2002년도 대한전기학회 하계학술대회 논문집 2002.7.10-12

상태 피드백에 의한 쌍일차 계통의 강인 H∞ 제어

김 영중, 김 범수, 임 묘택
고려대학교 전기공학과

Robust H∞ Control for Bilinear Systems via State Feedback

Young-Joong Kim, Beom-Soo Kim, Myo-Taeg Lim
Department of Electrical Engineering, Korea University

Abstract - This paper focuses on robust H_∞ control for bilinear systems with time-varying parameter uncertainties via state feedback. The suitable robustly stabilizing feedback control law can be constructed in term of solution to a state variable x-dependent quadratic Riccati equation using successive approximation technique. Also, the state feedback control law robustly stabilizes the plant and guarantees a robust H_∞ performance for the closed-loop bilinear system with parameter uncertainties and exogenous disturbance.

1. 서 론

실세계의 많은 물리 시스템들은 선형과 비선형 시스템 사이에 존재하는 쌍일차 시스템으로 표현되며, 많은 학자들에 의하여 제어 이론과 기법들이 연구되어 왔다 [1],[2],[3]. 이러한, 쌍일차 시스템에 대한 최적 제어 문제를 연속적 근사법(successive approximation)을 이용하여 상태 변수 x를 포함하는 Riccati 방정식의 해를 구하여 제어기를 설계하는 기법이 소개되었다[2]. 하지만, 이들은 파라미터 불확실성이나 외란을 고려하지는 않았다. 최근에 강인 제어는 이슈가 되어왔고, 많은 학자들에 의하여 연구되어 왔다[4],[5],[6],[7]. 하지만, 쌍일차나 비선형 시스템에 대한 강인 H_∞ 제어기 설계에는 많은 어려움과 문제점을 갖고 있다. 따라서, 본 논문에서는 [3]에서 개발한 선형 시스템에 대한 강인 H_∞ 제어 기법을 외란을 포함하며, 상태와 입력, 그리고 커플링 행렬의 불확실성을 갖는 쌍일차 시스템에 적용한다. 이러한 쌍일차 시스템에 대한 상태 변수 x를 포함하는 정방 Riccati 방정식을 얻고, 연속적 근사법을 이용하여 양 정치(positive definite) 해를 구한 후 상태 제어 피드백 입력을 구한다. 이러한 제어 입력은 외란을 포함하는 파라미터 불확실성 쌍일차 시스템을 강인하게 안정화하고, 강인 H_∞ 성능을 보장한다. 또한, 강인 H_∞ 제어기 설계 문제의 해결 가능한 원만한(smooth) 조건을 다룬다.

2.1 절에서는 외란을 포함하는 파라미터 불확실성 쌍일차 시스템에 대한 강인 H_∞ 제어 기법과 기본 가정들, 그리고 정방(quadratic) 안정화 가능 조건들을 다루고, 상태 변수 x를 포함하는 정방 Riccati 방정식과 상태 피드백 제어 입력을 구한다. 이러한 Riccati 방정식을 연속적 근사법을 이용하여 양 정치 해를 구하는 알고리즘을 2.2절에서 제안한다. 3절에서 모의 실험 결과를 통하여 제안된 알고리즘의 타당성을 보이고, 4절에서 결론을 다룬다.

2. 쌍일차 시스템에 대한 강인 H∞ 제어

2.1 쌍일차 시스템에 대한 강인 H∞ 제어

다음과 같이 상태 공간 모델로 표현되며, 외란을 포함하는 파라미터 불확실성 쌍일차 시스템을 고려하자.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= [A+\triangle A(t)]x(t)+B_1\omega(t)+[B_2+\triangle B_2(t) \\ &\quad +\{x(t)M\}+\{x(t)\triangle M(t)\}]u(t) \qquad (1) \\ x(t_0) &= x_0 \\ z(t) &= C_1x(t)+D_1u(t) \qquad (2) \end{aligned}$$

여기서, $x(t)\in R^n$는 상태 변수이고, $u(t)\in R^m$는 제어 입력이며, $\omega(t)\in R^p$는 외란 입력이고, $z(t)\in R^q$는 제어된 출력이다. A, B_1, B_2, C_1, D_1과 M은 알려진 실수의 상수 행렬로 불확실성이 없는 시스템을 표현하고, $\triangle A(t)$, $\triangle B_2(t)$와 $\triangle M(t)$는 입력, 상태와 커플링 행렬의 시변 파라미터 불확실성을 표현하는 실수의 미지 행렬이다. 또한, 비선형 부분의 $\{x(t)M\}=\sum_{j=1}^{n}x_j(t)M_j$와 같이 표현된다. 일반성을 잃지 않으며 식의 간략화를 위하여 다음과 같은 가정을 한다.

가정 1: $D_1^T[C_1\ D_1]=[0\ I]$ ▽

본 논문에서는 시변 파라미터 불확실성 행렬 $\triangle A(t)$와 $\triangle\widetilde{B}_2(t)$를 다음과 같이 정의한다.

$$[\triangle A(t)\ \ \triangle\widetilde{B}_2(t)]=DF(t)[E_1\ E_2] \qquad (3)$$

여기서, $\triangle\widetilde{B}_2(t)=\triangle B_2(t)+\{x(t)\triangle M(t)\}$이고, D, E_1과 E_2는 알려진 실수 행렬이며, $F(t)\in R^{i\times j}$는 측정 가능한 미지의 Lebesgue 행렬로써 $F^T(t)F(t)\le I$를 만족한다. 폐루프 시스템이 강인한 안정화와 강인 H_∞ 성능을 보장할 조건을 정의 1에서 다루며, 정방 안정 가능 조건을 정의 2에서 다룬다.

정의 1: 상수 $\gamma>0$가 주어지고, 어떠한 허용가능한 불확실성 $\triangle A(t)$와 $\triangle\widetilde{B}_2(t)$에 대하여 다음 조건들을 만족하는 시간에 무관한 선형의 진(proper) 상태 피드백 입력, $u=Kx$이 존재하면, 불확실성 시스템 (1),(2)은 H_∞-노옴 임계값 γ에 의하여 안정화가능이라 할 수 있다.

① 폐루프 시스템이 점근적으로 안정하다.

② 외란 ω로부터 제어된 출력 z까지의 폐루프 전달함수 $T_{z\omega}$가 다음을 만족한다.

$$\|T_{z\omega}(s)\|_\infty\le\gamma \qquad (4)$$

▽

정의 2: 상수 $\gamma>0$가 주어지고, 어떠한 허용가능한 불확실성 $\triangle A(t)$와 $\triangle\widetilde{B}_2(t)$에 대하여 시간에 무관한 선형의 진 상태 피드백 입력, $u=Kx$와 다음 부등식을 만

족하는 실수의 양 정치 대칭 행렬 Q가 존재하면, 불확실성 시스템 (1),(2)은 H_∞-노옴 임계값 γ에 의하여 정방 안정화 가능이라 할 수 있다.

$$A_c^T(t)Q + QA_c(t) + \gamma^{-2}QB_cB_c^TQ + C_c^TC_c < 0 \tag{5}$$

▽

정의 1과 정의 2에서 사용된 정적 상태 피드백 제어 입력, $u(t) = Kx(t)$에 의한 폐루프 상태 공간 표현인 $(A_c(t), B_c, C_c)$은 다음과 같다.

$$A_c(t) = A + DF(t)E_1 + [\widetilde{B}_2(t) + DF(t)E_2]K \tag{6}$$

$$B_c = B_1 \tag{7}$$

$$C_c = C_1 + D_1K \tag{8}$$

$$T_{zw}(s) = C_c(sI - A_c)^{-1}B_c \tag{9}$$

여기서 $K \in R^{m \times n}$이고, $\widetilde{B}_2(t) = B_2 + \{x(t)M\}$이다.
이러한 조건 하에서 외란을 포함하는 불확실성 쌍일차 시스템에 대한 정방 안정화 조건을 정리 1에서 다룬다.

정리 1: 불확실성 시스템 (1),(2)가 H_∞-노옴 임계값 $\gamma > 0$에 의하여 정방 안정화가능 선형의 동적 진 상태 피드백 제어 입력이 존재하면, 같은 H_∞-노옴 임계값 γ에 의하여 정방 안정화가능 선형의 정적 진 상태 피드백 제어 입력이 존재한다. ▽
증명: [5]에서 증명한 결과와 같다.

본 논문에서 쌍일차 시스템의 상태 공간 모델에서 불확실성과 H_∞-노옴 임계값 $\gamma > 0$에 연관된 강인 H_∞ 제어 문제를 해결하는 것은 다음의 상태 변수 x를 포함하는 파라미터 의존 대수 Riccati 방정식을 푸는 것으로 대변된다. H_∞-노옴 임계값 γ에 의한 정방 안정화 문제에 연관된 정방 Riccati 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & A^TQ + QA + \gamma^{-2}QB_1B_1^TQ + \varepsilon QDD^TQ \\ & -(Q\widetilde{B}_2 + \frac{1}{\varepsilon}E_1^TE_2)R_\varepsilon^{-1}(\widetilde{B}_2^TQ + \frac{1}{\varepsilon}E_2^TE_1) \\ & + \frac{1}{\varepsilon}E_1^TE_1 + C_1^TC_1 + \delta I = 0 \end{aligned} \tag{10}$$

여기서, $R_\varepsilon = I + E_2^TE_2/\varepsilon$이고, $\delta > 0$는 충분히 작은 상수이고, $\varepsilon > 0$은 디자인 파라미터이다. 정리 1을 만족하는 상태 피드백 제어 입력의 존재에 대한 필요충분 조건을 정리 2에서 다룬다.

정리 2: 불확실성 시스템(1),(2)이 H_∞-노옴 임계값 $\gamma > 0$에서 정방 안정화 가능하다는 필요충분조건은 충분히 작은 $\delta > 0$에 대하여, Riccati 방정식 (10)이 양 정치 해인 Q를 갖도록 하는 $\varepsilon > 0$가 존재한다는 것이다. 또한, 상태 피드백 제어 입력 $u(t) = Kx(t)$의 K는 다음과 같이 구성한다.

$$K = -R_\varepsilon^{-1}(\widetilde{B}_2^TQ + \frac{1}{\varepsilon}E_2^TE_1) \tag{11}$$

▽

증명: [5]에서의 증명과 같은 방법으로 증명할 수 있다.

정리 3: $(A, B_2 + \{x(t)M\})$가 모든 영역에서 안정화 가능하고 (A, C_1)이 검출가능하며, $\gamma > 0$이 주어질 때, 정방 대수 Riccati 방정식 (10)이 양 정치 해인 Q를 갖도록하는 $\varepsilon > 0$이 존재하면, H_∞-노옴 임계값 γ에 대하여 파라미터 불확실성 $F(t)$가 허용가능하고, 불확실성 시스템이 정방 안정화 가능하다. ▽

정리 3은 쌍일차 시스템에 대한 강인 H_∞ 제어 문제의 해결 가능성의 원만한 조건들이다. 하지만, 불행하게도 정방 Riccati 방정식의 $\widetilde{B}_2(t)$에 상태 변수 $x(t)$를 포함하고 있으므로 일반적인 방법으로는 해를 구할 수 없다. 따라서 다음절에서는 연속적 근사법을 이용하여 상태 변수를 포함하는 Riccati 방정식의 해를 구하는 알고리즘을 제안한다.

2.2 연속적 근사법을 이용한 알고리즘

반복 변수 i를 사용하여 파라미터 불확실성 시스템 (1),(2)를 다음과 같이 정의 한다.

$$\begin{aligned} \dot{x}^{(i)}(t) &= [A + \triangle A(t)]x^{(i)}(t) + B_1\omega(t) \\ &\quad + [\widetilde{B}_2^{(i-1)} + \triangle\widetilde{B}_2^{(i-1)}(t)]u^{(i)}(t) \end{aligned} \tag{12}$$

$$x^{(0)}(t_0) = x_0$$

$$z^{(i)}(t) = C_1x^{(i)}(t) + D_1u^{(i)}(t) \tag{13}$$

여기서,

$$\widetilde{B}_2^{(i-1)}(t) = B_2(t) + \{x^{(i-1)}(t)M(t)\}$$

$$\triangle\widetilde{B}_2^{(i-1)}(t) = \triangle B_2(t) + \{x^{(i-1)}(t)\triangle M(t)\}$$

연속적 근사법을 이용한 쌍일차 시스템에 대한 정리 3의 양 정치 해를 구하는 알고리즘은 다음과 같다.

초기단계

① $i = 1$로 놓는다.
② 상태 변수의 초기치 $x^{(0)}(t_0)$로 $\widetilde{B}_2^{(0)}$와 $\triangle\widetilde{B}_2^{(0)}$를 구한뒤, $E_2^{(0)}$를 정하고, $R_\varepsilon^{(0)}$을 구한다.
③ ②에서 구한 값으로 다음의 대수 Riccati 방정식의 해를 구한다.

$$\begin{aligned} & A^TQ + QA + \gamma^{-2}QB_1B_1^TQ + \varepsilon QDD^TQ \\ & -(Q\widetilde{B}_2^{(0)} + \frac{1}{\varepsilon}E_1^TE_2^{(0)})R_\varepsilon^{(0)-1}(\widetilde{B}_2^{(0)T}Q + \frac{1}{\varepsilon}E_2^{(0)T}E_1) \\ & + \frac{1}{\varepsilon}E_1^TE_1 + C_1^TC_1 + \delta I = 0 \end{aligned}$$

④ ③에서 구한 해로 다음의 제어입력을 구성한다.

$$u^{(1)}(t) = -R_\varepsilon^{(0)-1}(\widetilde{B}_2^{(0)T}Q + \frac{1}{\varepsilon}E_2^{(0)T}E_1)x^{(1)}(t)$$

⑤ ④에서 구한 제어입력을 불확실성 쌍일차 시스템 (12-13)에 대입하고, 미분방정식을 풀어 $x^{(1)}(t)$를 구한다.

반복단계

① $i = i + 1$로 갱신한다.
② 전단계에서 구한 상태 변수 $x^{(i-1)}(t_0)$로 $\widetilde{B}_2^{(i-1)}$와 $\triangle\widetilde{B}_2^{(i-1)}$를 구한 뒤, $E_2^{(i-1)}$를 정하고, $R_\varepsilon^{(i-1)}$을 구한다.
③ ②에서 구한 값으로 다음의 대수 Riccati 방정식의 해를 구한다.

$$\begin{aligned} & A^TQ + QA + \gamma^{-2}QB_1B_1^TQ + \varepsilon QDD^TQ \\ & -(Q\widetilde{B}_2^{(i-1)} + \frac{1}{\varepsilon}E_1^TE_2^{(i-1)})R_\varepsilon^{(i-1)-1}(\widetilde{B}_2^{(i-1)T}Q \\ & + \frac{1}{\varepsilon}E_2^{(i-1)T}E_1) + \frac{1}{\varepsilon}E_1^TE_1 + C_1^TC_1 + \delta I = 0 \end{aligned}$$

④ ③에서 구한 해로 다음의 제어입력을 구성한다.

$$u^{(i)}(t) = -R_\varepsilon^{(i-1)-1}(\widetilde{B}_2^{(i-1)T}Q + \frac{1}{\varepsilon}E_2^{(i-1)}E_1)x^{(i)}(t)$$

⑤ ④에서 구한 제어입력을 불확실성 쌍일차 시스템 (12),(13)에 대입하고, 미분방정식을 풀어 $x^{(i)}(t)$를 구한다.

수렴성 판별 단계

다음 식의 *error*가 충분히 작아 질 때까지 반복단계를

반복 수행한다.

$$error = \|K^{(i)} - K^{(i-1)}\| \qquad \nabla$$

3. 모의 실험

다음과 같은 외란 입력이 있는 일반적인 쌍일차 시스템을 고려하자.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\omega + \left(\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + x_1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$x(t_0) = [1.8 \ \ -2.1]^T$$

본 모의실험에서는 H_∞-노옴 임계값 $\gamma = 0.7$, $\delta = 0.01$, 외란 입력을 $\omega(t) = 1.7\sin(7200t) - 1.5\cos(3600t)$, $E_1 = I$, $E_2 = 1.2I$, $D = I$, 그리고 Lebesgue 행렬 $F(t) = \cos(360t)I$로 가정하고 실험하였다.

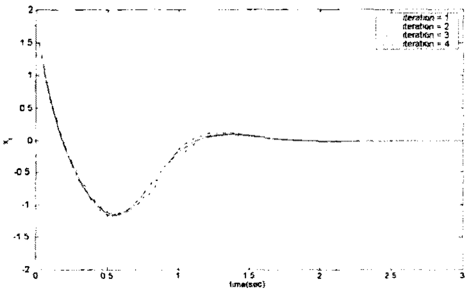

그림 1: 반복 수행에 따른 x_1의 궤적

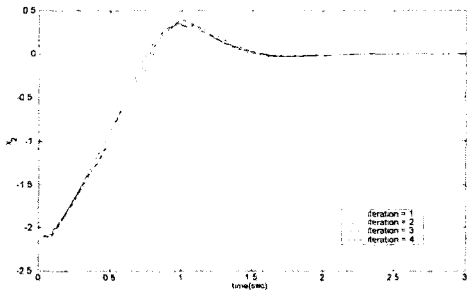

그림 2: 반복 수행에 따른 x_2의 궤적

그림1-4에서 보이는 결과와 같이 상태 변수의 궤적과 제어 입력은 반복수행 함에 따라 더욱 최적 값에 수렴해 가는 것을 알 수 있다. 또한, $\|T_{zw}(s)\|_\infty$의 값은 0.54139에서 0.54193사이의 값으로써 γ보다 작은 값을 가지므로 정의 1의 조건 ②를 만족한다.

4. 결 론

본 논문을 선형 시스템에 대한 강인 H_∞ 제어 기법을 외란을 포함하는 파라미터 불확실성 쌍일차 시스템에 적용하고, 원만한 해결 가능 조건을 다루었으며, 연속적 근사법을 이용하여 상태 변수 x를 포함하는 정방 Riccati 방정식의 양 정치 해를 구하는 알고리즘을 제안하였다. 이러한 해로부터 강인한 안정화와 강인 H_∞ 성능을 보장하는 제어기를 설계하였으며, 또한, 모의 실험을 통하여 제안된 알고리즘의 타당성을 보였다.

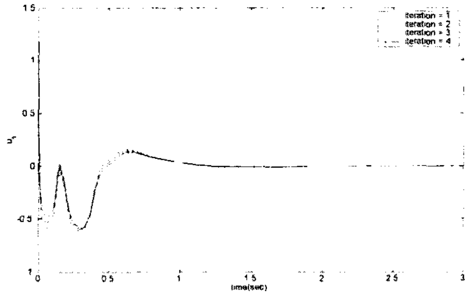

그림 3: 반복 수행에 따른 u_1의 궤적

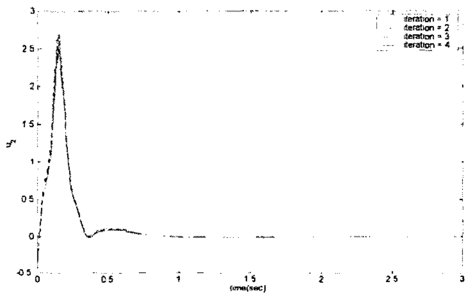

그림 4: 반복 수행에 따른 u_2의 궤적

[참 고 문 헌]

[1] Cebuhar W. and Costanza V. "Approximation procedures for the optimal control for bilinear and nonlinear systems", J. Optimization Theory and Applications, 43(4), 615-627, 1984.

[2] E. Hoffer and B. Tibken, "An iterative method for the finite-time bilinear quardratic control problem", J. Optimization Theory and Applications, 57, 411-427, 1988.

[3] R. Mohler, "Nonlinear systems - Applications to bilinear control", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1991.

[4] Lihua Xie and Carlos E. de Souza, "Robust H_∞ Control for Linear Systems with Norm-Bounded Time-Varying Uncertainty", IEEE Trans. on Automatic Control, Vol.37, No.8, 1188-1191, August 1992.

[5] Lihua Xie, Minyue Fu and Carlos E. de Souza, "H_∞ Control and Quadratic Stabilization of Systems with Parameter Uncertainty Via Output Feedback" IEEE Trans. on Automatic Control, Vol.37, No.8, 1253-1256, August 1992.

[6] Kemin Zhou, "Essentials of Robust Control" Prentice-Hall, New Jersey, 1998.

[7] J. Doyle, K. Glover, P. Khargonekar and B. Francis, "State space solution to standard H_2 and H_∞ control problems", IEEE Trans. on Automatic Control, Vol.34, 831-846, 1989.