set에서의 제어 이득이 가장 크다. 이는 상태  $x(t)$ 가 작을수록 더 큰 제어 이득을 사용함으로써 더 좋은 성능을 갖는다는 것을 나타낸다.

- 각 sub-set에서의  $L_2$  이득은 다음과 같다.

$$\gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_{N-1} < \gamma_N$$

- $x(t) \in \Omega_i$  에 따라 제어기  $u = Kx$  가 사용되며, 이는 절대로 포화되지 않는다.

- 제어 이득은 상태  $x(t)$  가 위치한 sub-set  $\Omega_i$  에

따라 변하게 된다. 즉, Scheduled 제어기는  $x(t)$  에 종속적이다.

### 3. 모의 실험 결과

본 논문에서 제시한 결과의 유용성을 보이기 위해 다음의 시스템에 대하여 고려해 보기로 한다.

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -10 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix} SAT(u(t))$$

$$z(t) = [5 \ 0] x(t) \quad x(0) = 0, \quad w^T(t)u(t) \leq w_{\max}^2$$

또한, 여기에서 사용된 외란으로는 미국에서 발생한 Elcentro 지진을  $w_{\max} = 1000$ 이 되도록 Scaling 하고, 제어 입력의 상한은  $u^{\lim} = 1000$  으로 하였다.

단일 상태 궤환 제어기에 대하여  $\delta = 1$  는 이전 연구 결과이고,  $\delta = 0.014$ 는 정리 1로부터 얻은 결과이다. 다음은 모의 실험에서 사용된 제어 이득을 나타낸다.

$$K_{\delta=1} = [-0.3984 \quad -0.3567]$$

$$K_{\delta=0.014} = [-27.7845 \quad -2.4453]$$

그림 1은 Open-loop와 정리 1을 이용한 단일 제어기, Scheduled 제어기 ( $N=20$ )의 출력을 보여주며, 이때의  $\delta = 0.014$ 이다. 그림 2는 그림 1에서 사용된 Scheduled 제어기의 제어 입력으로 포화가 일어나지 않음을 보여준다. 그림 3은 시간에 따라 사용된 제어 이득이며,  $y$  축은  $i^{\text{th}}$  제어기가 사용되었음을 나타낸다. 다음으로 표 1은 각각의 다른 제어에 다른 외란으로부터 출력까지의  $L_2$  이득에 해당하는  $\int z^T z dt / \int w^T w dt$  을 나타내었다.

표 1에서 보는 바와 같이 단일 제어기를 사용한 결과에 대해서는 정리 1에서 제시한 방법이 기존의 결과보다 더 좋은 결과를 보이며, 단일 제어기를 사용한 방법보다는 상태에 따른 제어 이득을 사용하는 Scheduled 제어기가 더 좋은 성능을 나타낸다는 것을 알 수가 있다.

### 4. 결 론

본 논문에서는 포화 구동기를 갖는 시스템에 대하여 제어기의 포화가 일어나지 않도록 하면서,  $L_2$  이득이 최소가 되도록 하는 단일  $H_{\infty}$  제어기를 먼저 설계하고, 상태에 따른 Scheduled 제어기의 설계 방법을 제시하였다. 이러한 제어기들은 행렬 부등식의 형태로 주어진 충분 조건을 만족시킴으로써 얻어질 수가 있다. 끝으로 *MATLAB*<sup>TM</sup> 을 이용한 모의 실험을 통해 본 논문의 유용성을 보였다.

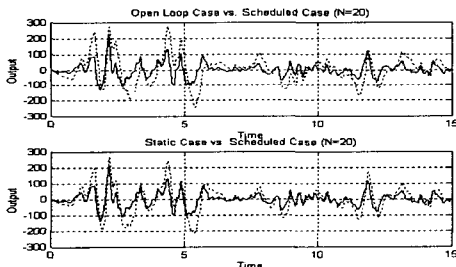


그림 1. Open Loop vs. Static Case vs. Scheduled Control (  $N=20$  )

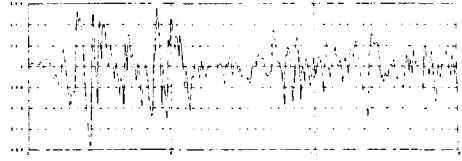


그림 2. Control Input (  $N=20$  )

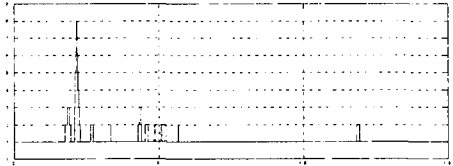


그림 3. Used Control Gain (  $N=20$  )  
( x-axis : time , y-axis :  $i^{\text{th}}$  control gain )

표 1. 제어에 따른  $Min(\gamma)$

	Open Loop	Static Control		Scheduled Control			
		$\delta=1$	$\delta=0.014$	$N$			
				10	20	50	100
$L_2$ 이득	0.153	0.122	0.058	0.042	0.040	0.038	0.037

### [참 고 문 헌]

- [1] R. L. Kosut, "Design of Linear systems with saturating linear control and bounded states," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol.28, No. 1, pp. 121-124, 1983
- [2] P. -O. Gutman and P. Hagander, "A new design of constrained controllers for linear systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 30, No. 1, pp. 22-33, 1985
- [3] B. S. Chen and S. S. Wang, "Stability of large-scale systems with saturating actuators," *Int. J. Contr.*, vol. 47, No. 3, pp. 827-850, 1988
- [4] Nguyen, T. and Jabbari, F., "Disturbance Attenuation for Systems with Input Saturation : an LMI Approach," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 44, No. 4, April 99, pp. 852-858.
- [5] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*, SIAM, 1994
- [6] Srivatava, S., Jabbari, F. "Scheduled Controllers for Disturbance Attenuation of Systems with bounded input," *Proc. ACC-00, Chicago, IL*, June 2000, pp. 735-739
- [7] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. J. Laub and M. Chilali, *LMI Control Toolbox User's Guide with MATLAB*<sup>TM</sup>, The MathWork, Inc. 1995.
- [8] P. Apkarian and Richard J. Adams, "Advanced Gain-Scheduling Techniques for Uncertain Systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 6, No. 1, 1998.